

第 13 章

順圧不安定

第 8 章でみたように安定密度成層した場では浮力を復元力とする重力波が存在し、他方、第 12 章でみたように不安定成層の場合には不安定を解消するために対流が生じる。また、第 9 章では絶対渦度保存則を束縛とする波動のロスビー波を考えたが、ここでは、それに対応する枠組みで不安定になりうる状況を考える。回転球面上の 2 次元非圧縮流体で回転軸対称な基本帯状流は、その緯度構造に依存して安定な場合と不安定な場合とがある。このように基本流の絶対渦度の水平分布に依存した流れの不安定性を順圧不安定 (barotropic instability) という。

成層圏の東進ロスビー波や熱帯域の偏東風波動など、大気中には流れの順圧不安定に起因すると考えられる波動擾乱が存在する。

13.1 支配方程式

第 9.4.1 節で導入した中緯度 β 平面上 ($f = f_0 + \beta y$) での 2 次元非圧縮流体運動を考える。 β 平面近似をした渦度方程式は (9.42) で与えられる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \psi + \frac{\partial(\psi, \Delta_2 \psi)}{\partial(x, y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (13.1)$$

ここで、 t は時刻、 (x, y) はそれぞれ、東向き、北向きの空間座標 (直交直線座標系) であり、2 次元ラプラシアンを $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 、2 次元ヤコビアンを $\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$ と表記している。これは流線関数 $\psi(x, y, t)$ について閉じた方程式である。水平速度 (u, v) は流線関数より、

$$(u, v) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (13.2)$$

で与えられる。相対渦度を $\zeta \equiv \Delta_2 \psi$ 、絶対渦度を $q \equiv \zeta + f_0 + \beta y$ とすると、上の渦度方程式は、

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(x, y)} = \frac{Dq}{Dt} = 0, \quad (13.3)$$

となり、絶対渦度が流れとともに保存されるラグランジュ的な保存量となる。

境界条件としては, x 方向には長さ L で周期境界とし, y 方向には $y = \pm W/2$ にスリップする壁を置く:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{東西} & : \quad \psi(x, y, t) = \psi(x + L, y, t), \\ \text{南北} & : \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{at } y = \pm W/2, \end{array} \right\} \quad (13.4)$$

13.2 帯状流の線型安定性

東西方向に流れる流れを帯状流 (zonal flow) という. 帯状流が東西に構造をもたなければ, それは支配方程式 (13.1) の定常解となっている. これを基本解として, 流れの安定性解析を行なう. すなわち, 積分定理を求め, 固有値解析を行なうことにする.

13.2.1 基本場: 南北 1 次元定常帯状流

東西方向に構造を持たない南北 1 次元の定常な帯状流 $\bar{\psi}(y)$ は, 支配方程式 (13.1) の解となっている. この解を基本場として, その安定性を解析する. 基本場の速度と絶対渦度は,

$$\bar{u}(y) = -\frac{d\bar{\psi}}{dy}, \quad (13.5)$$

$$\bar{v} = 0, \quad (13.6)$$

$$\bar{q} = -\frac{d\bar{u}}{dy} + f_0 + \beta y = \frac{d^2\bar{\psi}}{dy^2} + f_0 + \beta y, \quad (13.7)$$

である.

13.2.2 擾乱方程式

南北 1 次元の定常帯状流 $\bar{\psi}(y)$ を基本場として, それに加えた微小な擾乱 $\psi'(x, y, t)$ の時間発展を考える. $\psi(x, y, t) = \bar{\psi}(y) + \psi'(x, y, t)$ を (13.1) に代入し, 擾乱の 2 次の項を無視して線型化する:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta_2 \psi' + \left(\beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (13.8)$$

ここで,

$$\psi'(x, y, t) = \text{Re} \left[\Psi(y) e^{ik(x-ct)} \right], \quad (13.9)$$

という型の正弦波解を仮定すると, $\Psi(y)$ に対する微分方程式が次のよう得られる:

$$(\bar{u} - c) \left(\frac{d^2\Psi}{dy^2} - k^2\Psi \right) + \frac{d\bar{q}}{dy} \Psi = 0. \quad (13.10)$$

ただし, $d\bar{q}/dy = \beta - d^2\bar{u}/dy^2$ である.

境界条件 (13.4) は擾乱に対して,

$$\left. \begin{array}{ll} \text{東西} & : \quad k = 2\pi n/L, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \text{南北} & : \quad \Psi(-W/2) = \Psi(W/2) = 0, \end{array} \right\} \quad (13.11)$$

となる.

2 階線形常微分方程式 (13.10) は Ψ に対して $y = \pm W/2$ での (2 つの) 境界条件 (13.11) を与えることで、固有値を c とする固有値問題とみなすことができる. $c = c_r + ic_i$ (c_r, c_i は実数) として、 $k > 0$ の場合には (13.9) の時間依存性より、

$$\begin{cases} c_i < 0 & \text{安定,} \\ c_i = 0 & \text{中立,} \\ c_i > 0 & \text{不安定,} \end{cases} \quad (13.12)$$

と、 c_i の符号により基本場の安定性を判断できる.

13.2.3 積分定理

(13.10) の両辺を $-(\bar{u} - c)$ で割り、 Ψ の複素共役 Ψ^* をかけて、南北に積分する. $y = \pm W/2$ での境界条件を用いると、

$$\int_{-W/2}^{W/2} \left(\left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 \right) dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{\bar{u} - c} \frac{d\bar{q}}{dy} dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{d\bar{q}}{dy} (\bar{u} - c^*) dy, \quad (13.13)$$

となる. $c = c_r + ic_i$ として、この両辺の虚部をとると、

$$0 = c_i \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{d\bar{q}}{dy} dy, \quad (13.14)$$

となる. これより、 $-W/2 \leq y \leq W/2$ で $d\bar{q}/dy \neq 0$ ならば、すなわち、絶対渦度 \bar{q} が y の単調な関数であるならば、この基本場は中立 ($c_i = 0$) である. つまり、不安定 ($c_i > 0$) となる必要条件是「基本場の絶対渦度の緯度微分 $d\bar{q}/dy$ が領域 ($-W/2 \leq y \leq W/2$) 内で符号を変える」として与えられる. このような基本流が不安定となる必要条件是、静止系ではレイリー (Rayleigh)、回転系ではクオ (Kuo) によって導かれたので、レイリークオの条件と呼ばれている. また、この条件が満たされて生じ得る不安定は順圧不安定 (barotropic instability) またはシアア不安定 (shear instability) と呼ばれている.

図 13.1 はレイリークオの条件で安定性が判別できる順圧流である. 線型シアア (上段) の場合、 $\bar{q} = \beta =$ 一定なので $c_i = 0$ でなければならず、安定 (中立安定) の十分条件を満たしている. (中段) のような余弦関数型ジェットの場合にも、絶対渦度 \bar{q} は単調増大関数であり中立安定である. 一方、同じ余弦関数型ジェットの場合でも (下段) の例では、 $d\bar{q}/dy$ が領域内で符号を変えるので、基本流が不安定となる必要条件を満たしている. 実際に固有値解析をすると、この流れが不安定であることがわかる.

つぎに、(13.13) の両辺の実部をとると、

$$\int_{-W/2}^{W/2} \left(\left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 \right) dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{d\bar{q}}{dy} (\bar{u} - c_r) dy, \quad (13.15)$$

となり、不安定 ($c_i > 0$) の場合、これは (13.14) を用いて、

$$\int_{-W/2}^{W/2} \left(\left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Psi|^2 \right) dy = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|\Psi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \frac{d\bar{q}}{dy} \bar{u} dy, \quad (13.16)$$

と書き直せる. すなわち、レイリークオの条件とは別に、不安定の必要条件として (13.16) 式の左辺が正であることを課すことができる. つまり、「 $\frac{d\bar{q}}{dy} \bar{u} > 0$ となる領域が存在しなければならない」という条件であ

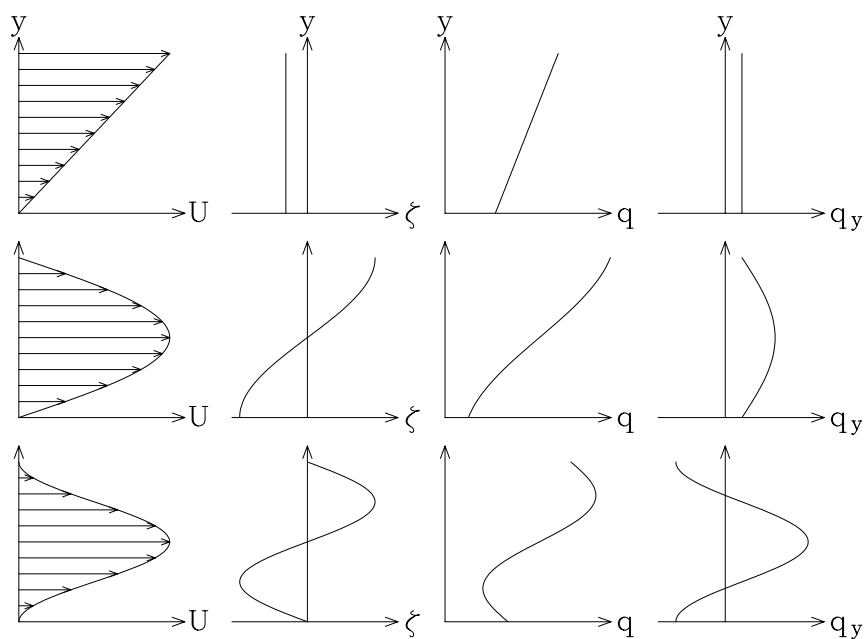


図 13.1: レイリー-クオの条件で判別できる順圧安定な流れ (上・中段) と不安定の可能性がある流れ (下段) の例. (上段) $\bar{u}(y) = ay + b$, (中段) $\bar{u}(y) = a \cos(\pi y/W) + b$, (下段) $\bar{u}(y) = a \cos(2\pi y/W) + b$.

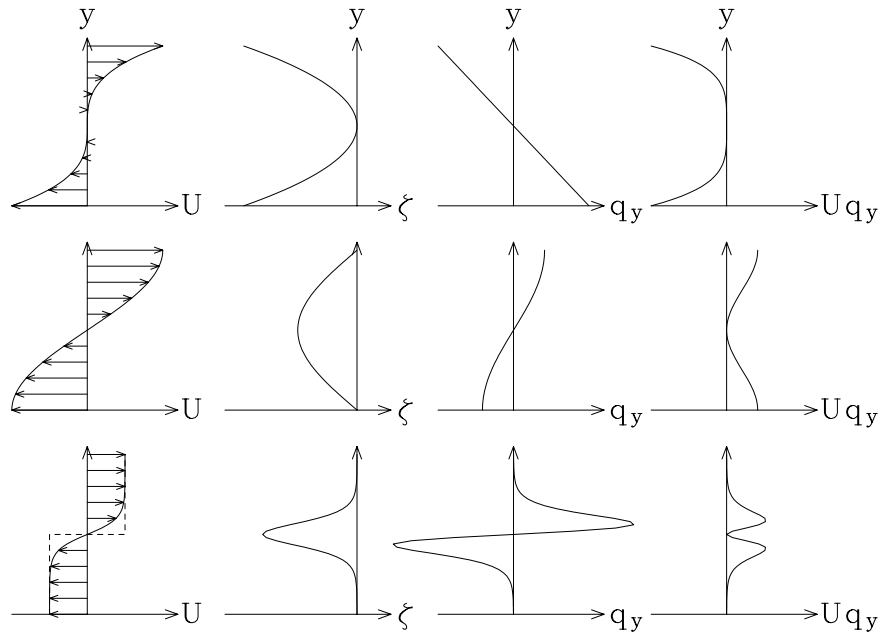


図 13.2: フヨルトフトの条件で判別できる順圧安定な流れ (上段) と不安定の可能性がある流れ (中・下段) の例. (上段) $\bar{u}(y) = ay^3 + b$, (中段) $\bar{u}(y) = a \sin(\pi y/W) + b$, (下段) $\bar{u}(y) = a \tanh(by) + c$. ただし, $f = 0$ (非回転系) とした.

る. 別の言い方をすれば, 基本場の絶対渦度勾配と速度とが基本的に正の相関にあるという条件である. この不安定の必要条件はフヨルトフト (Fjortoft) の条件と呼ばれている. フヨルトフトの条件が満たされているならばレイリー-クオの条件も自動的に満たされているので, フヨルトフトの条件のほうがレイリー-クオの条件よりも厳しい条件である.

図 13.2 に示す速度プロファイルはどれも $d\bar{q}/dy$ が領域内で符号を変えるので, レイリー-クオの不安定条件を満たしている. ところが, (上段) の流れはどこでも $\frac{d\bar{q}}{dy} \bar{u} \leq 0$ であり, (13.16) の条件を満たさないで安定である. 一方, (中・下段) の例はフヨルトフトの条件も満たしており, 不安定である可能性がある. (下段) の \tanh 関数で b を大きくすると点線で示す階段型の関数 (渦シートプロファイル; vortex sheet profile) になるが, これはシア不安定な流れの典型として知られている.

13.2.4 固有値問題: 2 点折れ線モデル

具体的に基本場 \bar{u} が与えられた場合には, 固有値問題を解いて線形安定性解析を行なうことになる. 複雑な流れの場合には, 差分近似などにより数値的に固有値・固有関数を求めることになるが, 簡単な流れの場合には手解析で固有値・固有関数を求めることができる.

具体例として, $\beta = 0$, $W = \infty (-\infty < y < +\infty)$ の状況で, 基本場が

$$\bar{u}(y) = \begin{cases} +1 & (+1 < y < +\infty) & : \text{領域 1} \\ y & (-1 \leq y \leq +1) & : \text{領域 2} \\ -1 & (-\infty < y < -1) & : \text{領域 3} \end{cases} \quad (13.17)$$

で与えられるときの流れの安定性を調べよう (石岡, 1994).

まず, 解くべき微分方程式 (13.10) で $\beta = 0$ とすると,

$$(\bar{u}(y) - c) \left(\frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi \right) - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \Psi = 0, \quad (13.18)$$

となる. 各領域内では $d^2 \bar{u}/dy^2 = 0$ であるから, $\bar{u} - c \neq 0$ とすると, (13.18) 式は以下のように簡単になる:

$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} - k^2 \Psi = 0. \quad (13.19)$$

境界条件は, $W = \pm\infty$ で擾乱の振幅が 0 であるとする:

$$\Psi(-\infty) = \Psi(+\infty) = 0. \quad (13.20)$$

また, $\bar{u}(y)$ の折れ目 ($y = \pm 1$) での解の接続の条件は, $\Psi(y)$ の連続性により,

$$[\Psi(y)]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} = 0, \quad \epsilon \rightarrow 0 \text{ at } y = \pm 1, \quad (13.21)$$

となる. また, (13.18) の y 微分を差分で置き換えることにより,

$$(\bar{u}(y) - c) \left((2\epsilon)^{-1} \left[\frac{d\Psi}{dy} \right]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} - k^2 \Psi(y) \right) - (2\epsilon)^{-1} \left[\frac{d\bar{u}}{dy} \right]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \Psi(y) = 0, \quad \epsilon \rightarrow 0 \text{ at } y = \pm 1, \quad (13.22)$$

と書けるので, $d\Psi(y)/dy$ の接続条件は,

$$(\bar{u}(y) - c) \left[\frac{d\Psi}{dy} \right]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} - \Psi(y) \left[\frac{d\bar{u}}{dy} \right]_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} = 0, \quad \epsilon \rightarrow 0 \text{ at } y = \pm 1, \quad (13.23)$$

となる.

微分方程式 (13.19) より, 各領域での解 $\Psi(y)$ は,

$$\Psi(y) = \begin{cases} A_1 e^{ky} + B_1 e^{-ky}, & (+1 < y < +\infty) & \text{領域 1} \\ A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky}, & (-1 \leq y \leq +1) & \text{領域 2} \\ A_3 e^{ky} + B_3 e^{-ky}, & (-\infty < y < -1) & \text{領域 3} \end{cases} \quad (13.24)$$

とおける. ここで, $k > 0$ とする. 境界条件 (13.20) および接続条件 (13.21), (13.23) を用いて, 自明でない解が存在するとすると, 固有値 c が次のように求められる:

$$c^2 = \frac{(1 - 2k)^2 - e^{-4k}}{4k^2}. \quad (13.25)$$

擾乱は, $\psi'(x, y, t) = \text{Re} [\Psi(y) e^{ik(x-ct)}] = \text{Re} [\Psi(y) e^{ik(x-c_r t)} \times e^{ikc_i t}]$ であるから, その発達率 (増幅率) は $k c_i$ であり, 位相速度は c_r である. 固有値を与える (13.25) 式より, 擾乱の発達率と位相速度を波数 k の関数として求めたのが図 13.3 である. この基本流は, $k < k_c \simeq 0.635$ の短波数 (長波長) の擾乱に対して不安定であり, $k = 0.4$ の擾乱が最大発達をする. このような基本流の不安定性により発達する擾乱を不安定擾乱または不安定波という. 今の場合, 不安定擾乱の位相速度は 0 である. これに対して, $k > k_c$ の擾乱は中立であり, 正または負の位相速度をもつ.

(13.25) 式が成立している場合に対して, 各固有値に対応する固有関数 $\Psi(y)$ は, $A_n, B_n (n = 1, 2, 3)$ の関係を求めることによって与えられる. 求められた $\Psi(y)$ を式 (13.9) に代入すると, 各擾乱の空間構造を求める

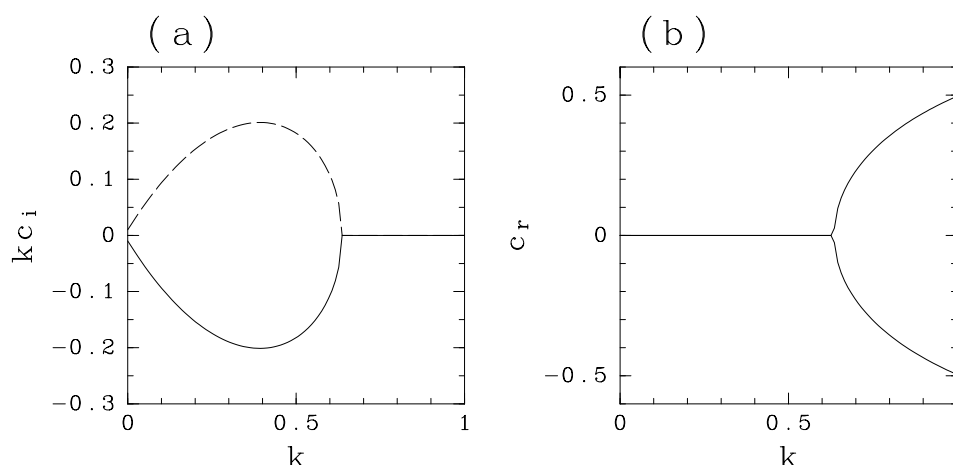


図 13.3: 2 点折れ線モデルの安定性解析. (a) 擾乱の発達率, $k c_i$; (b) 擾乱の位相速度 c_r .

ことができる. 図 13.4 に幾つかの例を示す. (左上) は最も不安定な擾乱である. シアーのある $-1 \leq y \leq +1$ の領域で, その位相が基本流のシアーと逆の向きに傾いているのが特徴である. これに対して (左下) は安定な擾乱で, ちょうど不安定擾乱を東西に折り返した構造になっている. 右の 2 例は中立擾乱の対で, 上は東進 ($c_r > 0$) し, 下は西進 ($c_r < 0$) する. 中立擾乱の位相は南北に変化せず, $y = +1$ または $y = -1$ 付近で振幅が最大である. 近年, このような解析の発展として, 不安定問題を二つの中立波の共鳴として捉える考え方が提案されている (Sakai, 1989; 伊賀, 1996). つまり, $y = +1$ と $y = -1$ 付近に存在する二つの中立波の位相速度が近い値になると, 相互に影響を及ぼしあって共鳴的に増幅するようになる.

不安定擾乱の位相の傾きより, この擾乱に伴う運動量フラックスを推定することができる:

$$\overline{u'v'} = \int_0^{2\pi/k} u'v' dx = \int_0^{2\pi/k} -\frac{\partial\psi'}{\partial y} \frac{\partial\psi'}{\partial x} dx, \quad (13.26)$$

であり, $-1 \leq y \leq +1$ の領域では擾乱の位相が北西-南東の向きに傾いているので, 基本的に $\partial\psi'/\partial y$ と $\partial\psi'/\partial x$ は正相関である. つまり, この領域では運動量フラックスが負であり, $y = \pm 1$ より外側では 0 なので, $y = +1$ 付近では運動量フラックスの発散, $y = -1$ 付近では収束があることになる. 結局, 不安定擾乱に伴う運動量フラックスの発散・収束は, 基本流のシアーを弱めるように働いている. 基本流が不安定な場合に発達する擾乱は, その不安定性を解消するように働く空間構造となっている.

13.3 順圧不安定に関するエネルギー論

Charney(1973) p.248

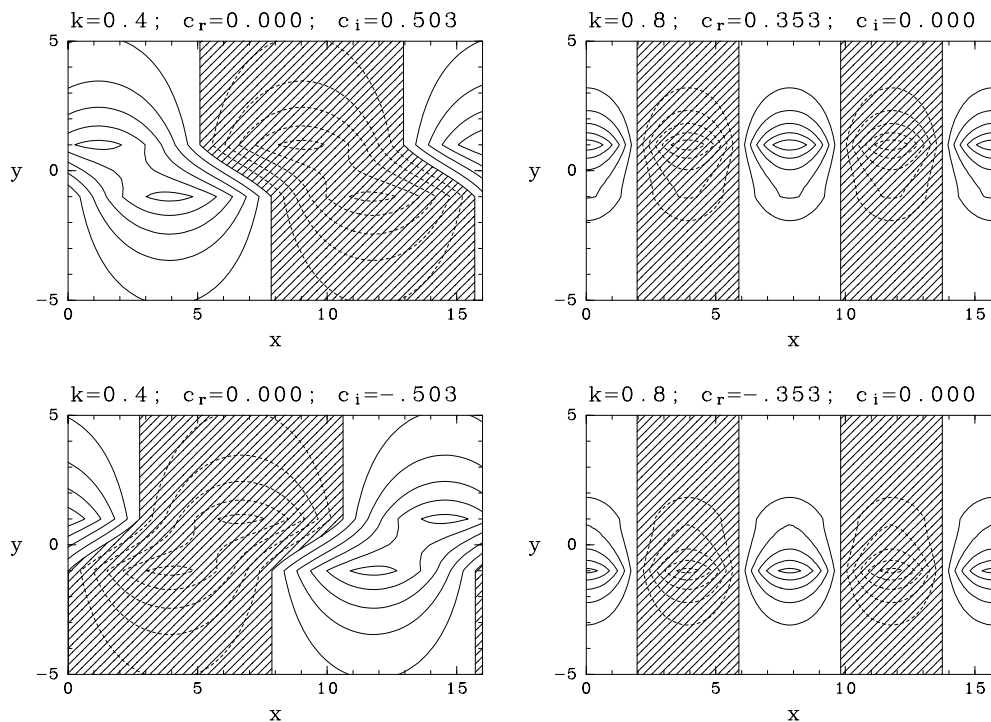


図 13.4: 2 点折れ線モデルの固有関数. (左上) 不安定擾乱, (左下) 安定擾乱, (右) 中立擾乱.

13.4 現実大気における順圧不安定

13.4.1 成層圏の東進ロスビー波

Hartmann(1983), Ishioka and Yoden(1994) の理論・数値実験のイントロダクションで, 冬季成層圏で観測される東進ロスビー波に関するレビューがある.

図 13.5, 13.6 に, 最近の事例を示す (Mizuta and Yoden, 2001). 図 13.5 は, 上部成層圏 (1800K の等温位面) での帯状平均した帯状流およびポテンシャル渦度の緯度分布を示す. 1999 年 7 月上旬の 10 日分を各実線で重ね書きしている. 帯状平均帯状流は 45 度付近に最大値をもつジェット構造 (「極夜ジェット」と呼ばれている) をしているが, その極側に膨らみをもつ風速分布となっている. この風速分布に対応して, 帯状平均ポテンシャル渦度はその緯度微分の符号を変えており, レイリー-クオの条件を満たしている. 実際, 図 13.6 に示すように, この期間にこの緯度帯では東西波数 1 の擾乱が増幅し, 周期 4 日程度で東進している. 「4 日波」と呼ばれる擾乱で, 基本的に極夜ジェットの順圧不安定によって生じたと考えられている.

13.4.2 熱帯域の偏東風波動

Charney(1973)

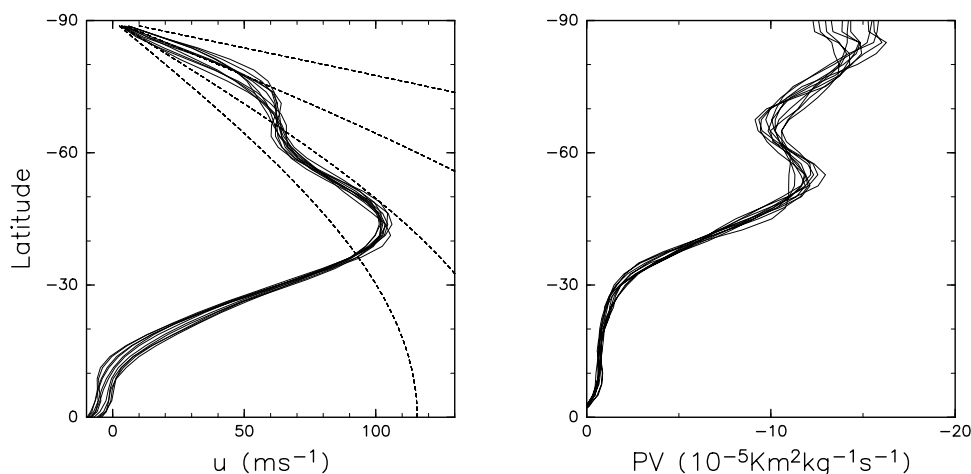


図 13.5: 1800K の等温位面上における南半球帯状平均流の様子. 1999 年 7 月 1-10 日. (左) 帯状平均帯状流の緯度分布, (右) 帯状平均ポテンシャル渦度の緯度分布. 左図の点線はそれぞれ剛体回転する風速場を示す.

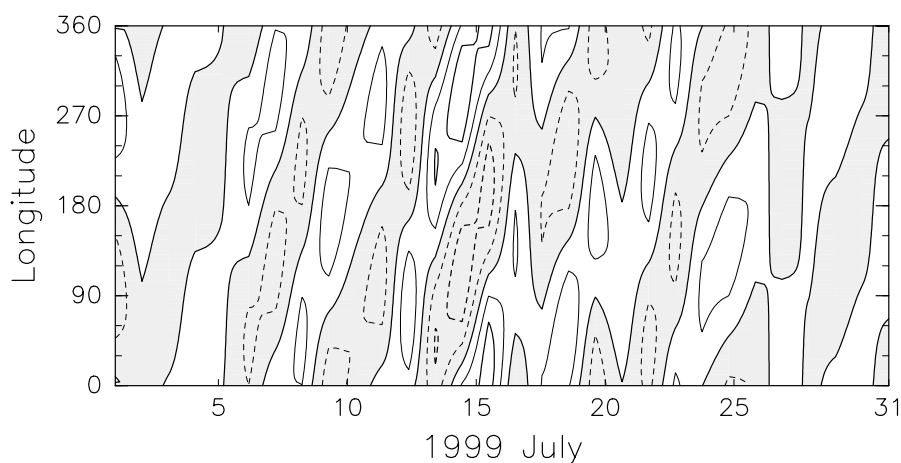


図 13.6: 1800K の等温位面で南緯 60 度でのポテンシャル渦度偏差の経度-時間図 (ホフメラー ダイアグラム). 東西波数 1 成分だけを取り出したもの.

参考文献

- Charney, J.G. 1973: Planetary fluid dynamics, *Dynamic Meteorology*. P.Morel Ed., D.Reidel Pub.Co., 97–351.
- 伊賀 啓太, 1996: 水路内の回転浅水波系における遷移モード. 「ながれ」, **15**, 84–92.
- 石岡 圭一, 1994: 課題演習 D5 ノート. (現在所属: 東京大学大学院数理科学研究科)
- Mizuta, R. and S. Yoden, 2001: Interannual variability of the 4-day wave and isentropic mixing inside the polar vortex in midwinter of the Southern Hemisphere upper stratosphere. submitted to *J. Geophys. Res.*
- Sakai, S., 1989: Rossby-Kelvin instability: a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between Rossby waves and gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **202**, 149–176.