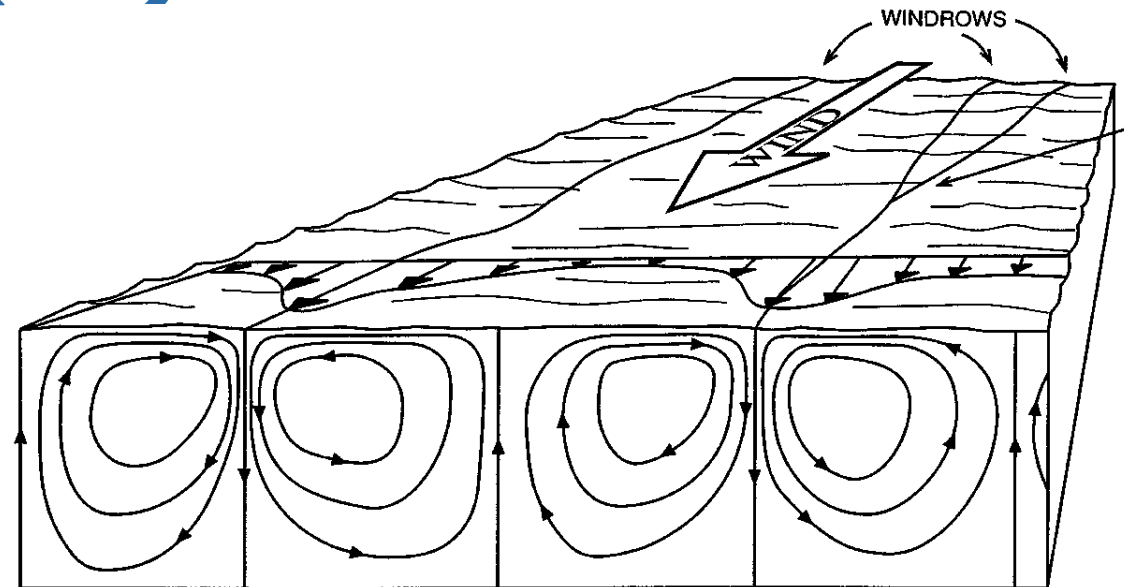


波・流れ相互作用（1）

- 波平均方程式の理論
- ラングミュア循環について



波による流れへの影響

波と流れで時間スケールが分離：
波周期程度でのオイラー時間平均 $\overline{(\cdot)}$ で分離

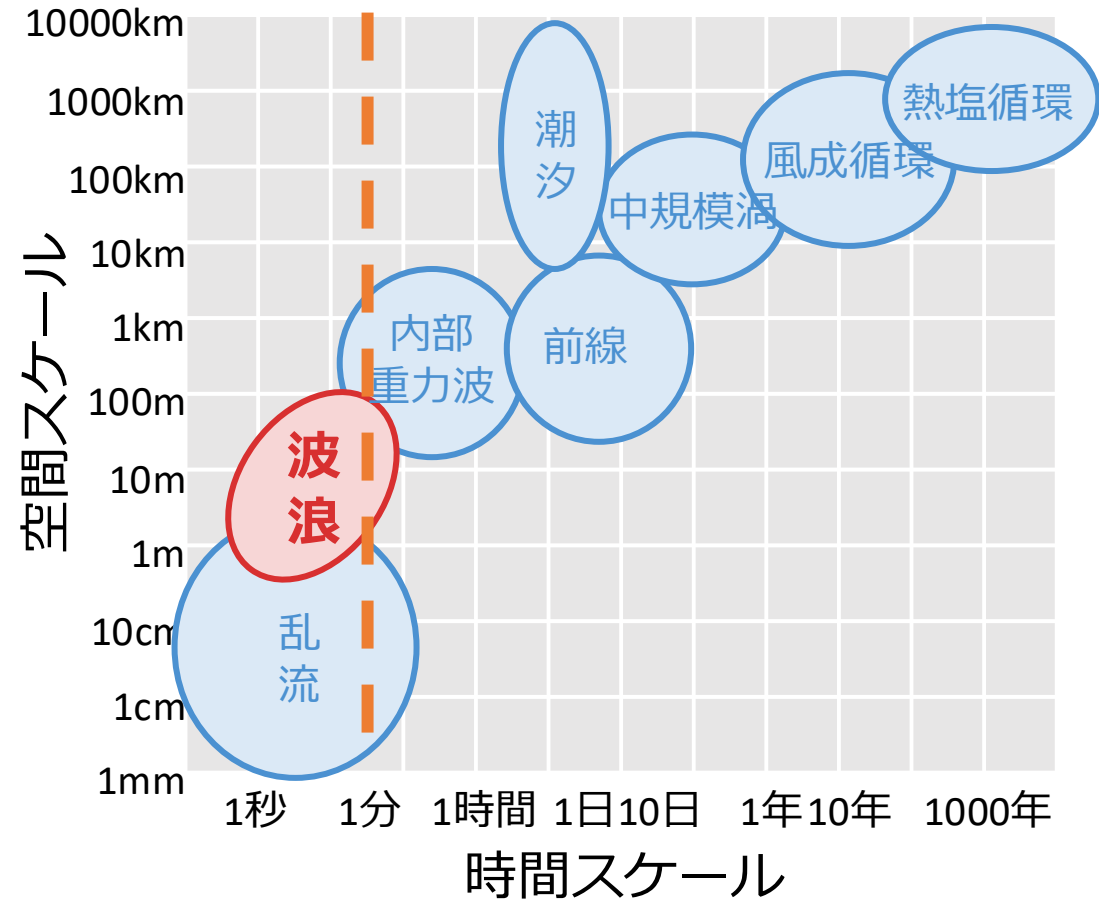
$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$$

流れ 波

波平均速度（流れ成分）の方程式

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}} = \dots - \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}$$

波は非線形項（レイノルズ応力）などを通して波平均流に力を及ぼす



波平均方程式系 [Craig and Leibovich 1976]

ラングミュア循環の説明のため導出、Craig-Leibovich (CL) 方程式とも

- オイラー平均渦度 $\bar{\omega}^E = \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^E$ (以下、上付文字Eを省略) に関して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} &= \nabla \times (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\omega}) + \nabla \times (\overline{\mathbf{u}' \times \omega'}) \rightarrow \text{スケーリング仮定をおき級数展開 (後述)} \\ &= \nabla \times (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\omega}) + \nabla \times (\mathbf{u}^{St} \times \bar{\omega}) = -\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\omega} - \mathbf{u}^{St} \cdot \nabla \bar{\omega} + \bar{\omega} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}^{St} \\ &\qquad\qquad\qquad \mathbf{u}^{St} \text{による移流} \qquad \mathbf{u}^{St} \text{による傾斜} \end{aligned}$$

式変形の中で ω' は $\bar{\mathbf{u}}$ の情報も含み、ストークス項は $O(\epsilon^4)$ までの精度

- 運動量方程式に直すと $\partial \bar{\mathbf{u}} / \partial t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla(p + \Pi) + \mathbf{u}^{St} \times \bar{\omega}$
 Π, \mathbf{u}^{St} とともに波の情報のみで
 外的に計算できる

ベルヌーイヘッド $O(\epsilon^2)$ 渦度力 $O(\epsilon^4)$

Craik-Leibovich渦度方程式の導出の概要 - 1 [Leibovich 1977]

基本設定

流速を渦なし軌道運動 \mathbf{u}_w と渦あり流 \mathbf{v} に分解し
時間スケール分離を仮定

$$\mathbf{u} = \epsilon \sigma k^{-1} [\mathbf{u}_w(x, t_f) + \delta \mathbf{v}(x, t_f, t_s)]$$

スケーリング: $\delta = \epsilon (\equiv ak), \epsilon^2 \partial_{t_s} = \partial_{t_f}$

渦度方程式の漸近級数展開

無次元化渦度 $\epsilon^2 \sigma \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \epsilon^2 \sigma \nabla \times \mathbf{v}$ について

$$\epsilon^2 \partial_{t_s} \boldsymbol{\omega} + \partial_{t_f} \boldsymbol{\omega} = \epsilon \nabla \times [(\mathbf{u}_w + \epsilon \mathbf{v}) \times \boldsymbol{\omega}]$$

ϵ について級数展開

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \epsilon \boldsymbol{\omega}_1 + \dots$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \epsilon \mathbf{v}_1 + \dots$$

級数展開続き

$$O(\epsilon^0): \partial_{t_f} \boldsymbol{\omega}_0 = 0 \text{ より } \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_0(x, t_s)$$

$$O(\epsilon^1): \partial_{t_f} \boldsymbol{\omega}_1 = \nabla \times (\mathbf{u}_w \times \boldsymbol{\omega}_0)$$

$\boldsymbol{\omega}_0$ が t_f 非依存なので、軌道運動に伴う変位

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t_f) = \int^{t_f} \mathbf{u}_w dt_f \text{ を用いて } \boldsymbol{\omega}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\omega}_0)$$

$$O(\epsilon^2): \partial_{t_s} \boldsymbol{\omega}_0 + \partial_{t_f} \boldsymbol{\omega}_2 = \nabla \times (\mathbf{u}_w \times \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0)$$

早い時間尺度 t_f について平均・偏差分解

$$(f(x, t_s, t_f) = \bar{f}(x, t_s) + f'(x, t_s, t_f)) \text{ すると}$$

$$\partial_{t_s} \bar{\boldsymbol{\omega}}_0 = \nabla \times (\overline{\mathbf{u}_w \times \boldsymbol{\omega}_1} + \bar{\mathbf{v}}_0 \times \bar{\boldsymbol{\omega}}_0)$$

波の残差的効果

Craik–Leibovich渦度方程式の導出の概要 - 2 [Leibovich 1977]

渦度力

$$\nabla \times (\overline{\mathbf{u}_w \times \boldsymbol{\omega}_1}) = -\nabla \times (\overline{\boldsymbol{\xi} \times \partial_{t_f} \boldsymbol{\omega}_1}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \partial_{t_f} \boldsymbol{\omega}_1 - \partial_{t_f} \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}$$

となるが、 $\partial_{t_f} \boldsymbol{\omega}_1 = \nabla \times (\mathbf{u}_w \times \boldsymbol{\omega}_0) = -\mathbf{u}_w \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_w$ より、(下付き文字0, wを略して)

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\overline{\mathbf{u}_w \times \boldsymbol{\omega}_1})]_i &= [\overline{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla (-\mathbf{u}_w \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_w)} - \overline{(-\mathbf{u}_w \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_w) \cdot \nabla \boldsymbol{\xi}}]_i \\ &= -\overline{\xi_j \partial_j u_k} \partial_k \bar{\omega}_i - \underbrace{\overline{\xi_j u_k} \partial_j \partial_k \bar{\omega}_i}_{=0} + \overline{\xi_j \partial_k u_i} \partial_j \bar{\omega}_k + \underbrace{\overline{u_k \partial_j \xi_i} \partial_k \bar{\omega}_j}_{=0} + \overline{\xi_j \partial_j \partial_k u_i} \bar{\omega}_k - \overline{\partial_k u_j \partial_j \xi_i} \bar{\omega}_k \\ &= -\overline{\xi_j \partial_j u_k} \partial_k \bar{\omega}_i + \partial_k (\overline{\xi_j \partial_j u_i}) \bar{\omega}_k \\ &= [-\overline{(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u}_w} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\omega}}_0 + (\bar{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \nabla) \overline{(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u}_w}]_i = [-\mathbf{u}^{\text{St}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\omega}}_0 + (\bar{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{St}}]_i \end{aligned}$$

ここでストークスドリフトの定義 $\mathbf{u}^{\text{St}} = \overline{(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{u}_w}$ ($O(\epsilon^2)$ の量) を用いた。

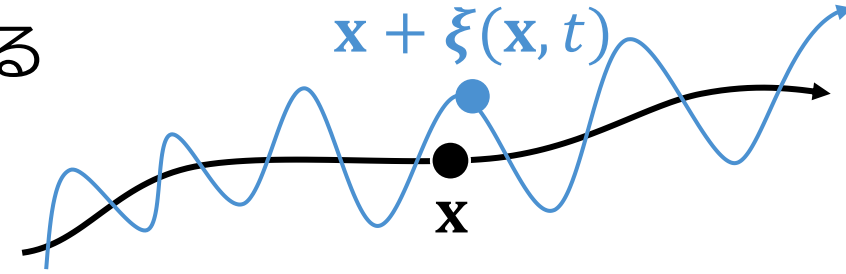
したがって、

$$\begin{aligned} \partial_{t_s} \bar{\boldsymbol{\omega}}_0 &= \nabla \times (\overline{\mathbf{u}_w \times \boldsymbol{\omega}_1} + \bar{\mathbf{v}}_0 \times \bar{\boldsymbol{\omega}}_0) \\ &= -\mathbf{u}^{\text{St}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\omega}}_0 + (\bar{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{St}} - \mathbf{u}^{\text{St}} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\omega}}_0 + (\bar{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}^{\text{St}} = \nabla \times (\mathbf{u}^{\text{St}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}_0 + \bar{\mathbf{v}}_0 \times \bar{\boldsymbol{\omega}}_0) \end{aligned}$$

一般化ラグランジュ平均理論 [Andrews and McIntyre 1978, Leibovich 1980]

特定のスケーリング仮定や微小振幅仮定に依らず、
ラグランジュ平均流と波の相互作用を**厳密に**定式化できる

スケーリング仮定をおかずに渦度力を導出できる



- 平均的に \mathbf{x} に位置する流体粒子の
擾乱による変位 $\xi(\mathbf{x}, t)$ で “lifting map” を定義し、
ラグランジュ平均を $\overline{\mathbf{u}^L}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}^\xi} = \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x} + \xi(\mathbf{x}, t), t)}$ と定義
- 擾乱に伴う擬運動量 $\mathbf{p} \equiv -\nabla \xi \cdot \mathbf{u}^\xi$ を定義；
水面波についてリーディングオーダーで $\mathbf{u}^{\text{St}} = \overline{\xi \cdot \nabla \mathbf{u}^L}$ と一致

一般化ラグランジュ平均理論 [Andrews and McIntyre 1978, Leibovich 1980]

$\bar{\mathbf{u}}^L$ に関する平均流方程式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}^L \cdot \nabla \right) (\bar{\mathbf{u}}^L - \mathbf{p}) - \nabla \bar{\mathbf{u}}^L \cdot \mathbf{p} + \nabla \overline{(\dots)} = 0$$

$\mathbf{p} = \mathbf{u}^{\text{St}}, \bar{\mathbf{u}}^L = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{\text{St}}$ を用いるとCL方程式と整合

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \right) \bar{\mathbf{u}} + \underbrace{\mathbf{u}^{\text{St}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^{\text{St}}}_{= -\mathbf{u}^{\text{St}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}})} + \nabla \overline{(\dots)} = 0$$

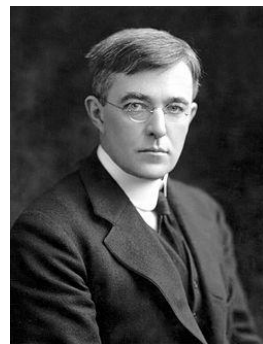
渦度力

Craik and Leibovich [1976] の級数展開に基づく導出よりシンプル・一般的

●擬運動量 \mathbf{p} やポテンシャル力の計算には結局波運動の知識が必要

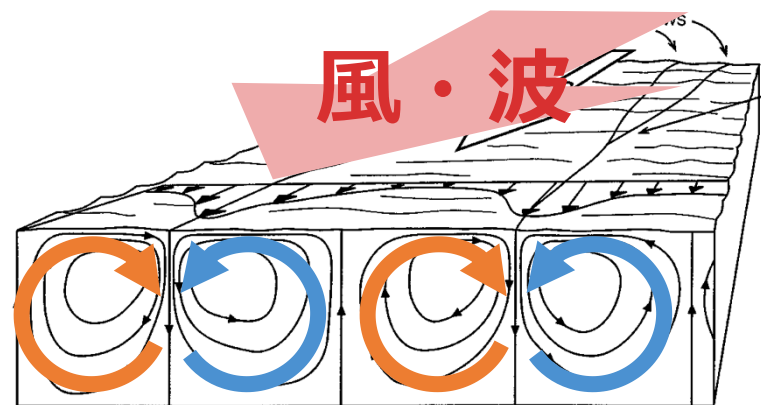
ラングミュア循環 [Langmuir 1938]

- 風・波の向きに沿ったロール状循環
浮遊物が筋状に集積し可視化される
 - 効率よく表層混合 [Langmuir 1938, Smith 1992]
 - 長らくメカニズムが不明だった [Leibovich 1983]
 - 熱対流？
 - 気側ストリーク？
 - エクマン流の不安定？
- etc.
- CL方程式に基づくメカニズムが特徴を再現



“On August 7, 1927, when about 600 miles from New York on an Atlantic crossing to England I noticed that there were large quantities of floating seaweed, most of which was arranged in parallel lines with a somewhat irregular spacing ranging from 100 to 200 meters. ...”

Langmuir [1938]



Thorpe [2004]

CL方程式の線形安定性 - 1

x方向に風が吹き波が伝わる場に対する擾乱を考える。x方向一様を仮定 ($\partial_x = 0$)

基本場： $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}(z), 0, 0)$, $\mathbf{u}^{St} = (u^{St}(z), 0, 0)$, $\bar{\boldsymbol{\omega}} = (0, \partial_z \bar{u}, 0)$

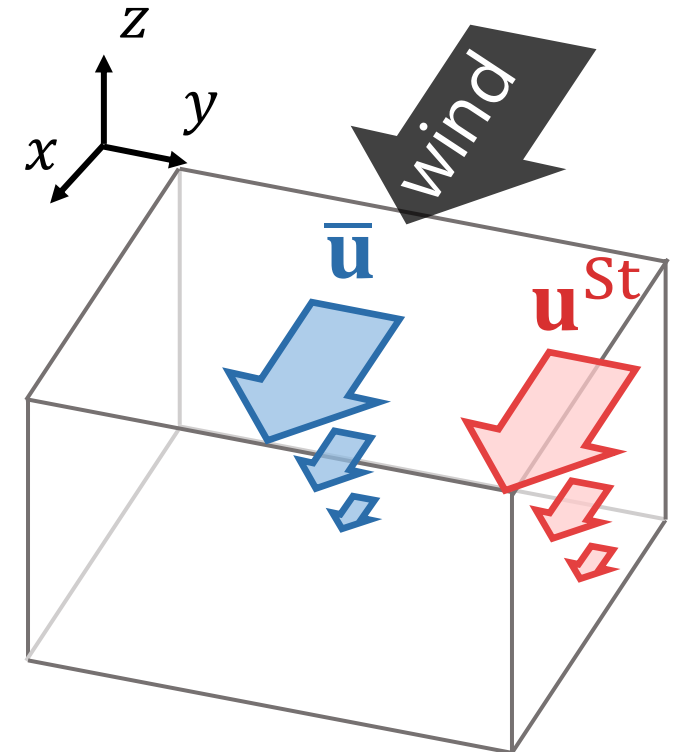
(上付き線 $\bar{(\cdot)}$ は波平均ではなく基本場)

$\partial_y v' + \partial_z w' = 0$ より擾乱場にy-z面内流線関数を導入： $(u', v', w') = (u', -\partial_z \psi', \partial_y \psi')$

擾乱方程式：

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} = \bar{\omega}_y \partial_y u' - \partial_y u' (\partial_z \bar{u} + \partial_z u^{St})$$
$$= -\partial_y u' \partial_z u^{St}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\partial_y \psi' \partial_z \bar{u}$$



CL方程式の線形安定性 - 2

擾乱方程式：

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} = -\partial_z u^{\text{St}} \partial_y u', \frac{\partial u'}{\partial t} = -\partial_z \bar{u} \partial_y \psi' \rightarrow \frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} = (\partial_z u^{\text{St}} \partial_z \bar{u}) \partial_y^2 \psi'$$

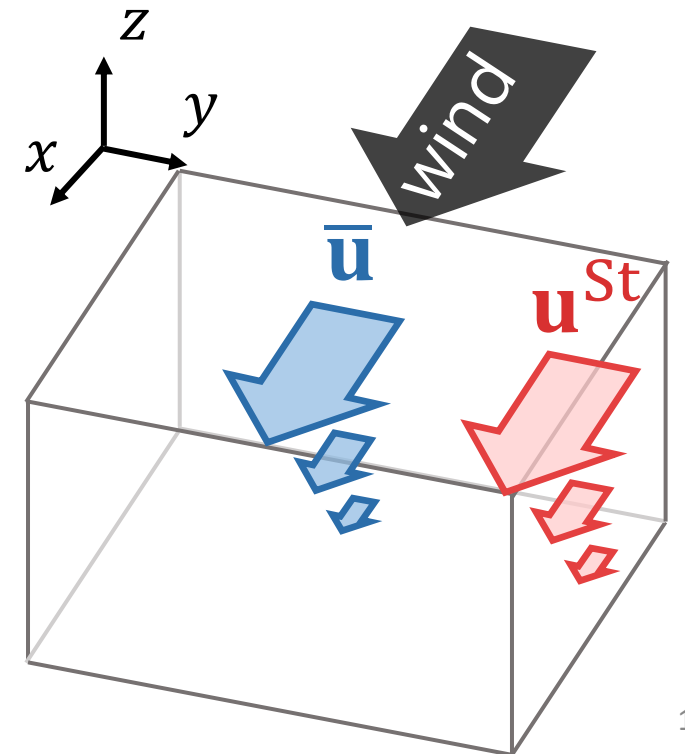
$\psi' = \hat{\psi}(t) e^{i(l y + m z)}$ を代入すると、

$$\frac{d^2 \hat{\psi}}{dt^2} = (\partial_z u^{\text{St}} \partial_z \bar{u}) \frac{l^2}{l^2 + m^2} \hat{\psi}$$

したがって、 $\partial_z u^{\text{St}}$ と $\partial_z \bar{u}$ の符号が同じであれば不安定
 x 方向に沿ったロール状循環が生じる

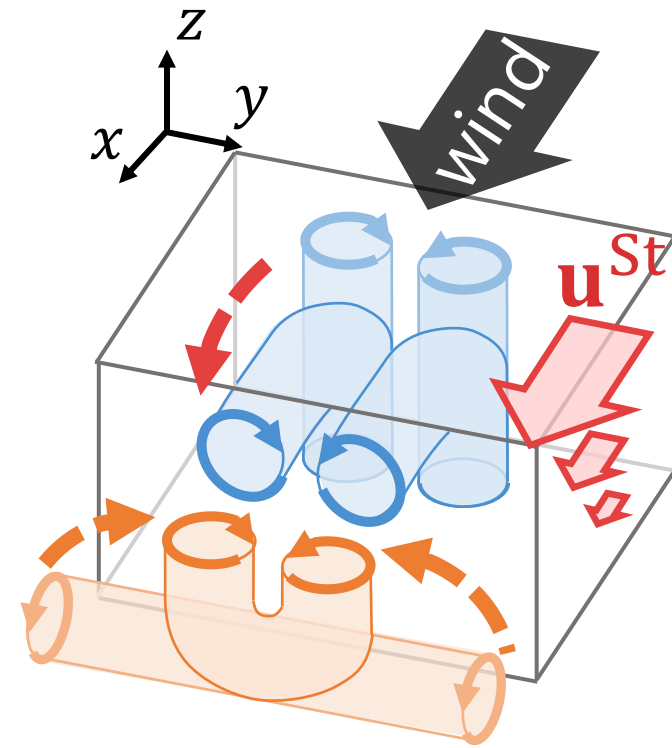
(3次元に一般化 $\rightarrow \partial_z \bar{u} \cdot \partial_z u^{\text{St}} > 0$ なら不安定)

CL2不安定機構 と呼ばれる [Leibovich 1983]



CL2不安定機構 – 運動学的理解

- 風と波の方向が同じで、風成シア流に伴う直交成分渦度 ($\partial \bar{u} / \partial z$) が基本場として存在
- 鉛直渦度が波 ($\partial u^{St} / \partial z$) により傾斜 → 風下向き渦
- 風下向き渦が風成渦度を鉛直に傾斜
- 元の鉛直渦度の正負パターンと整合、正のフィードバック



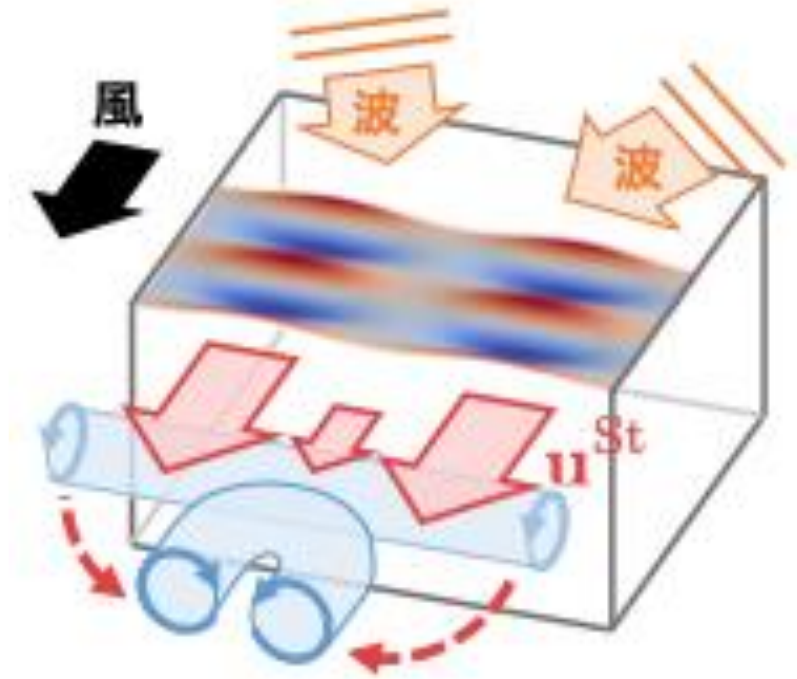
自然な条件（風・波が同方向、水平一様なストークスドリフト場）で発生
観測されるラングミュア循環の特徴を定性的・定量的に再現

→ 現在ではラングミュア循環の主要なメカニズムと考えられている

ちなみに：CL1機構とは

Craik and Leibovich [1976]で初めに提案されたメカニズム

- 同じ方向・交差する波が干渉により水平非一様なストークスドリフトを形成
- 風成シア流の渦度を傾斜 ($\bar{\omega}_y \partial_y u^{St}$) することで風下方向に沿ったロール循環を形成
- 2成分の位相が長期間固定される必要があることに加え多成分の組み合わせがロバストな空間非一様構造を維持するとは考えづらいため、受け入れられなかった



乱流運動エネルギー (TKE) 収支式

$$\text{CL方程式 } \partial_t u_i = -u_j \partial_j u_i - \partial_i \Pi + \partial_j (v \partial_j u_i) + u_j^{\text{St}} \partial_i u_j - u_j^{\text{St}} \partial_j u_i \quad \dots \text{(A)}$$

時間・水平平均を $\overline{(\cdot)}(z)$ 、偏差を $(\cdot)'(x, y, z, t)$ と表記。波は水平一様 ($\bar{\mathbf{u}}^{\text{St}} = \mathbf{u}^{\text{St}}$)

$\bar{u}_i \times \overline{\text{(A)}}$ より、平均運動エネルギー(MKE)方程式

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) = -\partial_z \left[\bar{u}_j \overline{u_j' w'} - v \partial_z \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i^2 \right) \right] + \overline{u_j' w'} \partial_z \bar{u}_j - v (\partial_z \bar{u}_j)^2$$

$u_i \times \overline{\text{(A)}} - \bar{u}_i \times \overline{\text{(A)}}$ より、乱流運動エネルギー(TKE)方程式

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \right) = -\partial_z \left[\frac{1}{2} \overline{u_i'^2 w'} + \overline{\Pi' w'} - v \partial_z \left(\frac{1}{2} \overline{u_i'^2} \right) \right] - \overline{u_j' w'} \partial_z \bar{u}_j - \overline{u_j' w'} \partial_z u_j^{\text{St}} - v \overline{(\partial_j u_i')^2}$$

ストークス生成項：ラングミュア循環に伴うTKE生成、波→乱流のエネルギー変換

[McWilliams et al. 1997, Ardhuin and Jenkins 2006, Suzuki and Fox-Kemper 2016]

ラグランジュ平均流についての運動エネルギー収支式

ラグランジュ平均流速 $\mathbf{u}^L = \mathbf{u} + \mathbf{u}^{St}$ についての式 [Holm 1996, Suzuki and Fox-Kemper 2016]

(CL方程式の両辺に $\partial_t \mathbf{u}^{St}$ を加え、いくらか変形して得られる)

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}^L &= -\mathbf{u}^L \cdot \nabla \mathbf{u}^L - (\nabla \times \mathbf{u}^{St}) \times \mathbf{u}^L - \nabla p + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + \partial_t \mathbf{u}^{St} \dots \text{(B)} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^L &= 0 \end{aligned}$$

(B) $\cdot \mathbf{u}^L$ よりエネルギー方程式が得られる

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}^L|^2 \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}^L|^2 + p \right) \mathbf{u}^L \right] + (\text{visc}) + \mathbf{u}^L \cdot \partial_t \mathbf{u}^{St}$$

➤ \mathbf{u}^L のエネルギー収支では、波からのエネルギーは $\mathbf{u}^L \cdot \partial_t \mathbf{u}^{St}$ を通して入る

✓ 定常な波は流れのエネルギーを変えない [Wagner et al. 2021, Czeschel and Eden 2023]

✓ CL2不安定は $|\mathbf{u}^L|^2 / 2$ の中での再分配

➤ 渦粘性が作用するのは \mathbf{u}^L か \mathbf{u} か? [Li 2026]

CL方程式の数値計算

- 1980s～90s前半：2次元計算の深化

- 成層影響、セル構造、...

- Leibovich and Paolucci [1980]

Li and Garrett [1993]

- 90s後半～00s前半：3次元LES

- 「ラングミュア乱流」

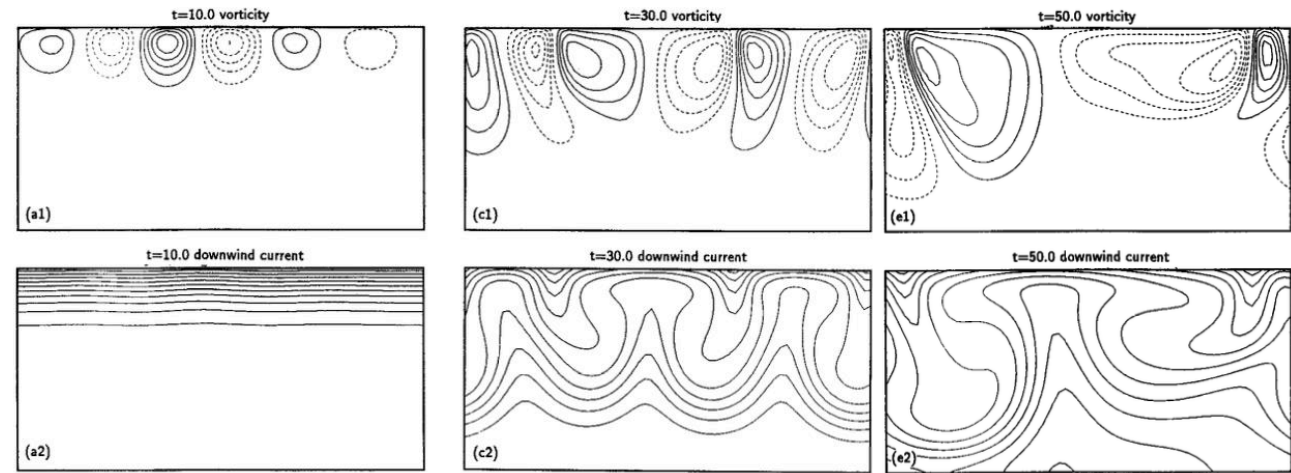
$$La_t = [u_* / u^{St}(0)]^{1/2}$$

- Skillingstad and Denbo [1995]

McWilliams et al. [1997]

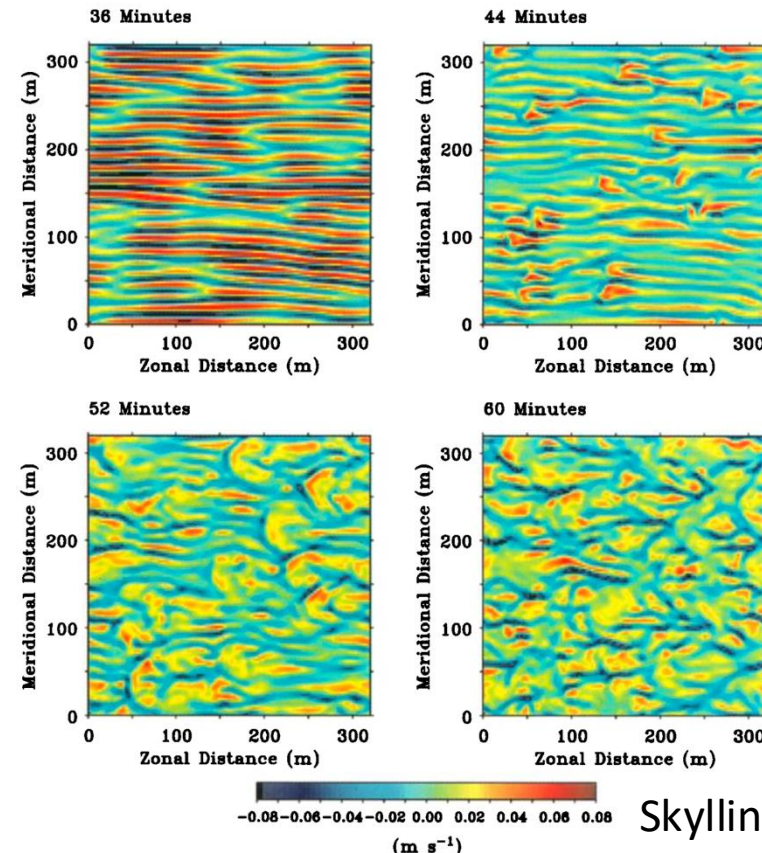
- 10s～：大気海洋システムでの役割

乱流モデル開発・GCM実装



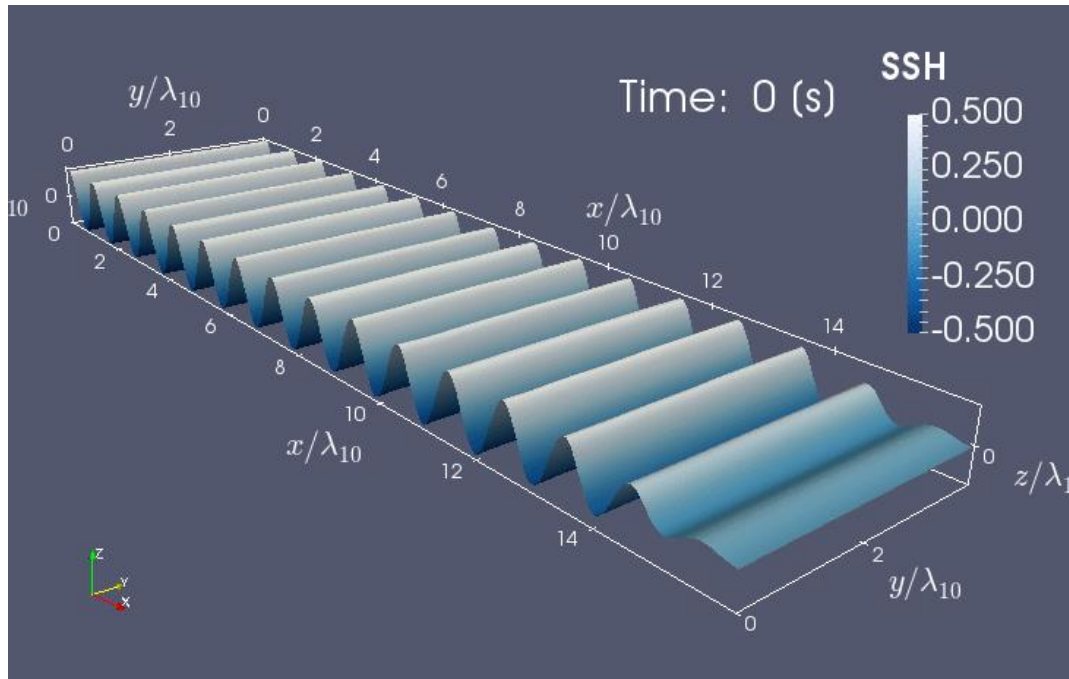
Case MILDEX, Initial Growth
Vertical Velocity at 5 m Depth

Li and Garrett [1993]

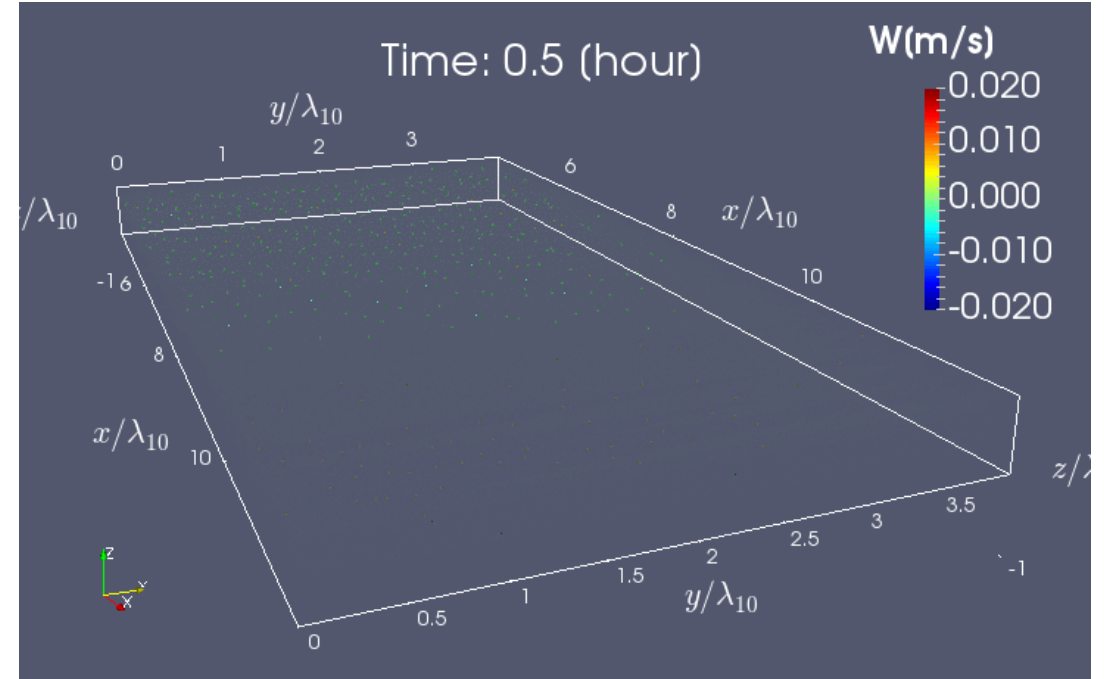


Skillingstad and Denbo [1995]¹⁵

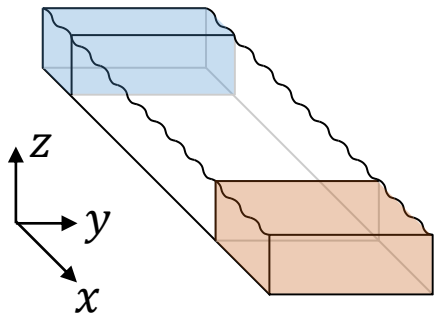
波解像数値計算で再現 [Fujiwara et al. 2018]



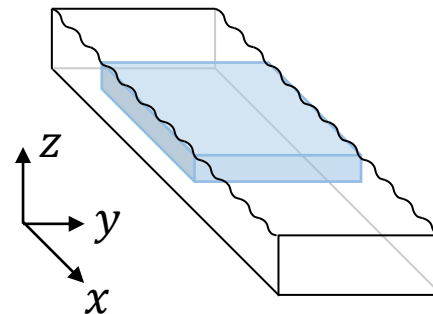
水面変位（強調）



波周期平均した鉛直流速 \bar{w}

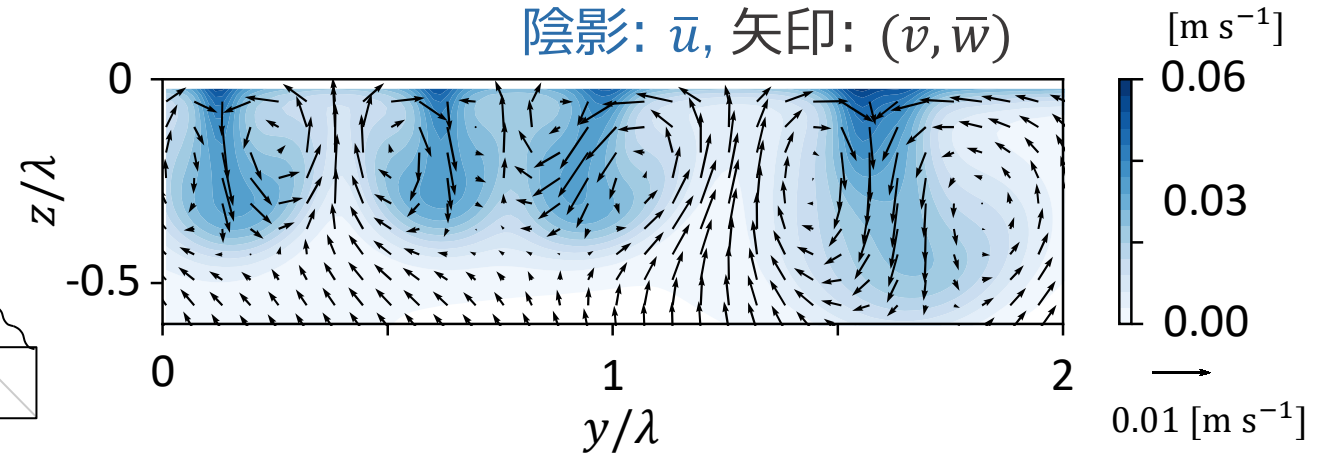
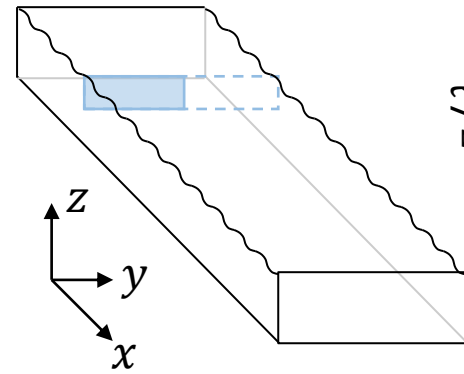


- 海洋モデルKINACO
- スポンジ層で波を強制
- 波と同じ方向に風応力



- 2D循環 → 3D乱流化
- 波なしでは発生せず

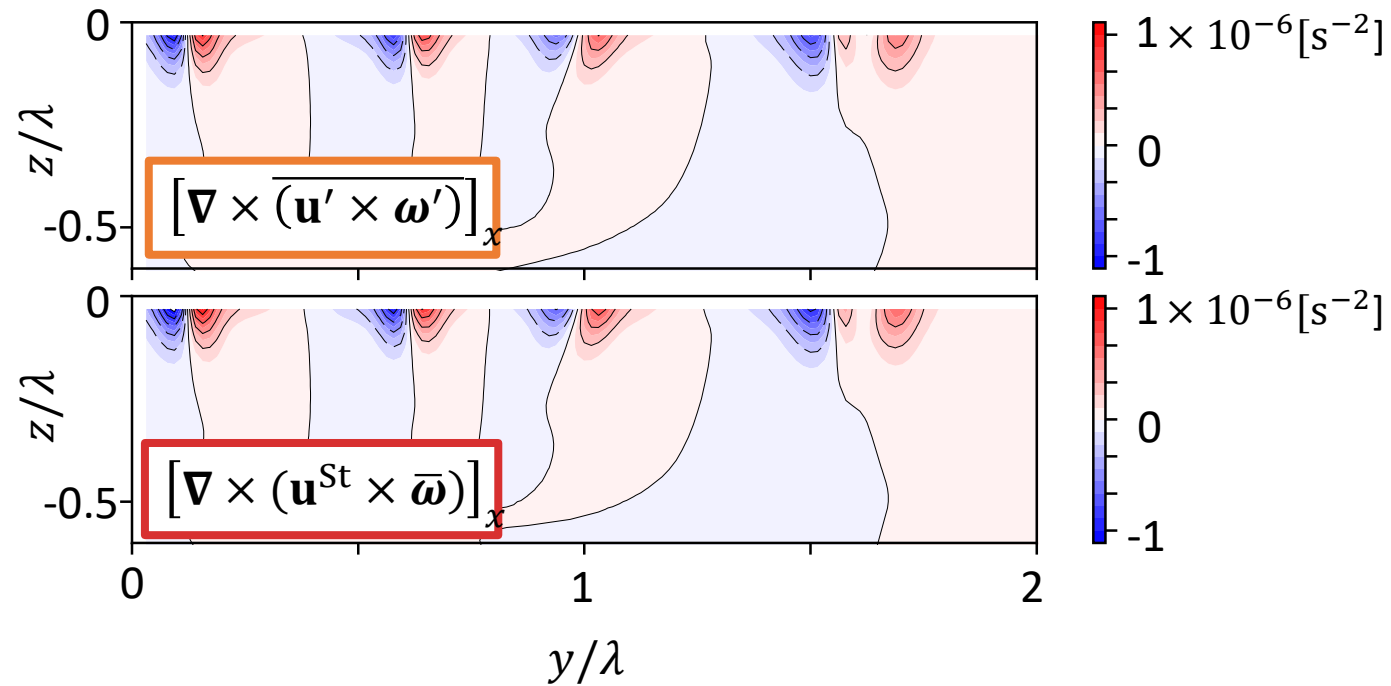
波解像数値計算で渦度力を検証 [Fujiwara et al. 2018]



x成分渦度の収支解析：
波の残差的効果（レイノルズ応力）によるトルクが循環を強制

渦度力は波成トルクを非常によく表現

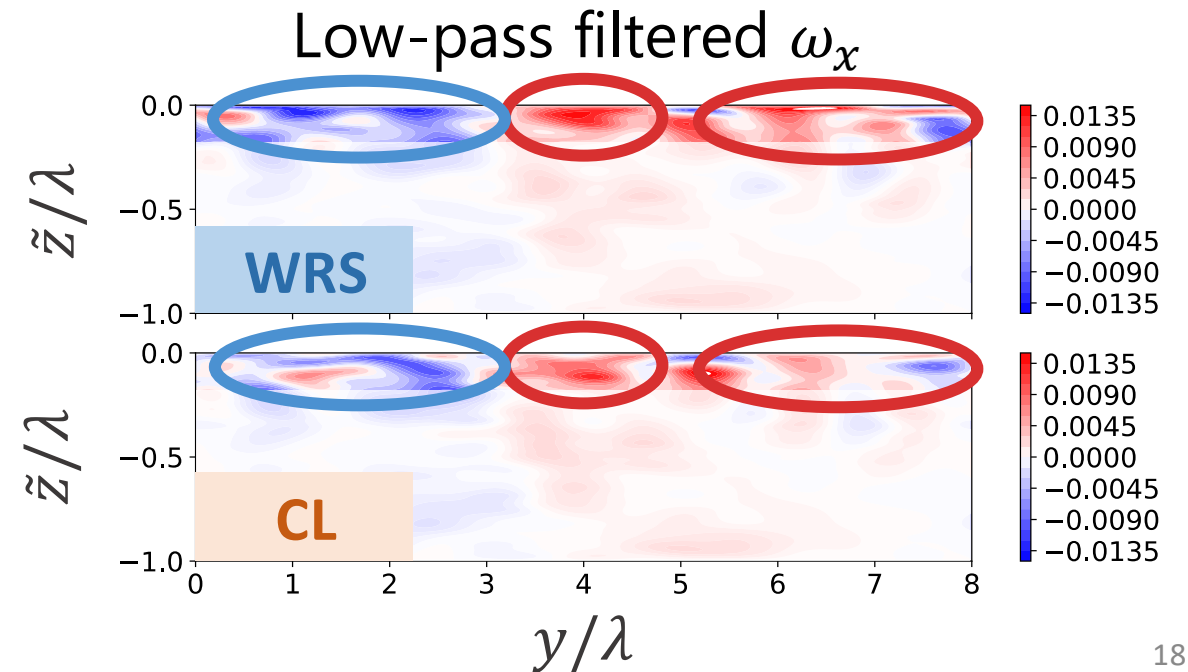
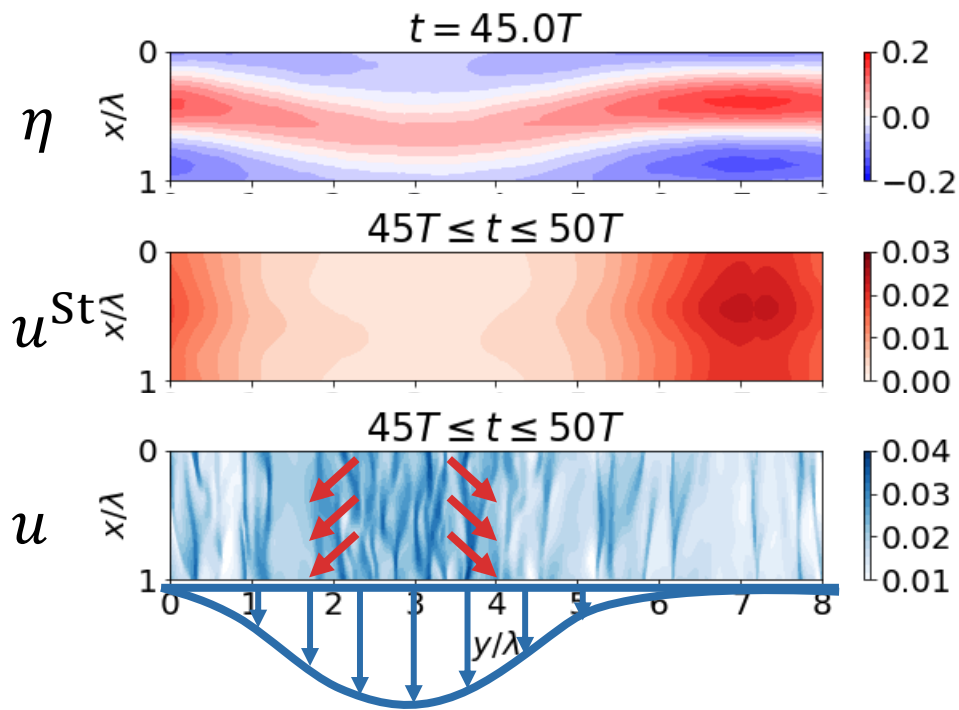
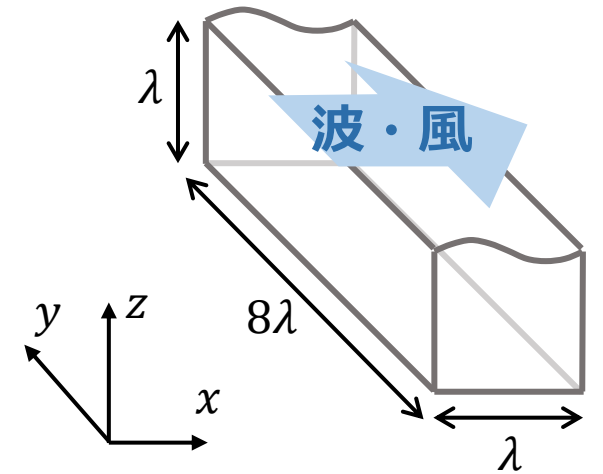
➤ CL理論に対する疑義 [e.g., Mellor 2016]
に対しエビデンス



波と流れの双方向相互作用 [Fujiwara and Yoshikawa, 2020]

- 周期境界での自由伝播設定、ラングミュア循環発達
- u_*/c_p 大 (若い波) \rightarrow 流れによる波の散乱、振幅変調
- 対応するCL方程式でも双子実験：循環を過小評価

流れから波への効果によってCL2機構以上に循環が強化？



流れ→波影響による自己強化機構 [Fujiwara and Yoshikawa, 2020]

渦度収支解析の結果：

既存の循環による風下向ジェット流が波を振幅変調

u^{St} の水平シアが吹送流の渦度を傾斜、元の循環を強化する

●CL1機構 [CL1976] と類似

しかし u^{St} の水平変化は二成分の偶然的な位相差ではなく
既存循環の構造から自発的に生じる

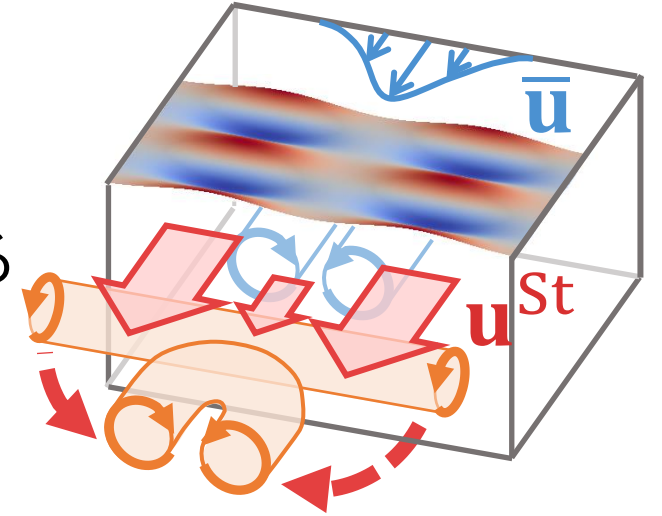
●フルード数 $u_{*,w}/c_p \propto (c_p/u_{*,a})^{-1}$ が大きいとき変調効果大

若い波の状況や、不規則波のもとでの水面付近の混合見積もりに影響？

●観測で整合的な波高変調を確認 [Scully and Zippel 2024]

波群への応答（次回）を差し引いた流れがLC状循環

●波の散乱を考慮した不安定理論 [Vergeles and Vointsev 2024, 2026]



Langmuir Turbulence Mixed Parameterization

Mixed parameterization correction is actively being performed

➤ L_a dependent to increase eddy diffusion coefficient or velocity scale [e.g., Li et al. 2016]

➤ Bias improvement is seen, but uncertainty is still large

スキームごとの
MLD相対誤差 Li et al. [2019]

夏季MLD誤差[m] Treguier et al. [2023]
(a) NCAR-POP

