

# 波浪と波・流れ相互作用

藤原 泰 (fujiwara@port.kobe-u.ac.jp)

神戸大学大学院海事科学研究科

# アウトライン

波浪と海洋表層流の相互作用過程を  
自分の研究を交えつつ概説

## ●波浪について

- 水面波と海洋波
- 波浪の記述・モデリング

## ●波・流れ相互作用 (1)

- 波平均方程式の理論
- ラングミュア循環について

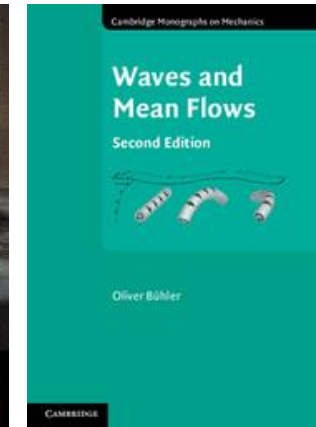
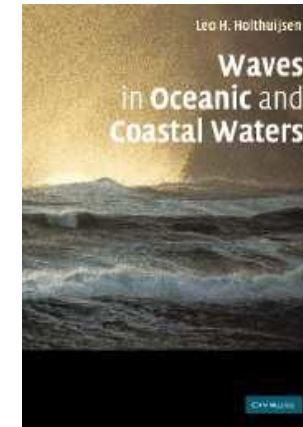
## ●波・流れ相互作用 (2)

- 非一様な波構造への流れの応答
- コリオリ・ストークスカとエクマン流の変化

## 参考文献

- Holthuijsen, Leo H. [2010]. *Waves in Oceanic and Coastal Waters*. Cambridge University Press.
- Bühler, O. [2014]. *Waves and Mean Flows*. Cambridge University Press.
- 相木秀則. [2018]. 海の波と渦と平均流: 相互作用理論の背景と展望. 気象研究ノート, (235).

など



# 波浪について

- 水面波と海洋波
- 波浪の記述・モデリング



# 水面波と海洋波

●**水面波**：重力（および表面張力）を復元力として、水面の凹凸が伝わる波動現象

➤一旦発生した波の**伝播**法則

➤19世紀の流体力学の成果

Airy, Stokes, ...

●**波浪（海洋波）**：海や湖で起こる、風を起源とする水面波

➤風と結びつき、複雑に**成長・衰退**：  
理論的記述の困難

➤研究が進んだのは20世紀中盤以降  
Sverdrup, Munk, ...



# 水面波の基礎理論 - 1

微小振幅仮定で線形化したオイラー方程式 (上端自由表面、x-z 2次元、深水条件)  
渦なし条件のもと

$$\begin{aligned}\partial_t u &= -\partial_x p \\ \partial_t w &= -\partial_z p - g \\ \partial_x u + \partial_z w &= 0 \\ \partial_t \eta &= w, p = g\eta \text{ at } z = 0 \\ w &= 0 \text{ at } z = -\infty\end{aligned}$$



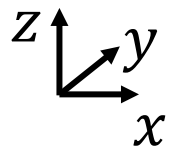
偏波関係

$$\begin{aligned}\eta &= a \cos(kx - \sigma t) \\ u &= a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t) \\ w &= a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t)\end{aligned}$$

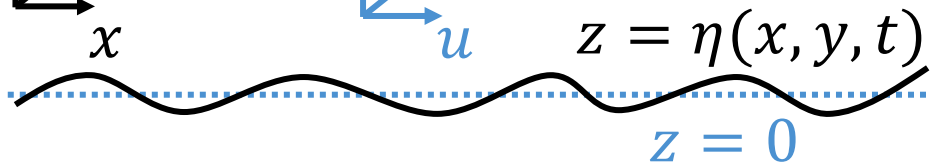
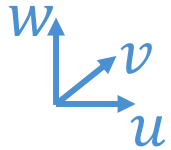
分散関係

$$\sigma = \sqrt{gk}$$

デカルト座標



速度



波長  $\lambda$ , 波数  $k = 2\pi/\lambda$

周期  $T$ , 周波数  $f = 1/T$ , 角周波数  $\sigma = 2\pi/T$

位相速度  $c_p$ , 群速度  $c_g$

# 水面波の基礎理論 - 2

## 分散関係の特徴

### ●分散性

$$\sigma = \sqrt{gk}, c_p = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

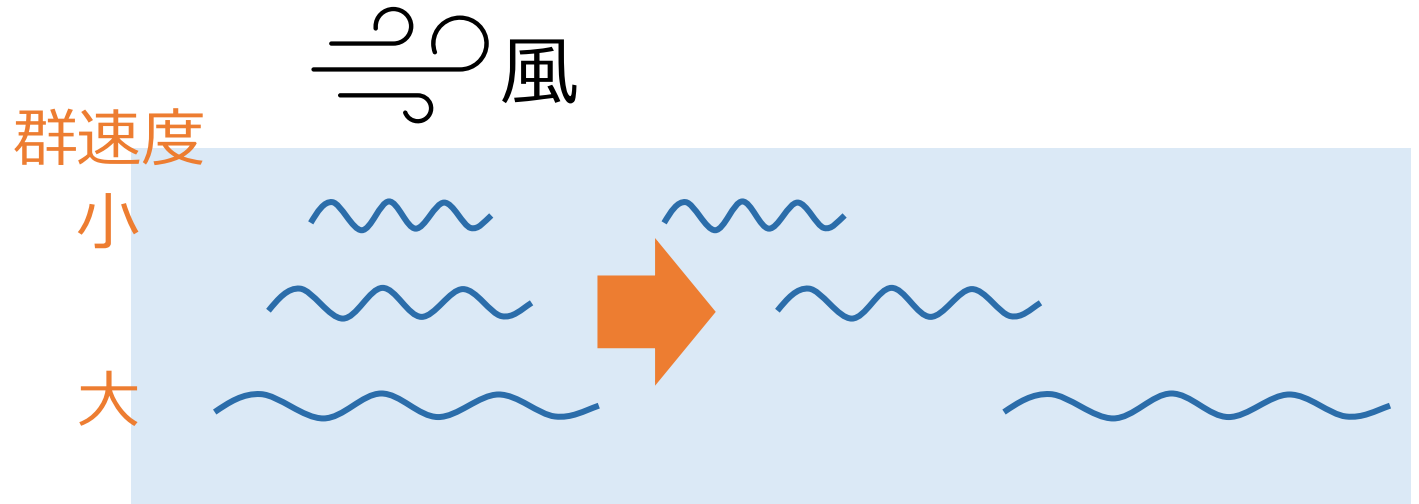
$$c_g = \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{c_p}{2}$$

### ●水平等方性

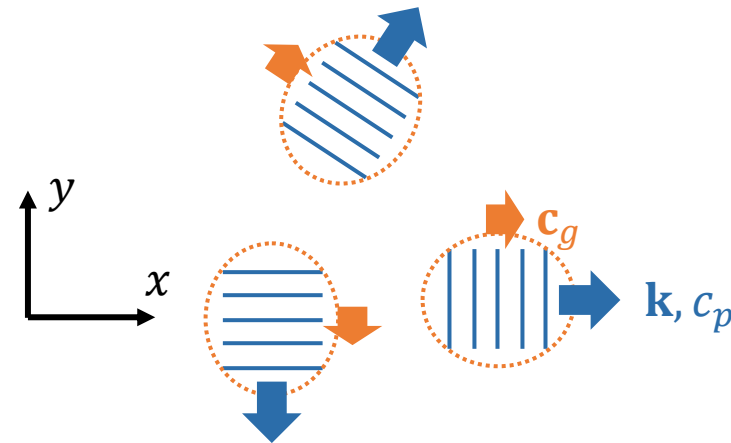
3次元問題、 $\mathbf{k} = k(\cos \theta, \sin \theta)$  のとき

$$\sigma = \sqrt{gk}, c_p = \sqrt{g/k}, c_g = \sqrt{g/k}/2$$

$$\mathbf{c}_g = c_g(\cos \theta, \sin \theta)$$



周期・波長の長い波ほど速く伝わる



等方的かつ波数・位相速度・群速度の方向が一致

## 水粒子の軌道運動 (Orbital motion)

$$u(x, z, t) = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$$

$$w(x, z, t) = a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$$

$t = 0$ で $x = x_0$ にある水粒子の位置 $x_p(t)$ は  
 $|x_p - x_0| \ll k^{-1}$ の仮定のもと、

$$x_p(t) - x_0 = \int_0^t u(x_p, z_p, t') dt'$$

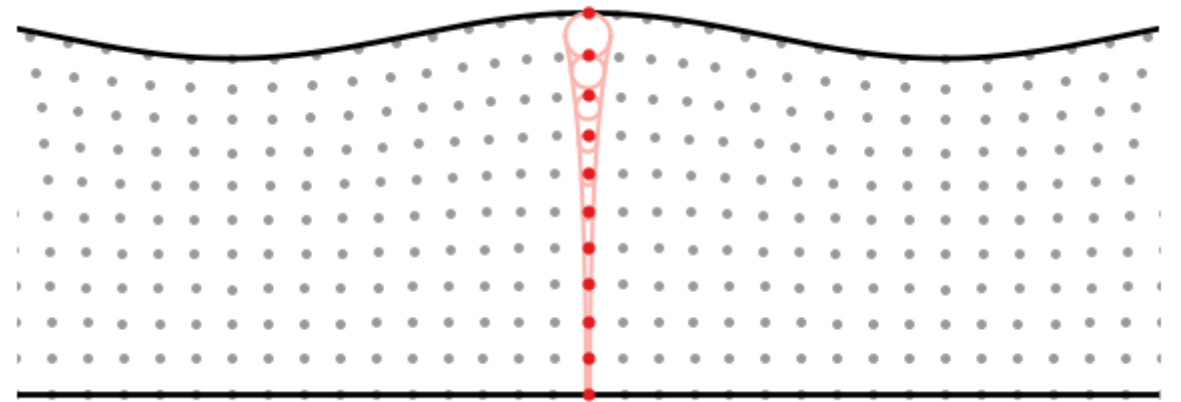
$$= \int_0^t u(x_0, z_0, t') dt' + O(a^2 k \sigma t)$$

$$\approx -a e^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t)$$

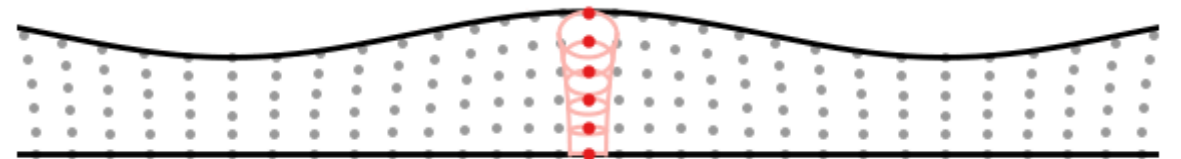
$$z_p(t) - z_0 \approx a e^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t)$$

→ 円運動、深さと共に指数的に減衰

水深が深い場合 (深水波)



水深が浅い場合 (浅水波)

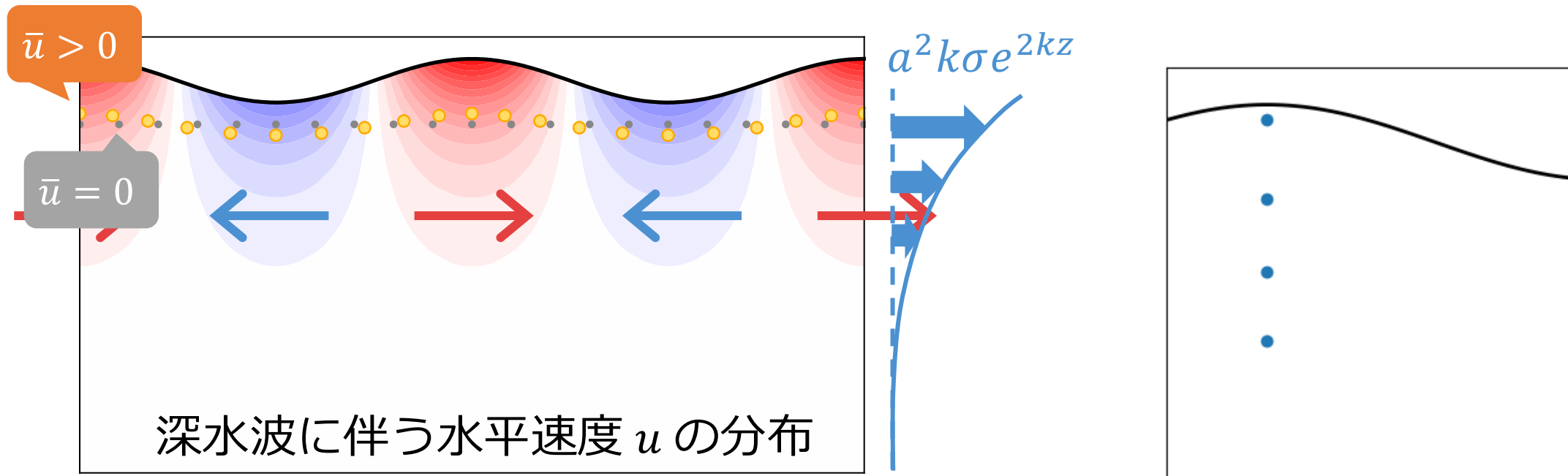


# 水粒子の平均運動 = ストークスドリフト [Stokes, 1847]

波周期で平均 ( $\overline{(\cdot)}$ と表記) した水粒子の運動,  $O(a^2)$ まで

$$\begin{aligned} u^{\text{St}} &= \overline{u(\mathbf{x}_p, t)} = \overline{u(\mathbf{x}_0, t)} + \overline{(x_p - x_0)\partial_x u(\mathbf{x}_0, t)} + \overline{(z_p - z_0)\partial_z u(\mathbf{x}_0, t)} + O(a^3 k^2 \sigma) \\ &= 0 + a^2 k \sigma e^{2kz} \overline{\sin^2(kx - \sigma t)} + a^2 k \sigma e^{2kz_0} \overline{\cos^2(kx - \sigma t)} \\ &= a^2 k \sigma e^{2kz_0} + O(a^3 k^2 \sigma) \end{aligned}$$

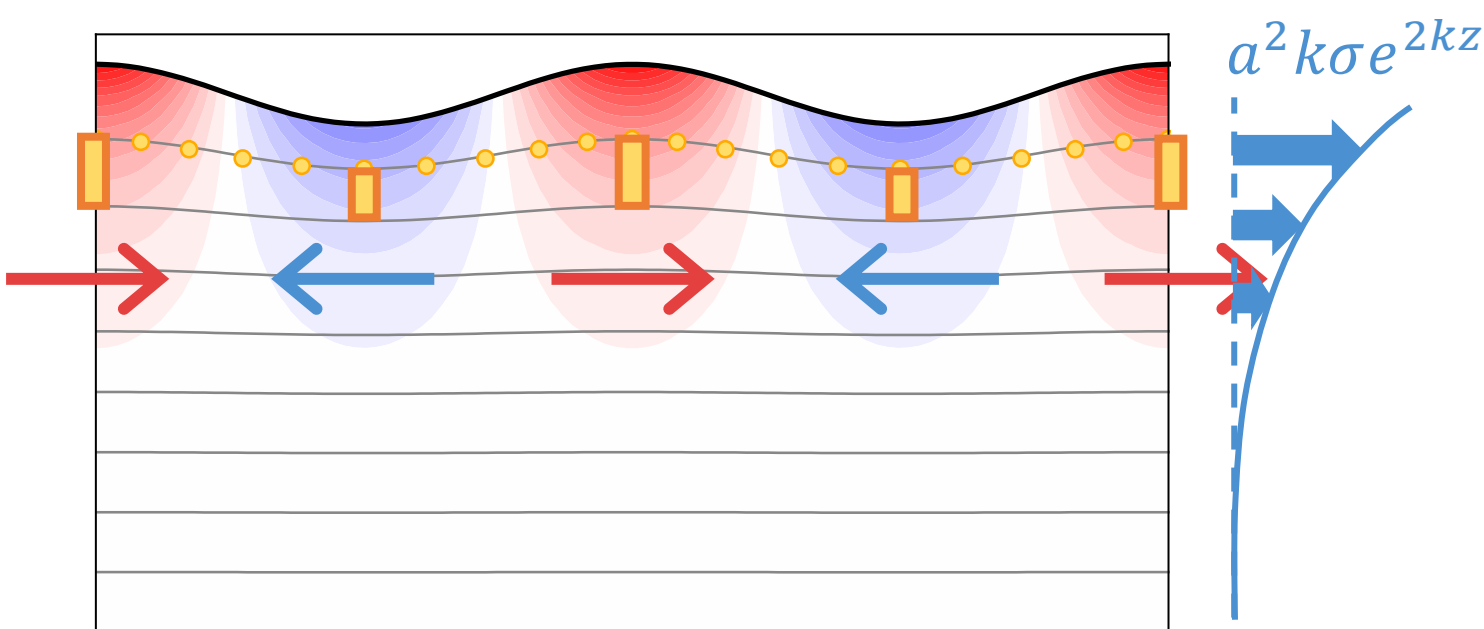
$$w^{\text{St}} = \overline{w(\mathbf{x}_p, t)} = 0 + O(a^3 k^2 \sigma)$$



## 別の見方：層厚重み付け速度 [Longuet-Higgins 1969]

鉛直層厚重み付け平均  $\overline{hu}$  (hは物質面の層厚) は、質量輸送に相当

- ▶水深積分すると、全輸送  $\overline{\int_{-H}^{\eta} u dz}$  になる
- ▶リーディングオーダーでラグランジュ平均流と同一視できる
- ▶深さに分けると、**前進部**で (**厚い+上変位**) → 海水は正味で前進



$$u(x, z, t) = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t) + O(a^2 k\sigma)$$

$$\delta z(x, z, t) = a e^{kz} \cos(kx - \sigma t) + O(a^2)$$

$$h(x, z, t) = \partial(z + \delta z) / \partial z$$

$$= 1 + a k e^{kz} \cos(kx - \sigma t) + O(a^2 k^2)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^L &= \overline{h(x, z + \delta z, t) u(x, z + \delta z, t)} \\ &= \bar{u}^E + \overline{(\partial(\delta z) / \partial z) u} + \overline{\delta z (\partial u / \partial z)} \\ &= \bar{u}^E + a^2 k \sigma e^{2kz} + O(a^3 k^2 \sigma) \end{aligned}$$

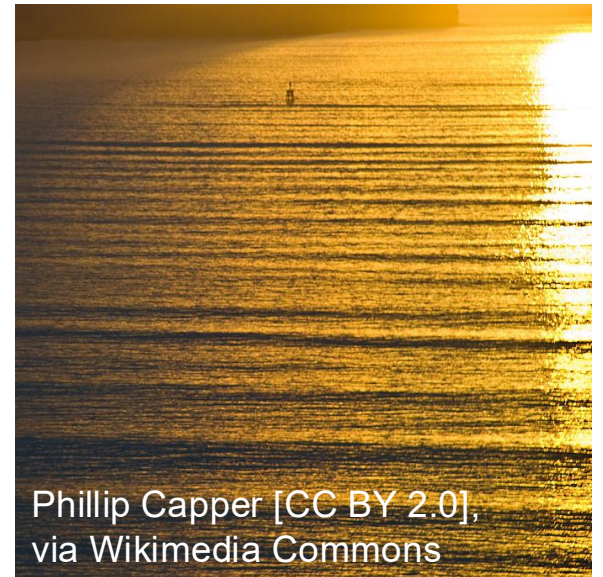
$$u^{St} = a^2 k \sigma e^{2kz}$$

# 波浪（海面波） = 風で起こる水面波

- 風波（波長 数mm～数100m; 周期0.1～10秒）  
海洋上の風により生じる水面波  
いろんな周期・周期が重なり合い、複雑な水面
- うねり（波長 数10m～数100m; 周期10秒～20秒）  
風波発生源の風域から抜けたときの水面波  
一般に長周期で、なだらかで正弦波に近い

複雑な波況をどう定量化する？

- ▶有義波高 $H_s$ ・有義波周期 $T_s$ ：一定期間の個々の波で  
波高が高いほうから1/3の波高・周期の平均  
→ 目視観測の波高や周期に近い



Phillip Capper [CC BY 2.0],  
via Wikimedia Commons

# 波の発達・衰退と風速の関係

無限に広い海に一定の風が吹き続けると、どこかで発達が止まる

10m高風速 $U_{10}$ [m/s] → 経験式 $H_{s,\infty} \approx 0.024U_{10}^2$  [m],  $T_{s,\infty} \approx 0.75U_{10}$  [s] [Holthuijsen 2010]

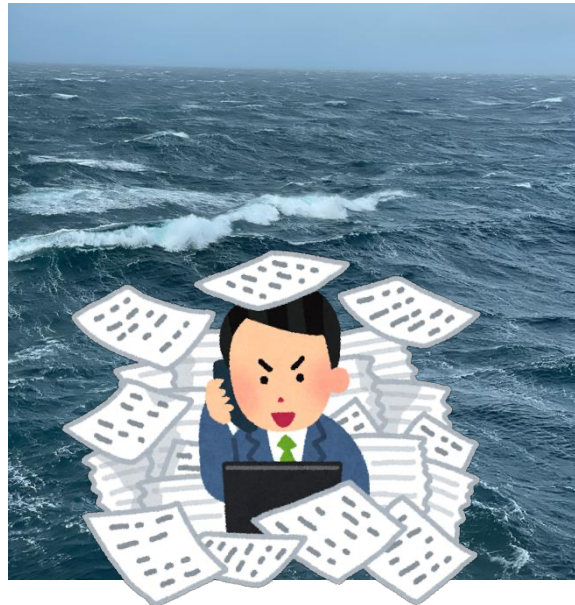
現実の波はピーク位相速度が $c_p \approx g/(2\pi/T_{s,\infty}) \approx 1.2U_{10}$ となるまで風からエネルギーを受け取って発達し、その後衰退

波齡  
(wave age)

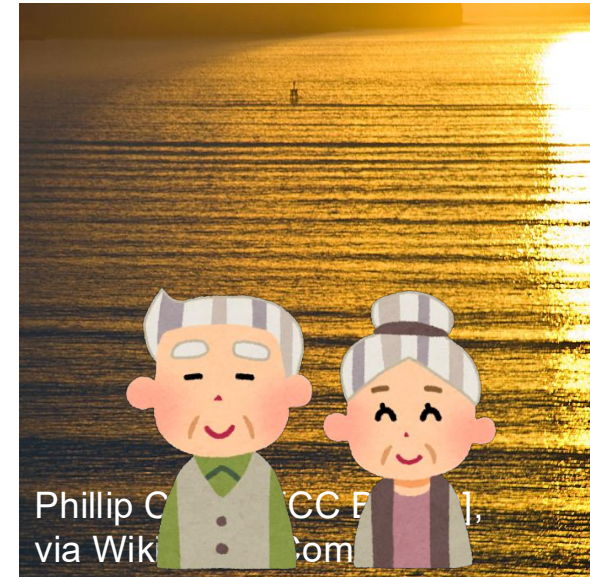
$$c_p/U_{10} \ll 1.2$$
$$c_p/u_* \ll 28$$



$$c_p/U_{10} \approx 1.2$$
$$c_p/u_* \approx 28$$



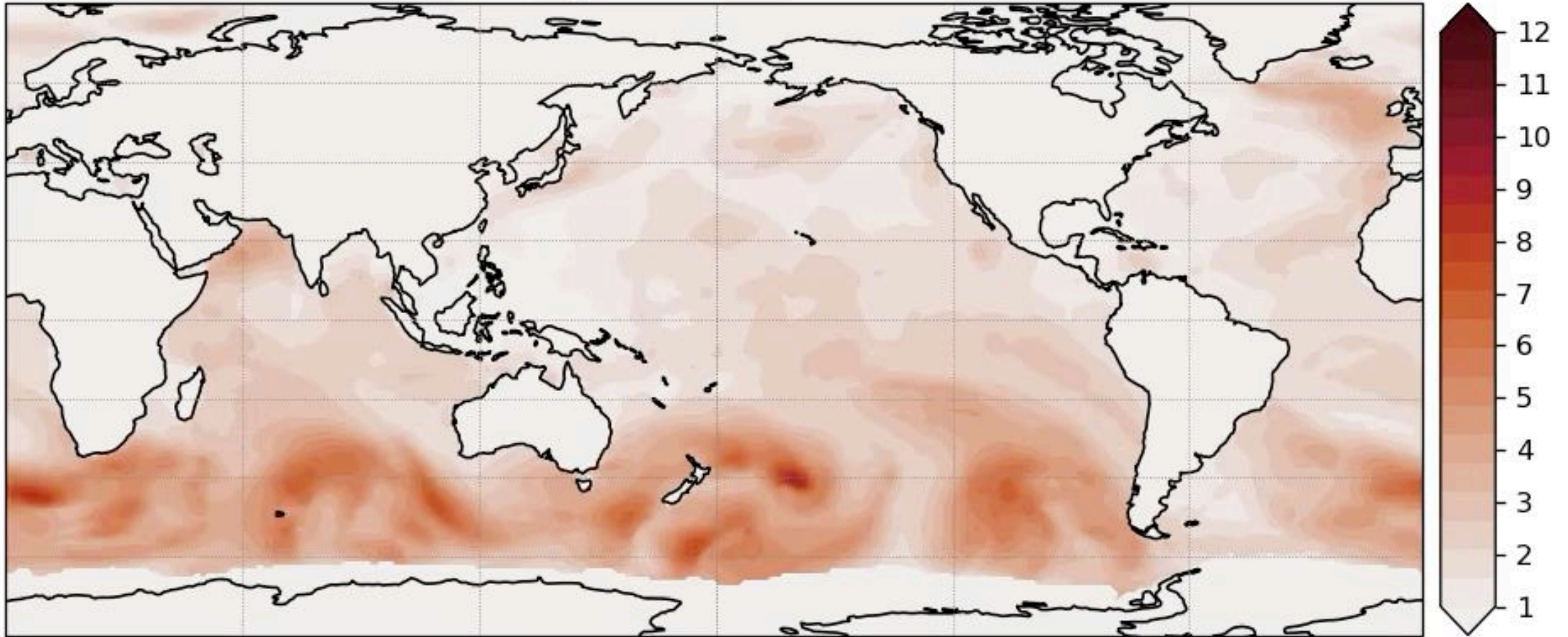
$$c_p/U_{10} \gg 1.2$$
$$c_p/u_* \gg 28$$



Phillip C. [CC BY-SA 4.0],  
via Wikicommons

# 風が強いところで波高は高い

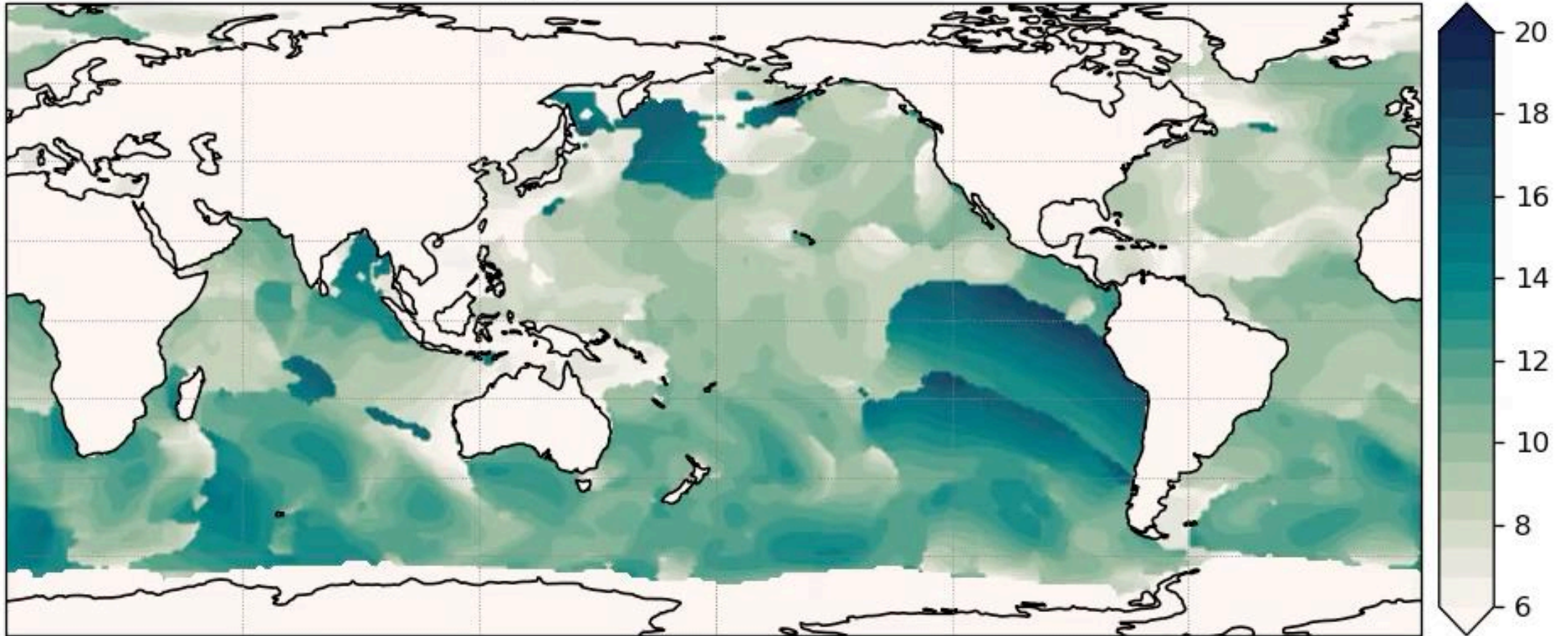
Hs [m], 2023-07-01 00:00:00



北半球の夏 = 南半球の冬、南大洋で低気圧活動が活発  
波高の高い海域はおおよそ強風域に対応する

# うねりは広い海を渡る

Tp [s], 2023-07-01 00:00:00



太平洋を横断することもしばしばある

ほかにも南方の台風で発生した「土用波」

# 波浪のスペクトル表現

- 波浪は典型的に線形・弱非線形

- 波は微小振幅 ( $ak \sim 0.4$ で峰が尖り砕波)

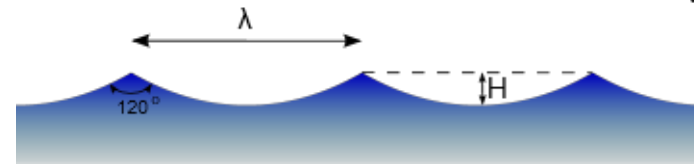
- フルード数小・渦なし近似が成立

- 線形重ね合わせが成立するとして水平二次元の  
パワースペクトル (方向スペクトル) で表記

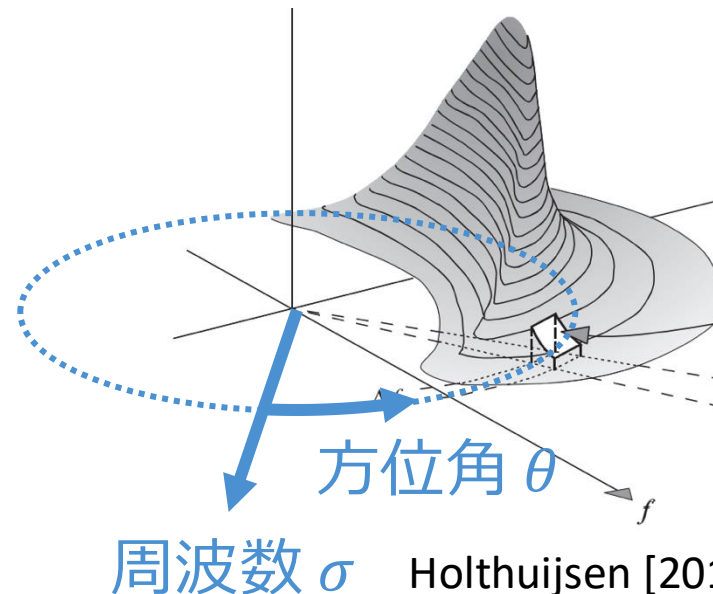
$$\overline{\eta^2} = \iint E(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

分散関係を用いて周波数・方位角で表すことも多い

$$\overline{\eta^2} = \iint E(\sigma, \theta) d\sigma d\theta$$



Kraaiennest, CC BY-SA 4.0  
via Wikimedia Commons



Holthuijsen [2010]

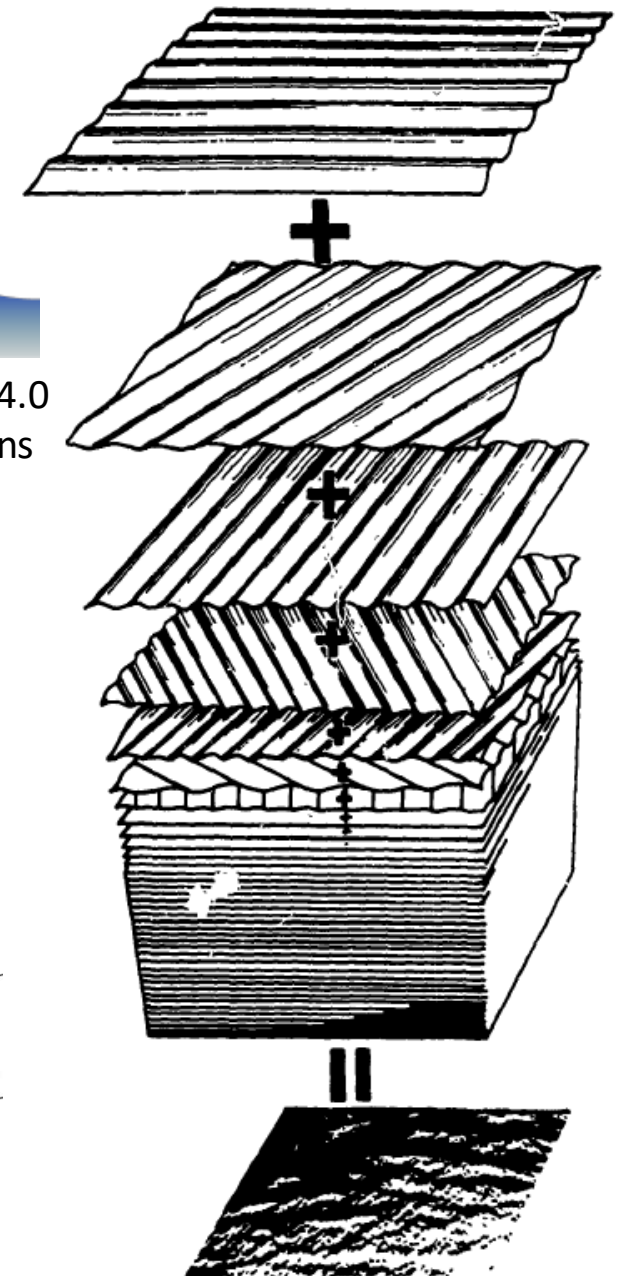


FIGURE 1.7 A sum of many simple sine waves makes a sea.

Pierson et al. [1955]

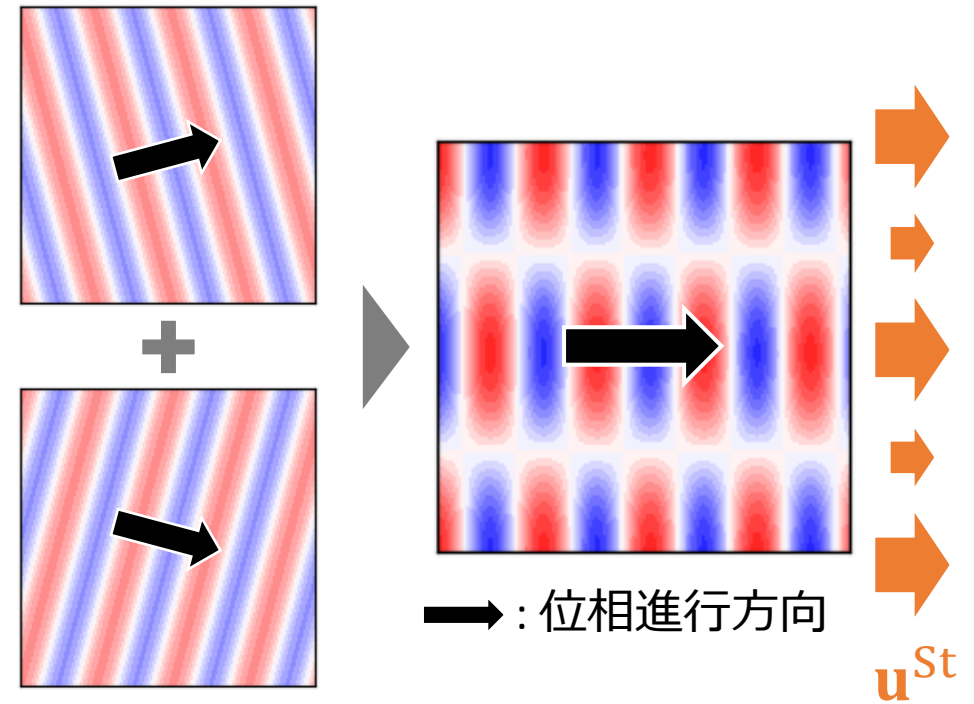
# 多成分波のストークスドリフト

- 同周波数・異なる向き of 2成分波
  - 干渉により水平非一様な  $\mathbf{u}^{\text{St}}$
  - 水平平均した  $\mathbf{u}^{\text{St}}$  は個々の和と同じ
- 現実には、無数の成分組合せ  
干渉効果の影響は小さいと考えられる

単なる重ね合わせで評価 [Kenyon, 1969]

$$\mathbf{u}^{\text{St}}(z) = \iint \frac{2}{g} \sigma^3 E(\sigma, \theta) e^{2kz} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta d\sigma$$

$$\mathbf{M}^{\text{St}} = \iint \sigma E(\sigma, \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\sigma d\theta \quad (\text{ストークス輸送: } \mathbf{u}^{\text{St}} \text{ の鉛直積分})$$



# 波浪モデルの基礎方程式：エネルギー伝達方程式

波長・周期  $\ll$  波高等の時空間変化スケール  $\rightarrow$  スケール分離

Ray theoryに基づき方向スペクトル  $E(\sigma, \theta; x, y, t)$  を予測

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ c_{gx} \left( \frac{E}{\sigma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ c_{gy} \left( \frac{E}{\sigma} \right) \right] = \frac{S_{in} + S_{nl} + S_{ds}}{\sigma}$$

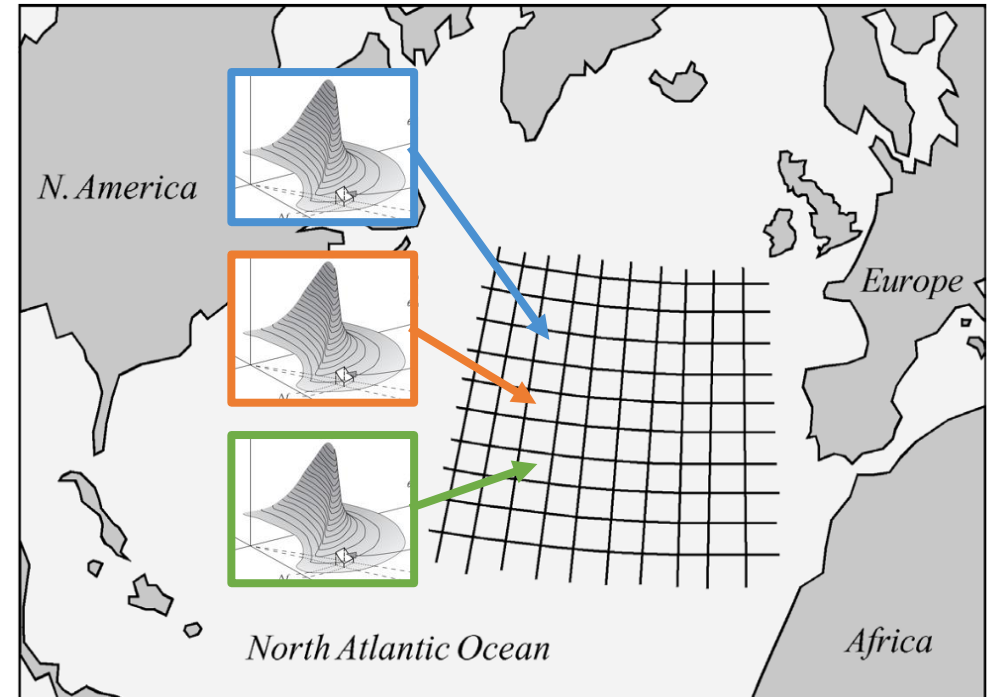
(1) (2)

(1) 微小振幅波理論により**伝播**法則を記述

➤ 分散関係  $\sigma^2 = gk \tanh kH$

群速度  $(c_{gx}, c_{gy}) = (\partial\sigma/\partial k_x, \partial\sigma/\partial k_y)$

(2) 風による**発達**  $S_{in}$ 、砕波による**散逸**  $S_{ds}$ 、  
波・波**非線形相互作用**  $S_{nl}$



# 流れによる波への影響

波長・周期よりも十分ゆっくりと時空間変化する流れ：

局所的に線形平面波解で近似できるが、ドップラー効果を考慮

その結果、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (c_{gx} + u) \left( \frac{E}{\sigma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (c_{gy} + v) \left( \frac{E}{\sigma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\dot{\sigma} E}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\dot{\theta} E}{\sigma} \right) = \frac{S}{\sigma}$$

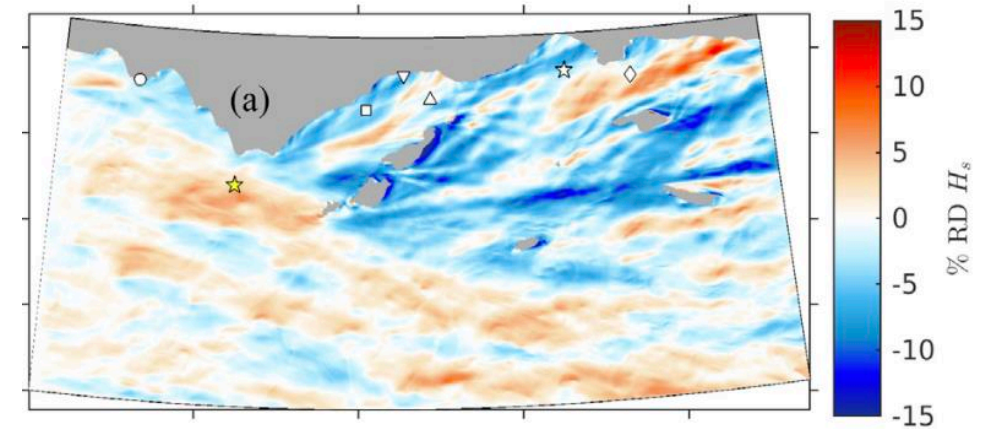
(1) (1) (2) (3)

(1) 伝播速度に**移流**が加算される

(2) 伝播方向に沿った**収束発散**で周波数変化

(3) シア流による**屈折**などで向き変化

メソ・サブメソ規模海流の渦度が(3)に寄与大？



流れ効果の有無による有義波高差 (%)

Romero et al. [2020]

# 波と流れの相互作用 - モデリングの視点から

## ●波浪モデル・海洋モデルは別個に開発

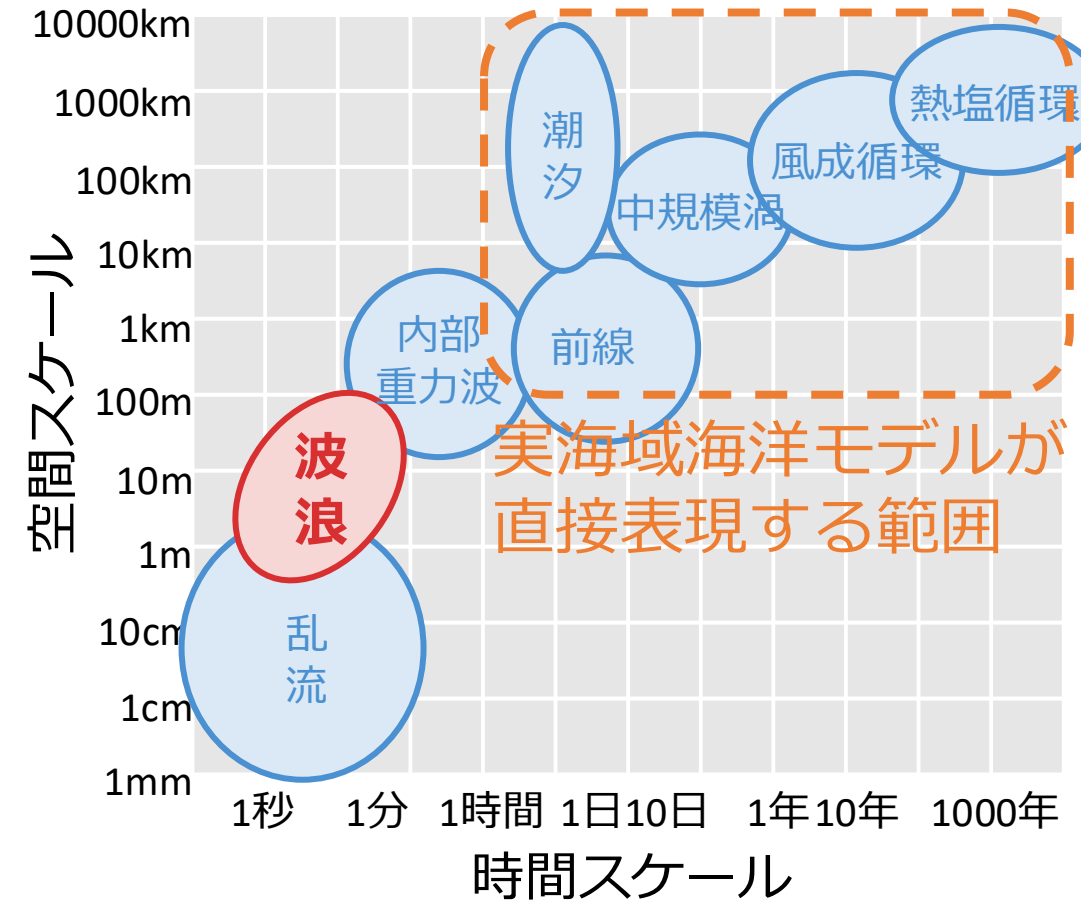
### ➤基本的に弱非線形、結合は弱い

- 水面波：フルード数小、微小振幅
- 流れ：波は微小振幅 → 周期平均0

### ➤海洋モデルにとって波は微細現象

## ●海洋モデルの精緻化・応用拡大で波の影響の重要性が相対的に増大

### ➤沿岸域、表層混合、漂流物・・・



# 波と流れの相互作用の枠組み

## 流れから波への効果

- ドップラー効果 ( $L \gg \lambda$ )  
WKB近似で定式化
- 散乱 ( $L \leq \lambda$ )  
流れは弱く、一般に影響小

### 波浪

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \mathbf{c}_g) = S_{in} + S_{nl} + S_{ds}$$

### 海洋

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

## 波から流れへの効果

- 砕波：半経験的にパラメタ化

- 非砕波での残差的効果：  
波平均方程式で記述

以降の主なトピック