

## wave-activity flux

# – いろいろな flux 及び位相依存性のない flux – (暫定版につき取扱注意)

地球環境フロンティア研究センター

E-mail: takaya@jamstec.go.jp

## 1 Introduction

ロスビー波束の伝播の様子を解析することは、大気大循環の力学を理解するために重要な事である。例えば、ある領域で起こるブロッキングの形成には定常(停滞)性ロスビー波束の入射とそれに引き続く局所砕破が大きな役割を果たすことが最近の研究で指摘されている(e.g., Nakamura et al. 1997)。また、storm track 上の cyclogenesis は、傾圧性波動の波束伝播による“downstream development”が関係しているかも知れないという研究もある(e.g., Chang 1993)。

この波束伝播をあらわすものとしてしばしば用いられるのが、wave-activity (波の活動度) flux である。例えば、微小振幅の擾乱に対する波の活動度の(条件によっては近似的な)保存則は、 $A$  と  $F$  を各々、波の活動度とその flux として、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = D, \quad (1)$$

のように書ける。 $D$  は非保存項で、擾乱と基本場の両方が保存的であれば 0 となる。擾乱波束の群速度が  $C_g$  と定義できるとき、 $F = C_g A$  という関係が成り立つ。よって、 $F$  をプロットすることにより、波束伝播を表現できるという事になる。また、flux の収束発散を調べることにより、擾乱の波束の sources and sinks, さらに擾乱の基本場へのフィードバックがわかる。

もう一つ重要なことは、 $A$ 、 $F$  とともに、波(擾乱)の物理量の 2 次の量で構成されていることである。そのままの形では、2 つの物理量とも強く波の位相成分に依存した形となり、1 波長を超えるスケールである波束伝播をあらわすのに適当でない。よって、何らかの方法で波の位相成分を除去する操作が必要となる。

波の活動度 flux として有名なものに、Eliassen-Palm (E-P) flux がある。これは、東西平均されており、子午面内での波束伝播を表現し、さらに基本場と擾乱との相互作用を考察する上で非常に重要なものである(e.g., Andrews and McIntyre 1976; Edmon et al. 1980; McIntyre 1982; Andrews et al. 1987)。東西平均されている事により、flux の各成分の波の位相依存性は除去されていて、ある瞬間(スナップショット)の波束伝播を表現することが可能である。しかしこの flux では当然、東西方向の波束伝播を表現できない。

Hoskins et al. (1983)、Trenberth (1986)、Plumb (1986) 等で定義された波の活動度 flux は、三次元に拡張されており、解析の用途が非常に広がっている。しかしながら、これらの flux は時

間平均をとっているため、今度はスナップショットの解析には適当でないという事になる<sup>1</sup>。注意すべき事は、時間平均をとることにより、移動性擾乱に対しては平均の時間をその周期より十分長くとれば flux の各成分から位相依存性を消すことができるが、停滞性擾乱に関しては、時間平均では位相依存性を除去することが出来ないという事である。

停滞性擾乱の波束伝播を表現できる、時間または空間平均をとらずに位相依存成分を除去した波の活動度 flux を導出したものとして Plumb (1985) の flux  $F_s$  がある。これにより、停滞性擾乱の波束伝播をも表現できるようになり、その有用性は Plumb (1985) や Karoly et al. (1989) などで確認されている。しかし、この flux は、基本場を東西一様と仮定していること、また、導出の過程がかなり発見的であることなどの問題がある。前者に関して言えば、特に冬の北半球対流圏の基本場はプラネタリ波の存在により蛇行しているため、この仮定は必ずしも適当でない。後者の問題に関して言えば、この位相依存性のない波の活動度 flux の物理的意味がやや曖昧であるという問題がある。

本セミナーでは、Plumb (1985)、Plumb (1986)、Trenberth (1986)、Andrews (1983) の論文等を review し、それぞれの flux について考察する。そして最後に、Plumb (1985) の  $F_s$  を、東西非一様な基本場中の擾乱に対して拡張することを試みる。Plumb (1985) では、停滞性擾乱のみが対象であったが、ここでは移動性擾乱をも含むより一般的な表式を求める。また、Plumb (1985) の導出よりも、より straightforward な導出を試みる。やや複雑な式変形となるが、ここで導出する位相依存性のない波の活動度 flux の物理的意味がよりはっきりするものと期待される。

なお、東西非一様な基本場中の停滞性擾乱については Takaya and Nakamura (1997) が、また、それを移動性擾乱に拡張したものについては Takaya and Nakamura (2000) にまとめられている。

---

<sup>1</sup> ここでは、「スナップショット」という言葉を、ある特定の時間の偏差の空間パターンという文字通りの意味の他に、合成図や線形回歸図のような、複数の時間の重ねあわせの結果得られる波のある特定の位相を表す空間のパターンという意味でも用いる。

## 2 過去のいろいろな wave-activity flux

本論に入る前に、過去いろいろ提案されてきた wave-activity flux の定式及びその基本場への feedback の式 (所謂 TEM 方程式) の表式を表す。詳しい定義や説明は、逐って行うこととするので、ここでは表式毎の違いをざっと確認すれば良い。

### 2.1 伝統的な wave-activity flux: EP flux

準地衡ブジネスク流体の  $(x, y, z)$  座標系の  $\beta$  平面上で

$$\frac{\partial [A]}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F} = D \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \rho_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -[u'v'] \\ f[v'\theta']/\theta_{0z} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{\partial [U]}{\partial t} + f_0 v^* = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (4)$$

ただし、 $v^*$  は残差循環、 $[A]$  は物理量  $A$  の東西平均。

### 2.2 Trenberth (1986) の flux

$$\mathbf{F} = \rho_0 \begin{pmatrix} (\overline{v'^2 - u'^2})/2 \\ -\overline{u'v'} \\ f[\overline{v'\theta'}]/\theta_{0z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\frac{d\bar{U}}{dt} + f_0 v^* = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (6)$$

ただし、 $\bar{A}$  は、物理量  $A$  の時間平均。時間平均により flux の位相依存性を除去しているので、移動性擾乱の時間平均的な伝播を表現するのに適している。

### 2.3 Plumb (1986) の flux

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{M}_T = D \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{U}A + \mathbf{M}_R \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_R = \frac{\rho_0}{|\mathbf{u}|} \begin{pmatrix} \{U(\overline{v'^2 - e}) - V\overline{u'v'}\} \\ \{-U\overline{u'v'} + V(\overline{u^2 - e})\} \\ \frac{f}{\theta_{0z}} \{U\overline{v'\theta'} + V\overline{u'\theta'}\} \end{pmatrix} \quad (9)$$

TEM 方程式系はやや複雑な形を取るが、もし  $V \approx 0$  ならば

$$\frac{d\bar{U}}{dt} + f_0 v^* = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{M}_R \quad (10)$$

この flux も、時間平均により flux の位相依存性を除去する。よって、移動性擾乱の表現に適している。Trenberth (1986) の flux と似ているが、決して同じ表式ではないことに注意。

## 2.4 Plumb (1985) の flux

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{F}_s = C_s \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_s = \frac{\rho_0}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} - \psi' \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \psi'\right) \\ \frac{f^2}{N^2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \psi' \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \psi'\right)\right) \end{pmatrix} \quad (12)$$

これは、東西一様な基本場中での準停滞性擾乱の 3 次元的な伝播を表現する wave-activity flux である。停滞性擾乱の位相は移動しないので、時間平均をとっても flux の位相依存性は除去されない。そこで考案されたのが、この Plumb (1985) の flux である。非常に用途が広いのだが、Plumb (1985) ではやや発見的な導出をしていること、基本場への feedback の定式化がなされていないこと、基本場が東西非一様なときの (近似的な) 保存則が導かれていない等の不満がある。

### 3 ロスビー波の群速度

まず、ロスビー波の群速度を求める。

$p$ -座標系  $\beta$  平面で、potential vorticity equation は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla q = 0 \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (\frac{\partial \psi}{\partial x}, -\frac{\partial \psi}{\partial y}, 0)$  であり

$$q = f_0 + \beta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \quad (14)$$

である。 $(S^2$  は、大気の安定度に比例するような量である。) ここで、 $\psi$  を

$$\psi = \bar{\Psi} + \psi'$$

と、基本場部分と擾乱部分とに分ける。これを上式に代入して方程式を線形化する。まずは簡単の為に、基本場は東西一様の西風  $U$  であるとする、線形化された potential vorticity eq. は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} v' = 0 \quad (15)$$

ただし、 $Q$  は基本場の potential vorticity、 $q'$  は擾乱の potential vorticity であり、

$$q' = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \quad (16)$$

と表される。ここで、 $\psi' = \psi_0 \exp\{i(kx + ly + mp - \omega t)\}$  とおくと、(15) 式及び (16) 式を考慮して

$$\omega = kU - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} k}{k^2 + l^2 + (f/S)^2 m^2} \quad (17)$$

なる分散関係式を得る。よって、 $x$  方向の位相速度  $C_x$  は、

$$C_x = U - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + (f/S)^2 m^2} \quad (18)$$

また、群速度は

$$C_{gx} = U + \frac{k^2 - l^2 - (f/S)^2 m^2}{\{k^2 + l^2 + (f/S)^2 m^2\}^2} \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \quad (19)$$

$$C_{gy} = \frac{2kl}{\{k^2 + l^2 + (f/S)^2 m^2\}^2} \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \quad (20)$$

$$C_{gp} = \frac{2(\frac{f^2}{S^2})km}{\{k^2 + l^2 + (f/S)^2 m^2\}^2} \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \quad (21)$$

また、(18) 式より、定常ロスビー波の場合 ( $C_x = 0$ )、 $\mathbf{K} = (k, l, (\frac{f}{S})m)$  として、

$$U = \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) / |\mathbf{K}|^2$$

なる関係が成り立つ。これを利用すると、定常ロスビー波の群速度は

$$C_g = \frac{2U}{|\mathbf{K}|^2} \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ (\frac{f^2}{S^2})km \end{pmatrix} = \frac{2(\frac{\partial Q}{\partial y})}{|\mathbf{K}|^4} \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ (\frac{f^2}{S^2})km \end{pmatrix} \quad (22)$$

と書けることがわかる。

さて、今度は、基本流が  $U = (U, V)$  の場合はどうなるだろうか。先ほどと同じく、線形化された potential vorticity eq. を考えると、

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + V \frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} u' + \frac{\partial Q}{\partial y} v' = 0 \quad (23)$$

となる。やはり同様に、 $\psi' = \psi_0 \exp\{i(kx + ly + mp - \omega t)\}$  とおくと、分散関係式は

$$\omega = kU + lV + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} l - \frac{\partial Q}{\partial y} k \right) / |\mathbf{K}|^2 \quad (24)$$

となる。そうすると、ロスビー波の群速度は、

$$C_{gx} = U + \frac{(k^2 - l^2 - (f/S)^2 m^2) (\frac{\partial Q}{\partial y}) - 2kl (\frac{\partial Q}{\partial x})}{|\mathbf{K}|^4} \quad (25)$$

$$C_{gy} = V + \frac{(k^2 - l^2 + (f/S)^2 m^2) (\frac{\partial Q}{\partial x}) + 2kl (\frac{\partial Q}{\partial y})}{|\mathbf{K}|^4} \quad (26)$$

$$C_{gp} = \frac{2km (\frac{\partial Q}{\partial y}) - 2lm (\frac{\partial Q}{\partial x})}{|\mathbf{K}|^4} \quad (27)$$

となることがわかる。また、定常ロスビー波の群速度は、やはり同様にして

$$C_g = \frac{1}{|\mathbf{K}|^2} \begin{pmatrix} 2k^2 U + 2kl V \\ 2kl U + 2l^2 V \\ (2km U + 2ml V) \frac{f^2}{S^2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

と書けることがわかる。(Appendix 参照)

## 4 エネルギー flux

次に、基本流中に存在する微小振幅擾乱のエネルギーについて考察する。一般に、この場合の擾乱のエネルギーは保存しない。なぜなら、基本流が非一様の場合、擾乱と基本流が相互作用するからである。逆にいえば、擾乱のエネルギーが保存するのは、基本流が至るところで一様である場合だけである。

ここでは、まず、簡単な為に、基本流として一様な西風  $U$  が存在する場合を考える。また、水平 2 次元で考える。そして、擾乱のエネルギーの保存を考え、エネルギー flux を導出する。まず、線形化された vorticity eq. 式を考える。この場合は、 $\frac{\partial Q}{\partial y} = \beta$  なので、

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \beta v' = 0$$

この両辺に、 $\psi'$  をかけると

$$\psi' \frac{\partial}{\partial t} \zeta' + U \psi' \frac{\partial}{\partial x} \zeta' + \beta \psi' \frac{\partial}{\partial x} \psi' = 0$$

さらに  $\zeta' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi' + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi'$  を用いると、例えば、

$$\begin{aligned} \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi' &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \psi' \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \psi' \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi' &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi' \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \psi' \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

などの関係式を用いて

$$\frac{\partial e}{\partial t} + U \frac{\partial e}{\partial x} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} -\psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial x} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \beta \psi'^2 \\ -\psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial y} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) \end{pmatrix} = 0 \quad (29)$$

ただし、 $e$  は単位質量辺りのエネルギーで

$$e = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \quad (30)$$

で定義される。

ここで、エネルギー flux  $\mathbf{F}$  を

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} Ue - \psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} v'_g + U \frac{\partial}{\partial x} v'_g \right) - \frac{1}{2} \beta \psi'^2 \\ \psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} u'_g + U \frac{\partial}{\partial x} u'_g \right) \end{pmatrix} \quad (31)$$

で定義する。ここで、 $u'_g = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}$ ,  $v'_g = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$  である。これを用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} e + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (32)$$

と書ける。

ここで、 $\psi' = \psi_0 \sin(kx + ly - \omega t)$  の形を仮定する。さらに、ここで、分散関係式 (17) 式より、 $\omega = kC_x$  また  $U - C_x = \beta/|\mathbf{K}|^2$  の関係を用い、上式を 1 波長平均する (ただし、この場合、 $\mathbf{K} = (k, l)$ )。これらを用いて (32) 式を書き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4} |\mathbf{K}|^2 \psi_0^2 + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} U |\mathbf{K}|^2 \psi_0^2 - \frac{1}{2} (k^2 \beta / |\mathbf{K}|^2) \psi_0^2 - \frac{1}{4} \beta \psi_0^2 \\ \frac{1}{2} (kl \beta / |\mathbf{K}|^2) \psi_0^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (33)$$

ここで、上式のベクトルは、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} U |\mathbf{K}|^2 \psi_0^2 - \frac{1}{2} (k^2 \beta / |\mathbf{K}|^2) \psi_0^2 - \frac{1}{4} \beta \psi_0^2 \\ \frac{1}{2} (kl \beta / |\mathbf{K}|^2) \psi_0^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} U |\mathbf{K}|^2 \psi_0^2 - \frac{1}{4} (k^2 - l^2 - (\frac{f}{S} m)^2) \beta / |\mathbf{K}|^2 \psi_0^2 \\ \frac{1}{2} (kl \beta / |\mathbf{K}|^2) \psi_0^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U + (k^2 - l^2 - (\frac{f}{S} m)^2) \beta / |\mathbf{K}|^4 \\ 2kl \beta / |\mathbf{K}|^4 \end{pmatrix} \frac{1}{4} |\mathbf{K}|^2 \psi_0^2 \\ &= \mathbf{C}_g \bar{e} \end{aligned}$$

と書き表せる。すなわち、overbar を 1 波長平均として、

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{e} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{F}} = 0, \quad \bar{\mathbf{F}} = C_g \bar{e} \quad (34)$$

という関係式が成り立っていることがわかる。

ところで、以上では、vorticity eq. からこれらの関係式を導いたが、エネルギー保存則の関係式は運動方程式から導くこともできる。この方法で導いてみよう。

水平方向の擾乱の運動の運動方程式は、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} - f v' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \quad (35)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial y} \quad (36)$$

これらの式から、エネルギー密度  $e$  に関する式を作ると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{e} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{F}}' = 0, \quad \bar{\mathbf{F}}' = \begin{pmatrix} Ue + u_a \Phi' \\ v_a \Phi' \end{pmatrix} \quad (37)$$

となることがわかる。ただし、 $(u_a, v_a)$  は、水平方向の ageostrophic な流れである。この式の flux  $\bar{\mathbf{F}}'$  は、(32) 式の flux  $\bar{\mathbf{F}}$  とは、形が全然違う。なぜこのような違いが起こるのだろうか？

ここで、(31) 式を、以下の順に従って変形しよう。まず、運動方程式 (35)、(36) の両式について、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_a$  とすると、以下のように変形できる。

$$\frac{\partial u'_g}{\partial t} + U \frac{\partial u'_g}{\partial x} - (f_0 + \beta y)(v'_g + v_a) = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \quad (38)$$

$$\frac{\partial v'_g}{\partial t} + U \frac{\partial v'_g}{\partial x} + (f_0 + \beta y)(u'_g + u_a) = -\frac{\partial \Phi'}{\partial y} \quad (39)$$

そこで、(38)、(39) 式を用いて (31) 式を書き換えると、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} Ue + u_a \Phi' - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \beta y \psi'^2 \right) \\ v_a \Phi' + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \beta y \psi'^2 \right) \end{pmatrix} \quad (40)$$

となる。よって、 $\mathbf{F}$  と  $\mathbf{F}'$  との関係は

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \beta y \psi'^2 \right) \\ +\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \beta y \psi'^2 \right) \end{pmatrix}$$

であり、さらに上式の右辺第 2 項の部分は、非発散であることがすぐわかる。

つまり、 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}'$  ではあるが、 $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$  ではないのである。また、当然のことながら、 $\mathbf{F}'$  は、一般には  $C_g$  に平行でない。 $C_g$  に平行となるのは、非発散項を含んだ、 $\mathbf{F}$  であることは重要なことである。

逆にいえば、flux には、非発散成分の任意性があるということである。上の例のように、 $C_g$  に平行でないベクトルでも、適当な非発散成分を加えることによって、 $C_g$  に平行にすることができる。



## 5 東西風が南北に変化する時の wave activity flux

前章での議論は、西風  $U$  が一様な場合の議論である。先にも触れたように、基本流が非一様な場合は、擾乱のエネルギーは保存せず、従って前章の議論も成り立たない。このような場合は、どうすればいいであろうか。まず、基本流である西風  $U$  が南北にのみ緩やかに変化している場合を考察する。

こういう場合は、wave activity density の保存を議論する。

線形化された potential vorticity eq. は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} v' = s' \quad (41)$$

である。ここで、 $s'$  は Sources and/or sinks 項である。

さて、この式の両辺に  $q'$  をかけ変形すると、擾乱の enstrophy Eq. を得る。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} q'^2 + \frac{1}{2} U \frac{\partial}{\partial x} q'^2 + v' q' \frac{\partial Q}{\partial y} = s' q' \quad (42)$$

ここで、

$$\begin{aligned} v' q' &= v' \left\{ \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \right\} \\ &= v' \frac{\partial v'}{\partial x} - u' \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial v'}{\partial y} - v' \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right\}^2 \\ &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (v'^2 - u'^2 - \left( \frac{f}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right)^2) \\ -u'v' \\ \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} \\ &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} v'^2 - e \\ -u'v' \\ \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} \\ &\equiv \nabla \cdot \mathbf{B}^{(R)} \end{aligned} \quad (43)$$

この場合、 $\frac{\partial Q}{\partial y}$  は  $y$  と  $t$  に対して独立だから、(42) 式は以下のように書き直せる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial x} + \nabla \cdot \mathbf{B}^{(R)} = C \quad (44)$$

ただし、

$$A = \frac{1}{2} q'^2 / \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \quad (45)$$

である。これは、wave activity Density と呼ばれる量である。さらに、 $U = (U, 0, 0)$  として、

$$\mathbf{B}^{(T)} = \mathbf{B}^{(R)} + U A \quad (46)$$

とすれば、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{B}^{(T)} = C \quad (47)$$

となる。

さて、 $\mathbf{B}^{(T)}$  は、擾乱の波の変数の、2次の量で表されており、まだ平均をとっていない。よって、

一般には、これは位相によっている量である。つまり、擾乱の半波長にわたって振動する成分を含んでいる。もし、考えている擾乱が移動性なら、時間平均をとることによって位相依存性を取り除くことができる。が、(準) 停滞性の擾乱を考えると、時間平均は位相を取り除くことにはならない。以下、この2つのケースについて考察する。

### 5.1 移動性擾乱を考える場合: Plumb (1986) の $V = 0$ の場合

この場合は、時間平均をとることによって、 $B^{(T)}$  の位相依存性を取り除くことができる。 $\psi' = \psi_0 \sin(kx + ly + mp - \omega t)$  と考え、overbar を時間平均を表すとす。すると、 $\mathbf{K} = (k, l, \frac{f}{S}m)$  として、

$$\bar{A} = \frac{\overline{q^2}}{2 \frac{\partial Q}{\partial y}} = \frac{|\mathbf{K}|^4}{4 \frac{\partial Q}{\partial y}} \psi_0^2, \quad \bar{e} = \frac{1}{2} \overline{\{u'^2 + v'^2 + (\frac{f}{S} \frac{\partial \psi'}{\partial p})^2\}} = \frac{|\mathbf{K}|^2}{4} \psi_0^2$$

などより、

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}^{(T)}} &= \begin{pmatrix} U\bar{e} + \overline{v'^2 - e} \\ -u'v' \\ \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U + \{k^2 - l^2 - (\frac{f}{S}m)^2\} \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^4 \\ 2kl \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^4 \\ 2(\frac{f}{S})^2 km \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^4 \end{pmatrix} \frac{|\mathbf{K}|^4}{4 \frac{\partial Q}{\partial y}} \psi_0^2 \\ &= C_g \bar{A} \end{aligned} \quad (48)$$

と書き表されることがわかる。よって、無限小振幅の線形波では

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{B}^{(T)}} = C, \quad \overline{\mathbf{B}^{(T)}} = C_g \bar{A} \quad (49)$$

が成り立っていることがわかる。

### 5.2 準停滞性擾乱を考える場合: Plumb (1985) の場合

この場合、時間平均という操作は、 $B^{(T)}$  の位相依存性を消す操作としては適当ではない。そこで、Plumb(1985) は、以下の方法で、 $B^{(T)}$  の位相依存性を消すことを提案した。前にも触れたが、flux の形には、非発散成分だけの任意性がある。その性質を利用し、ここで、非発散ベクトル  $G$  (i.e.  $\nabla \cdot G = 0$ ) を導入する。

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{B}^{(T)} + \mathbf{G} \quad (50)$$

で定義される  $\mathbf{F}_s$  を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_s &= C_s \\ C_s &= C + \nabla \cdot \mathbf{G} \end{aligned} \quad (51)$$

となる。

ここでは、

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi'^2 + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2}{S^2} \right) \frac{\partial}{\partial p} \psi'^2 - 2r'q' / \frac{\partial Q}{\partial y} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \psi'^2 \\ - \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} \psi'^2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

ととるのが適切である。ここで、 $r'$  は、

$$\frac{\partial r'}{\partial x} = s'$$

で定義される量である。もし、 $s' = 0$  なら、 $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$  となる。

さて、ここで  $F_s$  を計算すると、

$$\mathbf{F}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \psi' q' + [(Uq'^2 - r'q') / \frac{\partial Q}{\partial y}] \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} - \psi' \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \psi' \right) \\ \frac{f^2}{S^2} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} - \psi' \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} \psi' \right) \right) \end{pmatrix} \quad (53)$$

準停滞性擾乱を考える時は、(41) 式において  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  とできるから、

$$U \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} = s'$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (Uq' + \psi' \frac{\partial Q}{\partial y} - r') = 0$$

擾乱として、線形波を仮定すれば、

$$Uq'^2 + \psi' q' \frac{\partial Q}{\partial y} - r'q' = 0$$

が成り立つことがわかる。ゆえに、 $F_s$  の表式として、

$$\mathbf{F}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} - \psi' \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \psi' \right) \\ \frac{f^2}{S^2} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} - \psi' \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} \psi' \right) \right) \end{pmatrix} \quad (54)$$

となることがわかる。

さて、ここで、振幅がゆっくり変化しているような擾乱の波を考える。第 1 次の order では、

$$\psi' = \psi_0 \sin(kx + ly + mp - \omega t)$$

とおくことができる。これを用いて  $F_s$  を評価すると、

$$\mathbf{F}_s \approx \frac{\psi_0^2}{2} \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ f^2 km / S^2 \end{pmatrix} \quad (55)$$

ここで、定常ロスビー波の群速度が

$$\mathbf{C}_g = \frac{2 \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}{|\mathbf{K}|^4} \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ \left( \frac{f^2}{S^2} \right) km \end{pmatrix} \quad (56)$$

と表されることを用いると、

$$F_s = \left( \frac{1}{4} \frac{|\mathbf{K}|^4 \psi_0^2}{\frac{\partial Q}{\partial y}} \right) C_g \quad (57)$$

という形に書けることがわかる。ところで、(57) 式は、 $F_s = C_g A$  の形に書けるだろうか。実は、WKB の limit でも、この関係は成り立たない。なぜなら、 $A$  がこの場合、位相に依存する量だからである。ところが、定常ロスビー波の場合

$$|\mathbf{K}|^2 = \frac{\partial Q}{\partial y} / U$$

の関係が成り立っていることを利用すると、

$$A_s \equiv \frac{1}{2} \left( A + \frac{e}{U} \right) = \frac{1}{4} \frac{|\mathbf{K}|^4 \psi_0^2}{\frac{\partial Q}{\partial y}} \quad (58)$$

であることがわかる。よって、

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = C_s \quad (59)$$

であり、WKB の limit では

$$\mathbf{F}_s = C_g A_s \quad (60)$$

が成り立っていることがわかる。

## 6 $U, V$ が存在する場合の wave activity flux: Plumb (1986) の場合

前章では、基本流として東西一様の西風を仮定した。Plumb(1986) では、基本流として、 $U = (U, V, 0)$  を考えた時の、移動性の準地衡波動の wave activity flux を導入している。ここでは、この論文に基づいて、 $\beta$  平面で考えとする。

この場合の線形化された potential vorticity eq. は、

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + V \frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} u' + \frac{\partial Q}{\partial y} v' = s' \quad (61)$$

となる。前章と同じく、両辺に  $q'$  をかけて enstrophy Eq. をつくと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{q'^2}{2} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{q'^2}{2} + V \frac{\partial}{\partial y} \frac{q'^2}{2} + u' q' \frac{\partial Q}{\partial x} + v' q' \frac{\partial Q}{\partial y} = s' q' \quad (62)$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned} u' q' &= u' \left\{ \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \right\} \\ &= u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} - u' \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} u'v' + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}(v'^2 - u'^2) \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f^2}{2S^2} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right)^2 \right) \\
&= \nabla \cdot \begin{pmatrix} u'v' \\ \frac{1}{2}(v'^2 - u'^2 + \frac{f^2}{S^2} (\frac{\partial \psi'}{\partial p})^2) \\ -\frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} \\
&= \nabla \cdot \begin{pmatrix} u'v' \\ e - u'^2 \\ -\frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。

よって、enstrophy Eq. は

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{q'^2}{2} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{q'^2}{2} + V \frac{\partial}{\partial y} \frac{q'^2}{2} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \nabla \cdot \begin{pmatrix} u'v' \\ e - u'^2 \\ -\frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} + \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \nabla \cdot \begin{pmatrix} v'^2 - e \\ -u'v' \\ \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} = s'q' \quad (63)$$

で表される。ここで、上式の時間平均をとり、wave activity density を、 $A = \frac{\overline{q'^2}}{2|\nabla_H Q|}$  (ただし、 $\nabla_H = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0)$ ) で定義する。すると、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{|\nabla_H Q|} \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} U \overline{q'^2} \\ \frac{1}{2} V \overline{q'^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{|\nabla_H Q|} \nabla \cdot \begin{pmatrix} \overline{u'v'} \\ e - u'^2 \\ -\frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} + \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{|\nabla_H Q|} \nabla \cdot \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e} \\ -\overline{u'v'} \\ \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} = D' \quad (64)$$

ここで、

$$\frac{1}{|\nabla_H Q|} \nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} U \overline{q'^2} \\ \frac{1}{2} V \overline{q'^2} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{|\nabla_H Q|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} U \overline{q'^2} \\ \frac{1}{2} V \overline{q'^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (65)$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{|\nabla_H Q|} \nabla \cdot \begin{pmatrix} \overline{u'v'} \\ e - u'^2 \\ -\frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} \approx \nabla \cdot \left\{ \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{|\nabla_H Q|} \begin{pmatrix} \overline{u'v'} \\ e - u'^2 \\ -\frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} \right\} \quad (66)$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{|\nabla_H Q|} \nabla \cdot \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e} \\ -\overline{u'v'} \\ \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} \approx \nabla \cdot \left\{ \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{|\nabla_H Q|} \begin{pmatrix} \overline{v'^2 - e} \\ -\overline{u'v'} \\ \frac{f^2}{S^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \end{pmatrix} \right\} \quad (67)$$

という近似を仮定する。(65) 式は、基本流の方向の擾乱の enstrophy 変化に比べて、基本場の potential vorticity の勾配の大きさの変化が小さいであろうという近似である。(66) 式及び (67) 式は、基本場の potential vorticity の勾配ベクトルの方向の変化が、それぞれの flux の変化より小さいとする近似である。

さらに、基本状態が

$$U \frac{\partial Q}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial y} \approx 0$$

であるとすれば、

$$|\nabla_H Q| \approx |\mathbf{u}| \frac{\partial Q}{\partial y} \approx -|\mathbf{u}| \frac{\partial Q}{\partial x}$$

の関係が成り立つから (ここで、 $\mathbf{u} = (U, V, 0)$ )、これらを用いて (64) 式を書き直すと、

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{M}_T = D' \quad (68)$$

$$\mathbf{M}_T = \begin{pmatrix} UA + \frac{1}{|\mathbf{u}|} \{U(\overline{v'^2} - e) - V\overline{u'v'}\} \\ VA + \frac{1}{|\mathbf{u}|} \{-U\overline{u'v'} + V(\overline{u^2} - e)\} \\ \frac{f^2}{S^2|\mathbf{u}|} \{U\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\psi'}{\partial p} + V\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\psi'}{\partial p}\} \end{pmatrix} \quad (69)$$

となることがわかる。

また、 $\psi' = \psi_0 \sin(kx + ly + mp - \omega t)$  とおくと、今までに導いた関係式を用いて

$$A = \frac{|\mathbf{K}|^4 \psi_0^2}{4|\nabla_H Q|}$$

が導けるので、これを使って

$$\mathbf{M}_T = C_g A \quad (70)$$

であることを示すことができる。

## 7 pseudoenergy の保存について: Andrews (1983) の場合

この章では、'pseudoenergy' と呼ばれる量についての保存について、Andrews(1983) に従って考察する。この量は、今回の重要なテーマの一つである「定常ロスビー波の wave activity flux の定式化」に直接は関係ないが、しかし非常に重要なので、ここで紹介する。

基本場の状態を表す方程式として

$$U\frac{\partial Q}{\partial x} + V\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (71)$$

また、線形化された potential vorticity eq. は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U\frac{\partial q'}{\partial x} + V\frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}u' + \frac{\partial Q}{\partial y}v' = s'$$

つまり

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla q' + \mathbf{u}' \cdot \nabla Q = 0 \quad (72)$$

である。ここで、(71) 式及び  $\mathbf{U} = (U, V, 0) = (-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}, \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}, 0)$  であることから、 $Q$  は基本流の流線に沿って同じ値であることがわかる。つまり、

$$Q = Q(\bar{\psi}; p)$$

ここで、以下の量を定義する。

$$\Lambda(\bar{\psi}; p) = \frac{\partial Q}{\partial \bar{\psi}} \quad (73)$$

すると、これらの関係から、

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \nabla \Lambda &= U\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\Lambda}{\partial\bar{\psi}}\right) + V\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial\Lambda}{\partial\bar{\psi}}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (74)$$

が成り立つ。  
ここで、

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' \cdot \nabla Q &= \Lambda \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\psi} \\
&= \Lambda \left( -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \right) \\
&= -\Lambda \mathbf{U} \cdot \nabla \psi' \\
&= -\mathbf{U} \cdot \nabla (\Lambda \psi')
\end{aligned} \tag{75}$$

すると、(72) 式は、

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = -\mathbf{U} \cdot \nabla (q' - \Lambda \psi') \tag{76}$$

と書き換えることができる。  
次に、 $\frac{f^2}{S^2} = \epsilon$  とおくと、

$$q' = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial p} \left( \epsilon \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \tag{77}$$

であることより、

$$\begin{aligned}
\psi' \frac{\partial q'}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + \epsilon \left( \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right)^2 \right\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left( \epsilon \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right)
\end{aligned} \tag{78}$$

一方、

$$\Lambda^{-1} q' \frac{\partial q'}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (q'^2 / \Lambda)$$

であるから、(78) 式から、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + \epsilon \left( \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right)^2 + q'^2 / \Lambda \right\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left( -\epsilon \psi' \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \\
&= \Lambda^{-1} \frac{\partial q'}{\partial t} (q' - \Lambda \psi')
\end{aligned} \tag{79}$$

上式の右辺は、(76) 式を用いて、

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-1} \frac{\partial q'}{\partial t} (q' - \Lambda \psi') &= -(2\Lambda)^{-1} \mathbf{U} \cdot \nabla (q' - \Lambda \psi')^2 \\
&= -\mathbf{U} \cdot \nabla [(q' - \Lambda \psi')^2 / 2\Lambda] \\
&= -\nabla \cdot [\mathbf{U} (q' - \Lambda \psi')^2 / 2\Lambda]
\end{aligned} \tag{80}$$

これらの結果を用いると、以下の保存則が導かれる。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0 \tag{81}$$

ただし、

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + \epsilon \left( \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right)^2 + q'^2 / \Lambda \right\} \quad (82)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) + \frac{U}{2\Lambda} (q' - \Lambda \psi')^2 \\ -\psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) + \frac{V}{2\Lambda} (q' - \Lambda \psi')^2 \\ -\epsilon \psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \end{pmatrix} \quad (83)$$

上式の時間平均をとると、'Pseudoenergy' の保存則となることが示される。また、overbar を時間平均または1波長平均とすると、ゆっくり変化している基本流中の、振幅がゆっくり変化している擾乱の波を考えれば

$$\bar{\mathbf{I}} = C_g \bar{\alpha} \quad (84)$$

であることも示される。

次に、簡単の為に、今、 $V = 0$  として、

$$\Lambda = -\frac{\partial Q}{\partial y} / U$$

であることを考慮すると、(83) 式は

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) - \frac{U^2}{2 \frac{\partial Q}{\partial y}} \left( q' + \frac{\partial Q}{\partial y} \psi' \right)^2 \\ -\psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) \\ -\epsilon \psi' \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \end{pmatrix} \quad (85)$$

と書けることがわかる。また、

$$\alpha = e - UA \quad (86)$$

となる事がわかる。これらの表式は、後で利用する。

## 8 位相依存性のない flux の定式化

空間または時間平均をしないで、準地衡性波動の為の位相依存性のない波の活動度フラックスを導出する方法は、実は簡単な発想に基づいている。もし、擾乱の流線関数 ( $\psi'$ ) がサイン波に比例する場合、準地衡性の波のエンストロフィとエネルギーは、各々サイン波の二乗とコサイン波の二乗に比例する。すると、波のエンストロフィに比例する量とエネルギーに比例する量を適切に組み合わせると、空間または時間平均操作をしないで波の位相に依存しない物理量になることが期待できる。具体的には、エンストロフィを基本場の渦位 (PV) 勾配の大きさと割った量  $A$  と、エネルギーを波固有の位相速度で割った量  $\mathcal{E}$  の二つを取り扱う。東西平均した  $A$  は、偽運動量 (pseudomomentum) と呼ばれる物理量である (例えば Andrews and McIntyre 1976)。一方、東西平均した  $\mathcal{E}$  も、Uryu (1974) で示されたように、偽運動量であることが示される。すなわち、波束が射出 (吸収) されるときに基本流に付け加えられる (からさしひかれる) 二次のオーダの西風運動量である。ここで考える位相依存しない物理量  $M \equiv (A + \mathcal{E})/2$  は、偽運動量と解釈できることを後に触れる。



log-p 座標系  $\beta$ -平面で、準地衡渦位 PV ( $q$ ) の保存則は以下のように書ける。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = s; \quad q = f_0 + \beta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (87)$$

ここで、速度  $(u, v)^T = \mathbf{u} = (-\psi_y, \psi_x)^T$  であり、 $s$  は非保存項である。また、 $f = f_0 + \beta y$  はコリオリパラメータ、鉛直座標は  $z = -H \ln p$  であり、 $p = (\text{pressure}/1000\text{hPa})$ 、 $H$  はスケールハイトである。また、 $N^2 = \frac{R_a p^\kappa}{H} \frac{\partial \theta}{\partial z}$  は浮力振動数の 2 乗である。 $\theta$  は温位、 $R_a$  は気体定数、 $\kappa$  は  $R_a$  を定圧比熱で割ったものである。

ここで、東西非一様な基本流  $\mathbf{U} = (U, V, 0)^T$  中のオーダ  $\epsilon$  の微小振幅の擾乱を考える。

$$u = U(x, y, z) + u', \quad v = V(x, y, z) + v', \quad \psi = \Psi(x, y, z) + \psi', \quad q = Q(x, y, z) + q' \quad (88)$$

すると、 $O(\epsilon^2)$  の項を無視すると、線形化された PV 方程式は、擾乱渦位を  $q'$  として

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla_H q' + \mathbf{u}' \cdot \nabla_H Q = s'; \quad q' = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{N^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right), \quad (89)$$

のように書ける。ただし、 $\nabla_H$  は水平方向の gradient operator である。

ここで、波の形をした擾乱を考えるとする。その波の、基本流  $\mathbf{U}$  方向への位相速度を  $C_P$ 、波の energy を  $e = (\psi_x'^2 + \psi_y'^2 + (f_0 \psi_z'/S)^2) / 2$  とする。ただし、添字は偏微分を表す。このとき、 $A$  と  $\mathcal{E}$  を各々  $A \equiv p q'^2 / (2 |\nabla_H Q|)$ 、 $\mathcal{E} \equiv p e / (|\mathbf{U}| - C_P)$  のように定義する。また、以下、 $C_U$  を、基本流  $\mathbf{U}$  の方向の位相伝播の、 $x$ -軸 及び  $y$ -軸への射影とする。すなわち、

$$C_U = C_P \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} = \left( \frac{U}{|\mathbf{U}|} C_P, \frac{V}{|\mathbf{U}|} C_P, 0 \right)^T \quad (90)$$

である。もし、 $\mathbf{U}$  が東西一様であれば、 $C_P$  は zonal な位相速度である事に注意されたい。

偽運動量に基づく波の活動度は、東西一様な基本場においてのみ、厳密に保存する。今考えたいのは、東西非一様な基本場であるから、ここでは、近似的な保存関係を導くことにする。そのためには、以下のような近似を必要とする。まず、基本場は定常で、かつ強制されていないとする。すなわち、 $\mathbf{U} \cdot (\nabla_H Q) \approx 0$  である。よって、 $\mathbf{n}$  を、PV の勾配方向の単位ベクトルとしたとき、 $\mathbf{n} \equiv \nabla_H Q / |\nabla_H Q| \approx \gamma (-V, U, 0)^T / |\mathbf{U}|$  という関係が成り立つ。今の場合、 $\gamma = 1$  である。何故なら、基本流が “pseudoeastward” (Andrews 1984, Plumb 1986) であるからである。二番目に、WKB 近似を仮定する。すなわち、基本場は、水平方向及び鉛直方向に非常にゆっくり変化していて、その変化のスケールは、擾乱の対応する各々のスケール (波長) よりも十分に大きいという事である。具体的には、 $|\nabla_H Q|$ 、 $|\mathbf{U}|$  それに  $\mathbf{n}$  が空間的に「ゆっくり」変化しているという事である。さらに、位相速度  $C_P$  が、基本流  $\mathbf{U}$  の方向にほとんど変化しないという仮定も行う。

(89) 式の両辺に  $p q' / |\nabla_H Q|$  を掛けると、 $A$  に関する方程式を得る。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + p \left[ \frac{\mathbf{U} \cdot \nabla_H q'^2}{2 |\nabla_H Q|} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' q' \right] = D_1, \quad (91)$$

$D_1 = p s' q' / |\nabla_H Q|$  である。今の場合東西非一様な基本場なので、前述した WKB 近似を適用すると、 $A$  の近似的な保存則として

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} + C_U A) + \nabla \cdot \mathbf{N}^{(1)} = D_1. \quad (92)$$

を得る。ここで、 $N^{(1)}$  と  $E$  は、各々

$$N^{(1)} \equiv (U - C_U)A, \quad p\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'q' \approx \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{p}{|\mathbf{U}|} \begin{pmatrix} U(\psi_x'^2 - e) + V\psi_x'\psi_y' \\ U\psi_x'\psi_y' + V(\psi_y'^2 - e) \\ \frac{f_0^2}{N^2}\{U\psi_x'\psi_z' + V\psi_y'\psi_z'\} \end{pmatrix} \quad (93)$$

のような表式である。添字は偏微分をあらわす。東西一様な基本場の場合は ( $V = 0$ )、WKB 近似は必要なく、ゆえに (92) は  $A$  に関する厳密な保存則となる。また、(92) は、Plumb (1986) の (2.19) 式と等価であることに注意されたい。

次に、(89) 式の両辺に  $p\psi'/(|\mathbf{U}| - C_P)$  をかけて、 $\mathcal{E} \equiv p\psi'/(|\mathbf{U}| - C_P)$  に関する以下のような方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - p \frac{(\mathbf{k} \times \nabla_H \psi') \cdot (\psi' \nabla_H Q)}{|\mathbf{U}| - C_P} \\ - p\psi' \nabla_H q' \cdot \left( \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} + \frac{C_U}{|\mathbf{U}| - C_P} \right) + \frac{\nabla \cdot \mathbf{R}^{(1)}}{|\mathbf{U}| - C_P} = D_2 \end{aligned} \quad (94)$$

ここで、 $D_2 = -ps'\psi'/(|\mathbf{U}| - C_P)$  であり、 $\mathbf{k}$  は鉛直方向への単位ベクトルである。また、 $\mathbf{R}^{(1)} = p \left( -\psi'\psi'_{xt}, -\psi'\psi'_{yt}, -\frac{f_0^2}{N^2} \psi'\psi'_{zt} \right)^T$  である。ここで、 $A$  の保存則の時と同様に、前出の近似を適用すると、 $\mathcal{E}$  に関する近似的な保存則を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \nabla \cdot (\mathbf{H} + C_U \mathcal{E}) + \nabla \cdot \mathbf{N}^{(2)} = D_2 + \frac{R}{|\mathbf{U}| - C_P}, \quad (95)$$

ただし、 $\mathbf{H}$  は、

$$-p \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} \cdot (\psi' \nabla_H q') \approx -p\mathbf{n}\psi'(\mathbf{k} \times \nabla_H q') \approx \nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \frac{p}{|\mathbf{U}|} \begin{pmatrix} U(e - \psi'\psi'_{xx}) - V\psi'\psi'_{xy} \\ V(e - U\psi'\psi'_{xy}) - V\psi'\psi'_{yy} \\ -\frac{f_0^2}{N^2}\{U\psi'\psi'_{xz} + V\psi'\psi'_{yz}\} \end{pmatrix} \quad (96)$$

という表式である。また、強制のない基本流において、(94) 左辺の第二項は、以下の様な近似的な関係式を満たす。

$$p \frac{(\mathbf{k} \times \nabla_H \psi') \cdot (\psi' \nabla_H Q)}{|\mathbf{U}| - C_P} \approx \nabla \cdot \mathbf{N}^{(2)} = \nabla \cdot \frac{(\mathbf{k} \times \nabla_H Q)\psi'^2}{2(|\mathbf{U}| - C_P)} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{U}}{2|\mathbf{U}|} \frac{|\nabla_H Q|\psi'^2}{(|\mathbf{U}| - C_P)} \quad (97)$$

である。残差項  $R$  は

$$R = p \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{U}{|\mathbf{U}|} C_P \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{V}{|\mathbf{U}|} C_P \frac{\partial e}{\partial y} \right) + p\psi' \left( \frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{U}{|\mathbf{U}|} C_P \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{V}{|\mathbf{U}|} C_P \frac{\partial q'}{\partial y} \right) \quad (98)$$

と書け、位相速度  $C_P$  の擾乱が、ほとんど平面波であるとするならば、 $R = 0$  であることが分かる。また、ここでも、東西一様な基本場であれば、以上のような近似は必要なく、(95) は厳密に正確な関係となる。

ここで、

$$M \equiv \frac{1}{2}(A + \mathcal{E}) = \frac{p}{2} \left( \frac{q'^2}{2|\nabla_H Q|} + \frac{e}{|\mathbf{U}| - C_P} \right). \quad (99)$$

で定義される物理量  $M$  を定義する。平面波の形をした擾乱、すなわち  $\psi' = \psi_0 \exp(z/2H) \sin(kx + ly + mz - \omega t)$  のとき、 $M$  は近似的に

$$M \approx \frac{|\mathbf{K}|^4 \psi_0^2}{4|\nabla_H Q|} \quad (100)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{K} = (k, l, (f_0 S^{-1})m)^T$  は波数ベクトルであり、また、 $H^{-1} \ll m$  が仮定されている。この関係は、やはり、東西一様な基本流に対しては、厳密に成立する関係式である。 $M$  は、東西非一様な基本場での微小振幅の準地衡性擾乱の偽運動量 (pseudomomentum) と解釈することができる。 $M$  は、一切の時間または空間平均をとらずとも、波の位相成分に依存しない。

この  $M$  の保存則は、(92) と (95) をたしあわせることにより得られる。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{W} = D' - \nabla \cdot \mathbf{N} + \frac{R}{2(|\mathbf{U}| - C_P)}, \quad (101)$$

ここで、 $D' = (D_1 + D_2)/2 \equiv D_0 s'$ 、 $\mathbf{N} = (\mathbf{N}^{(1)} + \mathbf{N}^{(2)})/2$ 、そして  $\mathbf{W} = (\mathbf{E} + \mathbf{H})/2 + C_U M$  である。 $\mathbf{W}$  の正確な表式を導く前に、 $\nabla \cdot \mathbf{N}$  が非保存項の一部と解釈できる事を示そう。 $\mathbf{N}^{(1)}$  と  $\mathbf{N}^{(2)}$  をたしあわせて、

$$\mathbf{N} = \frac{p}{4} \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} \left( \frac{q'}{|\nabla_H Q|} - \frac{\psi'}{|\mathbf{U}| - C_P} \right) [ (|\mathbf{U}| - C_P) q' + |\nabla_H Q| \psi' ]. \quad (102)$$

という関係式を得る。平面波の極限で、(89) 式などから、

$$\nabla \cdot \mathbf{r}' \equiv \nabla \cdot \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} [ (|\mathbf{U}| - C_P) q' + |\nabla_H Q| \psi' ] \approx s', \quad (103)$$

という関係式を得ることが出来る。すると、(102) は、 $\mathbf{N} = \frac{1}{2} \mathbf{r}' D_0$  のように簡単化できる。ここで、 $D_0$  は、(101) 式 (の一行下) で定義されている量である。このように、 $\mathbf{N}$  は強制項に関連する量であり、非保存項とみなせることが分かる。強制のない基本場中の自由ロスビー波動であれば ( $s' = 0$ )、 $\nabla \cdot \mathbf{N} = 0$  となる。

非保存項を、 $D_T = D' - \nabla \cdot \mathbf{N} = (D_0 \nabla \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r}' \cdot \nabla D_0)/2$  のように新たに定義し、また、平面波の極限で位相速度  $C_P$  の擾乱に対しては  $R = 0$  であることに注意すると、結局、以下のような  $M$  に関する近似的な保存則を得ることが出来る。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{W} = D_T. \quad (104)$$

$\mathbf{W}$  の表式は、 $\mathbf{W}_s \equiv (\mathbf{E} + \mathbf{H})/2$  とすると、 $\mathbf{W} = \mathbf{W}_s + C_U M$  であることに注意し、

$$\mathbf{W} = \frac{p}{2|\mathbf{U}|} \left( \begin{array}{c} U(\psi_x'^2 - \psi' \psi_{xx}') + V(\psi_x' \psi_y' - \psi' \psi_{xy}') \\ U(\psi_x' \psi_y' - \psi' \psi_{xy}') + V(\psi_y'^2 - \psi' \psi_{yy}') \\ \frac{f_0^2}{N^2} \{ U(\psi_x' \psi_z' - \psi' \psi_{xz}') + V(\psi_y' \psi_z' - \psi' \psi_{yz}') \} \end{array} \right) + C_U M. \quad (105)$$

であることが分かる。この保存則 (104) 式は、一切の平均をとらず導かれたことに注意されたい。(105) 式で定義された  $\mathbf{W}$  は、平面波の極限において、位相依存しない偽運動量フラックスである。すなわち、空間または時間平均をとらずとも、波の位相成分を持たない性質を持っている<sup>2</sup>。ゆえに、 $\mathbf{W}$  は東西非一様な基本場中の停滞性そして移動性の擾乱のスナップショットの解析に適していることが分かる。もっとも、移動性擾乱に関しては、位相速度  $C_P$  を何らかの方法で求めなければならぬ (停滞性擾乱ならもちろん  $C_P = 0$  である)。擾乱の位相が伝播しているという効果は  $C_U M$  という項にのみ現れ、残りの  $\mathbf{W}_s$  の表式は、Takaya and Nakamura (1997) により導かれた停滞性擾乱に対する wave-activity flux と等しい (彼らの表式では  $\mathbf{W}$ )。また、 $V = 0$

<sup>2</sup> さらに、非保存項  $D_T = (D_0 \nabla \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r}' \cdot \nabla D_0)/2$  の形も、 $\mathbf{W}$  の各成分の形に似ている。 $D_T$  を偽運動量  $M$  に関する「位相依存しない強制項」と解釈することも可能かも知れない。

の東西一様な基本場においては ( $U = U(y, p)$ )、平面波の極限で、(104) 式は厳密な保存則となる。そのとき、 $C_P = 0$  ならば  $W$  は、 $F_s$  (Plumb, 1985) に帰着する。このように、(104) 式は、東西非一様な基本場における、微小振幅準地衡性擾乱の位相依存しない波の活動度偽運動量保存則の一般化であると解釈できる。

また、簡単な計算により、東西非一様な基本場中のロスビー波の群速度を  $C_g$  とすると、(100) 式を用いて、平面波の極限で  $W = C_g M$  という関係式が成立していることが分かる。すなわち、 $W$  は、局所的な (すなわち、ローカルに定義される) 三次元群速度と平行であることが分かる。

## 9 位相依存性のない波の活動度フラックスの物理的意味

前章において、位相依存性のない波の活動度フラックス  $W$  を導出した。しかしながら、 $W$  の物理的意味は、これがロスビー波の局所的な三次元群速度  $C_g$  に平行であるという事以外はまだ明らかになっていない。この章では、位相依存性のない波の活動度フラックス  $W$  または Plumb (1985) の  $F_s$  (これは基本場東西一様の時) の各成分の物理的意味を考察する。さらに、波の位相成分に依らない表式を用いて、一般化した transformed Eulerian-mean (TEM) 方程式を導出する。これは、伝播するロスビー波束に伴う二次の平均流をスナップショットで表すものである。

まず、フラックスの各成分の物理的意味から考察を始めよう。簡単のために、基本場は東西一様 ( $V = 0$ ) とする。この場合、偽運動量は厳密に保存する。また、ここで導出したフラックス  $W_s$  は Plumb (1985) の  $F_s$  の形に帰着する。

準地衡系において、線形化した南北方向の運動量方程式は、

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + f(u' + u_{(a)}) = -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \quad (106)$$

のように書ける。ただし、 $u_{(a)}$  は擾乱に伴う東西方向の非地衡風成分である。擾乱成分はプライム ( $'$ ) によって表現してある。 $\beta$ -平面を東西方向に位相速度  $c$  で伝播している、非強制の波に関し、上の方程式は

$$(U - c) \frac{\partial v'}{\partial x} + f_0 u_{(a)} + \beta y u' = 0 \quad (107)$$

のように変形できる。すると、波のリッジまたはトラフ付近では、近似的な関係式  $\psi'_{xx} = v'_x \simeq -f_0 u_{(a)} / (U - c)$  が成立することが分かる。これは、リッジまたはトラフ付近で東西方向の非地衡風成分が存在していることを示している。同様に、線形化された東西方向の運動量方程式ならびに熱力学方程式から、 $\psi'_{xy} = -u'_x \simeq -f_0 v_{(a)} / (U - c)$  と  $f_0 \Theta_z \psi'_{xz} / N^2 = \theta'_x \simeq -\Theta_z w_{(a)} / (U - c)$  という関係式を得る。ここで、 $v_{(a)}$  と  $w_{(a)}$  は各々、南北方向ならびに鉛直方向の、擾乱に伴う非地衡風成分である。 $U > c$  であれば、

$$(-\psi' \psi'_{xx}, -\psi' \psi'_{xy}, -\frac{f_0^2}{N^2} \psi' \psi'_{xz})^T \simeq (\Phi' u_{(a)}, \Phi' v_{(a)}, \Phi' w_{(a)})^T / (U - c)$$

という関係が成立する。ただし、 $\Phi'$  はジオポテンシャルである。よって、 $F_s$  (または  $W_s$ ) の各成分の第二項というのは、波のリッジまたはトラフの位相線上でもっとも大きな寄与を持つ、三次元的な非地衡風によるジオポテンシャルのフラックスに比例することが分かる。これは、ロスビー波束の群速度  $C_g$  の方向へ、擾乱の圧力がする仕事に対応すると解釈できる (Figs. 1a と 1b)。実際、 $(-\psi' \psi'_{xx}, -\psi' \psi'_{xy}, -\frac{f_0^2}{N^2} \psi' \psi'_{xz})^T$  は、平面波の極限で、 $C_g$  の方向を指す。

次に、 $F_s$  ( $W_s$ ) の各成分の第一項の物理的意味を考察しよう。波束の東西方向への伝播をあらわす  $v'^2$  から考察する (Fig. 1c)。 $\psi'$ -場における「節」の位相線上の点 E における南北運動量

の南北方向へのフラックス ( $v'^2$ ) は、その南の点 B においては南向きの、北の点 D においては北向きの地衡風流速を各々作り出そうとする。地衡風流速は非発散の性質を持つから、その西の点 A と東の点 C では、各々、東向きと西向きの流れの加速が存在する。これは、点 C から点 A への、二次の西風運動量の輸送に対応する。以上の考察からも明らかのように、これは  $\psi'$ -場における「節」の位相線上でもっとも強く働く機構であり、また、運動量輸送の向きは東向の群速度とは逆である。 $F_s$  ( $W_s$ ) の南北成分に含まれる  $u'v'$  の解釈はもっと簡単である。これは、南北方向の群速度とは逆向きの、二次の西風運動量の南北方向の輸送を表している (Fig. 1c)。 $F_s$  ( $W_s$ ) の鉛直成分は南北方向の温位フラックス  $v'\theta'$  を含む。上向き伝播している波束では、極向きの熱輸送が西風基本場の鉛直方向のシアを弱めるように働く (Fig. 1b)。これは、結局、二次の西風運動量の南向き輸送である。このように、 $F_s$  の第一項は、ロスビー波束の伝播に伴う、群速度の向きとは逆の方向への西風運動量の輸送を表している。このメカニズムは、主に  $\psi'$ -場における「節」の位相線上で起っている。

以上の議論は、東西非一様な基本場中を伝播しているロスビー波束をあらゆる flux である  $W$  (または  $W_s$ ) の議論にすぐ拡張できる。このように、ロスビー波束の伝播をスナップショットで見ると、以上の 2 つの力学的なメカニズムが重ねあわさっていることが分かる。これらの 2 つのメカニズムは、お互い違った位相成分を示す。すなわち、 $\psi' = \psi_0 \sin(kx + ly + mz - \omega t)$  の様な擾乱を考えたとき、リッジ及びトラフ上の非地衡風成分によるジオポテンシャルフラックスはサインの二乗、 $\psi'$ -場の「節」の位相線上の地衡風成分によるフラックスによる「後ろ向き」西風運動量の輸送はコサインの二乗の位相依存性を持つ。平面波の極限で、これらを足し併せれば位相依存成分は消え、これがすなわち、 $F_s$  と  $W$  が位相依存性のないフラックスであることの原因である。

最後に、準地衡性擾乱と基本場との相互作用を考えよう。Plumb (1986) と同様の議論を展開するが、彼の議論との大きな違いは、彼の議論は時間平均したフィードバックを考えるのに対し、ここでは、上で議論したような「位相依存性のない」表式を用い、瞬間的に見たときの基本場へのフィードバックを考える点にある。基本場西風運動量の瞬間的に見たときの  $O(\epsilon^2)$  の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{D^{(0)}U^{(2)}}{Dt} - fV^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} u'^2 - \frac{\partial}{\partial y} u'v' \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \psi' \psi'_{yy} - \frac{\partial}{\partial y} \psi' \psi'_{xy}, \end{aligned} \quad (108)$$

のように書けるであろう。ここで、添字 (2) は、基本場の二次のオーダの変化を表し、さらに  $D^{(0)}U^{(2)}/Dt \equiv \partial U^{(2)}/\partial t + (\mathbf{U} \cdot \nabla)U^{(2)} + (\mathbf{U}^{(2)} \cdot \nabla)U$  というオペレータを定義している。ここで、(108) の右辺は、二行とも、平面波の極限で、位相依存性を持たないことに注意されたい。この二行の等価な表現を組み合わせると、右辺の、擾乱によるフィードバックの項はフラックスの収束発散の形にかけて、

$$\frac{D^{(0)}U^{(2)}}{Dt} - fV^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (-u'^2 + \psi' \psi'_{yy}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u'v' + \psi' \psi'_{xy}) \quad (109)$$

となる。ここで、(109) 式の右辺は、全体としてだけでなく、各成分そのもの (括弧の中身) も、波の位相に依らない量になっていることに是非注意されたい。(109) 式は、簡単な変形の結果、以下のように書ける。

$$\frac{D^{(0)}U^{(2)}}{Dt} - fV^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} = \frac{1}{2} (\psi'_x q' - \psi' q'_x)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\psi_x'^2 - \psi' \psi_{xx}') + (\psi_y'^2 - \psi' \psi_{yy}') \right] \\ - \frac{1}{2p} \frac{\partial}{\partial z} p \left[ \frac{f_0^2}{N^2} (\psi_x' \psi_z' - \psi' \psi_{xz}') \right].$$

同様に、基本場の南北運動量と熱力学の方程式の二次の方程式を考察し、それらをまとめると、

$$\frac{D^{(0)}U^{(2)}}{Dt} - f\mathbf{k} \times \mathbf{U}_{(a)}^* = \mathbf{G} + \mathbf{X}, \quad (110)$$

$$\frac{D^{(0)}\Theta^{(2)}}{Dt} + W_{(a)}^* \frac{d\Theta}{dz} = Q, \quad (111)$$

の様な方程式系を得るであろう。ここで、 $\mathbf{X}$  と  $Q$  は、各々、摩擦項と非断熱加熱に関連する非保存項である。この系は、位相依存性を持たない、三次元の TEM 方程式系と解釈できるものである。(110) 式の  $\mathbf{G}$  は、基本場への擾乱によるフィードバックの項である。これは、位相依存性のない表式であり、

$$\mathbf{G} = -\frac{p}{2} \mathbf{k} \times (\mathbf{u}'q' - \psi' \mathbf{k} \times \nabla_H q') \equiv -\frac{p}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{P} \quad (112)$$

のように書ける。(110) 式の  $\mathbf{U}_{(a)}^*$  は、位相依存性のない形の三次元の残差循環の表式であり、

$$\mathbf{U}_{(a)}^* = (U_{(a)}^*, V_{(a)}^*, W_{(a)}^*)^T = \mathbf{U}_{(a)}^{(2)} + \frac{1}{p} \nabla \times p\mathbf{R}, \quad (113)$$

のように表される。ただし、 $\mathbf{U}_{(a)}^{(2)} = (U_{(a)}^{(2)}, V_{(a)}^{(2)}, W_{(a)}^{(2)})^T$  は、二次のオーダの Euler 的な非地衡風流である。(113) 右辺の第二項は、微小振幅の極限でストークスドリフトに関係する項である。そこに含まれる位相依存性のないベクトル  $\mathbf{R}$  は、

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(v'\theta' - \psi'\theta'_x)/\Theta_z \\ (u'\theta' + \psi'\theta'_y)/\Theta_z \\ [(v'^2 - \psi'\psi'_{xx}') + (u'^2 - \psi'\psi'_{yy}')] / f \end{pmatrix}. \quad (114)$$

のように書ける。以上の式 (110), (111), (112), (113), そして (114) は、Plumb (1986) の (4.3), (4.4), (4.5) そして (4.6) に対応する関係である。ただし、すでにのべたように、Plumb (1986) の関係式は時間平均をとっているのので、実際には停滞性擾乱の解析に適當でない。一方、ここで導いた表式は、空間、時間平均をとらずとも位相依存成分を持たない。であるから、波束に伴う基本流へのフィードバックをスナップショットで評価することができる。

基本場 PV 勾配 ( $\nabla_H Q$ ) との直交単位ベクトル  $\mathbf{s}$  は  $\mathbf{s} \equiv \mathbf{k} \times \mathbf{n}$  と定義できる。すると、 $\mathbf{G}$  は以下のように変形できて、

$$\mathbf{G} = -\frac{p}{2} [(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})\mathbf{s} - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{s})\mathbf{n}]. \quad (115)$$

と書ける。(93), (96) の関係と、 $\mathbf{W}_s \equiv (\mathbf{E} + \mathbf{H})/2$  の関係式から、 $\beta$ -平面上の、強制のない基本場中で、

$$\nabla \cdot \mathbf{W}_s \approx \frac{p}{2} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}'q' - \psi' \mathbf{k} \times \nabla_H q') = \frac{p}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (116)$$

という近似的な関係が成り立つ。すると、(115) 式の右辺第一項は、 $\nabla \cdot \mathbf{W}_s$  に関連した項であることが分かる。これは、三次元的に伝播する波束の収束発散に伴う、基本場へのフィードバックをあらわす項である。Plumb (1986) でも指摘されていることであるが、 $\nabla \cdot \mathbf{W}_s$  は、基本場の PV の等値線に沿った方向の基本流の加速減速に寄与し、擾乱の引き起こす全フィードバックを必ずしも表しているわけではないことに注意する必要がある。

## 10 適用

この章では、実際に、 $W$  をプロットしてみて、このフラックスの有効性を確認する。まず、球面上の二次元非発散順圧モデルを用い、臨界緯度での定常ロスビー波の振舞いを研究した Enomoto and Matsuda (1999) のデータを用い、中高緯度を主眼に、ロスビー波束の伝播を表現できるか確認する。ロスビー波の強制は、中緯度西風ジェットの出目付近 [40° N, 90° E] を中心にガウス型の発散として与えられている (Fig. 2a)。Fig. 2b には、積分をはじめてから 14 日後の流線関数  $\psi'$  の応答が描かれている。波束が強制領域から生まれ、二つの伝播方向に分流しているように見える。一つは北半球側をほぼ大円に沿って伝播しているように見える。 $W$  を、 $C_P = 0$  としてプロットしてみると、2つの波束伝播に沿ってフラックスが描かれている様子が良く分かる (Fig. 2c)。北側の波束に沿って、 $W$  は西風ジェットを横切り、ジェットの入口付近の西風の弱い領域の南側に収束している。南に伝わる flux は、赤道域の西風領域を通り抜け、南半球側にまで達している。南半球中緯度を伝播する波束はやはり大円を通り、西風ジェットの北側の側面に収束している。 $W$  は、強制域から射出され、 $\psi'$  の正負の各々の中心を通っている。明らかに  $W$  は波束伝播を表現しており、南半球中緯度で観測される波列が、北半球中緯度で強制されたロスビー波束が伝播してきた結果であることも分かる<sup>3</sup>。実は、この実験における東西非一様性はそれほど強くないので、東西一様な基本場中で導出された Plumb (1985) の  $F_s$  をプロットしてみても、中緯度の波束伝播の様子は、 $W$  と一見さほど変わらない。ただし、この実験では、赤道域の東西平均した基本場西風は負となるので、理論的には  $F_s$  をその領域でプロットできなくなり、 $F_s$  では赤道を越える波束伝播は表現できないという事になる。また、Figs. 1c と 1d において重要な点は、 $W$  と  $\nabla \cdot W$  が、明らかに波の位相には依存しない分布をしており、波束伝播を表現できていることにある。実際、 $W$  は群速度に平行に分布しているように見える。

次に、移動性擾乱について検証する。データは、NCEP/NCAR 再解析データの高度場と温度場を用いる。データには、高周波フィルタをかけ、周期 8 日以下の擾乱を取り出している。また、 $W$  は、p-面で評価している。期間は、北太平洋上において強い移動性擾乱の観測された 1983 年 11 月 20 日 0 Z のものを用いた。

Fig.3 は、その時間における flux の三次元分布を、その収束発散や、短周期擾乱波束に伴う高度場偏差とともに plot したものである。 $W$  の水平成分は 300-hPa, 鉛直成分は 600-hPa のものである。この例では、ややノイズが多いものの、 $W$  の分布に位相依存性は少なく、波束伝播を非常に良く表していることが分かる。また、 $W$  の上向き鉛直成分が、傾圧性の高い西太平洋域に見られ、波束が下層から上層に伝わり、さらに東方に伝播していることが分かる。波束は、 $|U| - C_P$  が正の領域を導波管のように伝わっている。

<sup>3</sup> 赤道域東風領域にも流線関数偏差が見られるが、これは、当然、定常ロスビー波束の伝播によるものではない。これらは、Enomoto and Matsuda (1999) によると、砕波によって赤道西風域からちぎれた一部の相対渦度が基本場の東風で移流されたものである。

## 11 結論

ここでは、スナップショットの波束伝播を表すことの出来る波の活動度 flux  $W$  を導出した。この flux は、東西非一様な基本場中の移動性及び停滞性準地衡性擾乱の波束伝播をスナップショットで表現することができる。この flux は、波のエンストロフィに比例する量  $A$  とエネルギーに比例する量  $\mathcal{E}$  の線形結合である  $M$  の保存則に関連して導出される。 $M$  は、偽運動量の東西非一様な基本場中での拡張された形と解釈される。

また、 $W$  の各項の物理的意味も明らかにした。 $\psi'$ -場で見たとき、リッジまたはトラフ付近では非地衡風ジオポテンシャル flux が、また「節」付近では群速度の向きとは逆向きの二次の西風運動量輸送が、各々波束伝播のメカニズムを担っている。これらの2つのメカニズムの重ねあわせにより、位相依存性のない波束伝播を  $W$  が表すことができる。

また、実際に  $W$  をプロットし、この flux が実際に波束伝播を表現できていることを確認した。停滞性または移動性擾乱の両方に関して、 $W$  に位相依存成分がほとんど見られないことは前述した通りである。

$W$  を導出する際に、幾つかの近似を仮定した。その仮定が、実際の flux の分布にどのように影響するかは、非常に重要な問題である。もし、仮定した近似が適切でなければ、 $W$  の分布は必ずしも波束伝播を表していないからかも知れないからである。ここではその詳細には触れないが、Takaya and Nakamura (2000) では、この問題について考察している。彼らによると、近似の導入にも関わらず、 $W$  は、少なくとも定性的には波束伝播を良く表現していると解釈できる。

以上のことから、 $W$  が、これからのデータ解析に有力なツールとなることが期待できる。実際、 $W$  は、過去2年以上にわたり、気象庁の月例気候診断に活用されている。



## Appendix: 東西非一様場中の Rossby 波の群速度

線形化された potential vorticity eq. は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + V \frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} u' + \frac{\partial Q}{\partial y} v' = 0 \quad (\text{A1})$$

擾乱を、

$$\psi' = \psi_0 \exp\{i(kx + ly + mp - \omega t)\}$$

とおく。

すると、

$$|\mathbf{K}|^2 = k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N^2} m^2$$

として、分散関係式は、

$$\begin{aligned} \omega &= kU + lV + \frac{l}{|\mathbf{K}|^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{k}{|\mathbf{K}|^2} \frac{\partial Q}{\partial y} \\ &= k(U - \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^2) + l(V + \frac{\partial Q}{\partial x} / |\mathbf{K}|^2) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

となる。ここで、基本場の方程式として、

$$U \frac{\partial Q}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (\text{A3})$$

を仮定する。すると、(A3) 式 の関係を用いて、(A2) 式を、

$$\begin{aligned} \omega &= k(U - \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^2) + l(V - \frac{V}{U} \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^2) \\ &= k(U - \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^2) + l \frac{V}{U} (U - \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^2) \\ &= (k + l \frac{V}{U}) (U - \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^2) \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

または、

$$\omega = (\frac{U}{V} k + l) (V + \frac{\partial Q}{\partial x} / |\mathbf{K}|^2) \quad (\text{A5})$$

とかきかえる事ができる。

定常ロスビー波の条件を上の式から求める。  $\omega = 0$  であるから、そのためには、

$$(U - \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^2) = 0, \quad (V + \frac{\partial Q}{\partial x} / |\mathbf{K}|^2) = 0 \quad (\text{A6})$$

または、

$$\frac{k}{l} = -\frac{V}{U} \quad (\text{A7})$$

のいずれかが成立しなければならない。(A6) 式の条件を (条件 1)、(A7) 式の条件を (条件 2) と以下呼ぶ事にする。

ここで、(条件2) で表される擾乱は、どのようなものか考察してみよう。(A1) 式 で考えると、(条件2) では、第2項と第3項、第4項と第5項とが、それぞれ打ち消しあうという事がわかる。つまり、基本場の流線関数(今の場合、 $Q$  の contour と平行)と、擾乱の流線関数とが、平行であるという事である。すなわち、この擾乱は、基本場の一部であるととらえる事もできる。

よって、以下、準停滞性擾乱の条件式としては、(条件1) のみを考える事にする。

(条件1) :

$$(U - \frac{\partial Q}{\partial y} / |\mathbf{K}|^2) = 0, \quad (V + \frac{\partial Q}{\partial x} / |\mathbf{K}|^2) = 0 \quad (\text{A8})$$

ロスビー波の群速度は、(A2) 式から、

$$C_{gx} = U + \frac{(k^2 - l^2 - (f/S)^2 m^2)(\frac{\partial Q}{\partial y}) - 2kl(\frac{\partial Q}{\partial x})}{|\mathbf{K}|^4} \quad (\text{A9})$$

$$C_{gy} = V + \frac{(k^2 - l^2 + (f/S)^2 m^2)(\frac{\partial Q}{\partial x}) + 2kl(\frac{\partial Q}{\partial y})}{|\mathbf{K}|^4} \quad (\text{A10})$$

$$C_{gp} = \frac{2km(\frac{\partial Q}{\partial y}) - 2lm(\frac{\partial Q}{\partial x})}{|\mathbf{K}|^4} \quad (\text{A11})$$

さらに、(A8) 式を用いて、準停滞性擾乱の群速度を求めると、

$$\mathbf{C}_g = \frac{1}{|\mathbf{K}|^2} \begin{pmatrix} 2k^2U + 2klV \\ 2klU + 2l^2V \\ (2kmU + 2mlV) \frac{f^2}{S^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A12})$$

となる事がわかる。

## 参考文献

(ここでは、本文中で参照した論文の他に、wave-activity flux を考える際に役に立つであろう論文も掲載してある。参考になれば幸いである。)

- Andrews, D. G., 1983: A conservation law for small-amplitude quasigeostrophic disturbances on a zonally asymmetric basic flow. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 85-90.
- , 1984: On the existence of nonzonal flows satisfying sufficient conditions for instability. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **28**, 243-256.
- , and M. E. McIntyre, 1976: Planetary waves in horizontal and vertical shear: The generalized Eliassen-Palm relation and the mean zonal acceleration. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2031-2048.
- , J.R. Holton, and C.B. Leovy, 1987: *Middle Atmosphere Dynamics.*, Academic press, 489pp.
- Chang, E. -K. M., 1993: Downstream development of baroclinic waves as inferred from regression analysis. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2038-2053.
- , I. Orlanski, 1994: On energy flux and group velocity of waves in baroclinic flows. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 3823-3828.
- Edmon, H. J., B. J. Hoskins and M. E. McIntyre, 1980: Eliassen-Palm cross sections for the troposphere. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 2600-2616. [See also *Corrigendum*, 1981: *J. Atmos. Sci.*, **38**, 1115, especially 2nd last item].
- Enomoto, T., and Y. Matsuda, 1999: Rossby wavepacket propagation in a zonally-varying basic flow. *Tellus* in press.
- Hoskins, B. J., I. N. James, and G. H. White, 1983: The shape, propagation and mean-flow interaction of large-scale weather system. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1595-1612.
- Karoly, D.J., R.A. Plumb, and M. Ting, 1989: Examples of the horizontal propagation of quasi-stationary waves, *J. Atmos. Sci.*, **46**, 2802-2811.
- Longuet-Higgins, M. S., 1964: On group velocity and energy flux in planetary wave motions. *Deep-Sea Res.*, **11**, 35-42.
- McIntyre, M. E., 1982: How well do we understand the dynamics of stratospheric warmings? *J. Meteor. Soc. Japan.*, **60**, 37-65.
- Nakamura, H., M. Nakamura, and J.L. Anderson, 1997: The role of high- and low-frequency dynamics in the blocking formation, *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 2074-2093.
- Orlanski, I., J. Sheldon, 1993: A case of downstream baroclinic development over western north america. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 2929-2950.
- Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*. 2nd ed. Springer-Verlag, 710pp.
- Plumb, R. A., 1985: On the three-dimensional propagation of stationary waves. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 217-229.
- , 1985: An alternative form of Andrews' conservation law for quasi-geostrophic waves on a steady, nonuniform flow. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 298-300.
- , 1986: Three-dimensional propagation of transient quasi-geostrophic eddies and its relationship with the eddy forcing of the time-mean flow, *J. Atmos. Sci.*, **43**, 1657-1678.
- Takaya, K., and H. Nakamura, 1997: A formulation of a wave-activity flux for stationary Rossby waves on a zonally varying basic flow. *Geophys. Res. Lett.*, **24**, 2985-2988.

——— and ——, 2000: A formulation of a phase-independent wave-activity flux for stationary and migratory quasi-geostrophic eddies on a zonally-varying basic flow. *J. Atmos. Sci.*, submitted.

Trenberth, K. E., 1986: An assessment of the impact of transient eddies on the zonal flow during a blocking episode using localized Eliassen-Palm flux diagnostics. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 2070-2087.

Uryu, M., 1974: Mean zonal flows induced by a vertically propagating Rossby wave packet. *J. Meteor. Soc. Japan.*, **56**, 1-20.