

回転球殻非弾性磁気流体の定式化と ベンチマーク (無次元版)

佐々木洋平・竹広 真一

2026 年 7 月 2 日

目次

1	系の設定と支配方程式	2
1.1	境界条件	4
2	無次元化した支配方程式	4
2.1	Jones et al. (2011) の場合	4
2.2	Gastine et al. (2014) の場合 (流体モデル)	5
3	ベンチマーク設定	7
3.1	無次元化とパラメータ設定	7
3.2	初期条件	7
4	ベンチマーク結果	8
4.1	流体力学ベンチマーク (Hydrodynamic)	8
4.1.1	運動エネルギー	8
4.1.2	速度場, エントロピー場の図	8

1 系の設定と支配方程式

Jones et al (2011) の設定は以下の通りである:

- 基本場は断熱場, 理想気体, ポリトロープ
- 重力加速度は r^{-2} に比例する.
- 外球半径 r_o に対する内球半径 r_i の比 $\chi = r_i/r_o$ は 0.35 に固定
- LBR 近似 (Braginsky and Roberts, 1995; Lantz and Fan, 1999) ¹.
- 外側, 内側のエントロピー差を ΔS に固定²
- 応力無し条件, 球殻外は不導体 (内球無し).

スケーリングした基本場は

$$\bar{\rho} = \rho_c \zeta^n, \quad \bar{p} = P_c \zeta^{n+1}, \quad \bar{T} = T_c \zeta, \quad \zeta = c_0 + \frac{c_1(r_o - r_i)}{r}, \quad (1)$$

$$c_0 = \frac{2\zeta_o - \chi - 1}{1 - \chi}, \quad c_1 = \frac{(1 + \chi)(1 - \zeta_o)}{(1 - \chi)^2}, \quad (2)$$

$$\zeta_o = \frac{\chi + 1}{\chi \exp(N_\rho/n) + 1}, \quad \zeta_i = \frac{1 + \chi - \zeta_o}{\chi}. \quad (3)$$

ここで T_c, P_c, ρ_c は球殻中層 ($\zeta = 1, r = (r_i + r_o)/2$) での温度, 圧力, 密度の値であ

¹LBR 近似はざっくりとえば以下の近似である:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{g} &= -\nabla \left(\frac{p'}{\rho} \right) - \frac{s'}{c_p} \mathbf{g} + \frac{p'}{\rho} \left\{ \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right\} \hat{\mathbf{r}} \\ &\simeq -\nabla \left(\frac{p'}{\rho} \right) - \frac{s'}{c_p} \mathbf{g}. \end{aligned}$$

理想気体の場合には, ポアッソン・メイヤーの関係式より, 厳密に成立する. スケーリングを丁寧にやると中括弧内の量が高次の量となるので無視できる, というのが主張らしい (佐々木).

²これがどういう熱力学的境界条件に対応するのか良く理解できていない. 単純には温度固定条件のように思えるのだけれど, 正しい (佐々木)?

る. 支配方程式系は以下の通りである³.

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + 2\Omega \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \frac{S}{C_p} \mathbf{g}(r) + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{F}_\nu, \quad (6)$$

$$\Pi = \frac{p'}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2,$$

$$(\mathbf{F}_\nu)_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{\rho} \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\},$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) S = \frac{1}{\bar{\rho} T} \nabla \cdot (\kappa \bar{\rho} T \nabla S) + \frac{1}{\bar{\rho} T \sigma} |\mathbf{J}|^2 + \frac{1}{T} Q_\nu, \quad (7)$$

$$Q_\nu = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (8)$$

ただし $\mathbf{J} = (1/\mu) \nabla \times \mathbf{B}$ は電流密度である. 系に表われる定数は, 定圧比熱 C_p , 自転角速度 Ω , 粘性率 ν , 熱拡散係数 κ , 磁気拡散係数 $\eta = 1/(\sigma\mu)$, 内径外径比 χ である. ただし σ は電気伝導度, μ は真空の透磁率である.

$$N_\rho = \ln \left(\frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_o} \right), \quad \chi = \frac{r_i}{r_o}.$$

³粘性散逸項 Q_ν の表現はオリジナルのベンチマーク論文 Jones et al (2011) とは表現が異なっている.

$$\begin{aligned} \bar{\rho} Q_\nu &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\mathbf{F}_\nu)_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left\{ \bar{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right) \left\{ \bar{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\} = \frac{1}{2} \bar{\rho} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\rho} \left(\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \bar{\rho} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 = \frac{1}{2} \bar{\rho} e_{ij} e_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2. \end{aligned}$$

これが原論文での表現である. ただし $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ は速度勾配テンソルである. ここで,

$$\begin{aligned} \left(e_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 &= e_{ij} e_{ij} - \frac{4}{3} \delta_{ij} e_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{4}{9} \delta_{ij} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= e_{ij} e_{ij} - \frac{8}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 = e_{ij} e_{ij} - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2. \end{aligned}$$

であるから,

$$Q_\nu = \left(e_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2.$$

1.1 境界条件

運動学的境界条件は, 境界を横切る流れ (質量) が存在しないことである.

$$u_r = 0, \quad \text{at } r = r_i, r_o. \quad (9)$$

力学境界条件としてすべりなし条件を考える場合には,

$$u_\lambda = u_\varphi = 0, \quad \text{at } r = r_i, r_o. \quad (10)$$

応力なし条件を考える場合には

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\lambda}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) = 0, \quad \text{at } r = r_i, r_o. \quad (11)$$

これらの条件はブシネスク系の場合と変わらないことに注意されたい.

熱境界条件は境界でのエントロピーを固定する条件を用いる.

2 無次元化した支配方程式

2.1 Jones et al. (2011) の場合

各物理量を次のようにスケーリングする.

- 長さ : 球殻厚さ D
- 密度 : 球殻中層 ($\theta = 1, r = (r_i + r_o)/2$) での基本場密度 $\bar{\rho}_c$
- 質量 : $\bar{\rho}_c D^3$
- 時間 : 磁気拡散時間 D^2/η
- 速度 : 磁気拡散速度 η/D
- 圧力 : $\Omega \bar{\rho}_c \eta$
- 磁場 : $\sqrt{\Omega \bar{\rho}_c \mu \eta}$
- エントロピー : ΔS
- 温度 : 球殻中層 ($\theta = 1, r = (r_i + r_o)/2$) での温度 \bar{T}_c

無次元パラメターは

$$\text{Ra} = \frac{GMD\Delta S}{\nu\kappa C_p}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \text{Pm} = \frac{\nu}{\eta}, \quad \text{E} = \frac{\nu}{\Omega D^2}, \quad (12)$$

$$N_\rho = \ln\left(\frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_o}\right), \quad \chi = \frac{r_i}{r_o}, \quad \text{Di} = \frac{GM}{DT_c C_p} \frac{\text{Pr}}{\text{PmRa}} = \frac{c_1 \text{Pr}}{\text{PmRa}}. \quad (13)$$

支配方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{2\text{Pm}}{\text{E}} \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \frac{\text{Pm}^2 \text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{S}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{\text{Pm}}{\text{E}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{\text{Pm}}{\bar{\rho}} \mathbf{F}_\nu, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\text{Pm}}{\text{E}} \frac{p'}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2, \\ (\mathbf{F}_\nu)_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) S &= \frac{\text{Pm}}{\text{Pr} \bar{\rho} \bar{T}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{T} \nabla S) + \frac{\text{Di}}{\text{E} \bar{\rho} \bar{T}} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + \frac{\text{Di}}{\bar{T}} Q_\nu, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Q_\nu &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (16)$$

2.2 Gastine et al. (2014) の場合 (流体モデル)

各物理量を次のようにスケーリングする.

- 長さ : 球殻厚さ D
- 密度 : 球殻外側 ($r = r_o$) での基本場密度 $\bar{\rho}_o$
- 質量 : $\bar{\rho}_c D^3$
- 時間 : 回転時間 $1/\Omega$
- 速度 : 回転速度 ΩD
- 圧力 : $\Omega \bar{\rho}_c \eta$
- エントロピー : ΔS
- 温度 : 球殻外側 ($r = r_o$) での温度 \bar{T}_o

スケーリングした基本場は

$$\bar{\rho} = \theta^n, \quad \bar{p} = \theta^{n+1}, \quad \bar{T} = \theta, \quad \theta = \frac{c_0}{(1-\chi)r} + 1 - c_0, \quad (17)$$

$$c_0 = \frac{\chi}{1-\chi} [\exp(N_\rho/m) - 1], \quad N_\rho = \ln \left(\frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_o} \right), \quad \chi = \frac{r_i}{r_o}. \quad (18)$$

無次元パラメターは

$$\text{Ra}^* = \frac{g_o \Delta S}{C_p \Omega^2 D}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \text{Pm} = \frac{\nu}{\eta}, \quad \text{E} = \frac{\nu}{\Omega D^2}. \quad (19)$$

支配方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + 2\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \text{Ra}^* \frac{r_o}{r^2} S \mathbf{e}_r + \frac{E}{\bar{\rho}} \mathbf{F}_\nu, \quad (20)$$

$$\Pi = \frac{p'}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2,$$

$$(\mathbf{F}_\nu)_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\},$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) S = \frac{E}{\text{Pr} \bar{\rho} \bar{T}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{T} \nabla S) + \frac{E}{\text{Ra}^*} (1-\chi) c_0 Q_\nu, \quad (21)$$

$$Q_\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2, \quad (22)$$

3 ベンチマーク設定

3.1 無次元化とパラメータ設定

Jones et al. (2011) と Gastine et al. (2014) との無次元数および物理量の関係は

$$\text{Ra}^* = (1 - \chi)^2 \frac{E^2}{\text{Pr}} \text{Ra}, \quad U_J = \frac{\text{Pm}}{E} U_G, \quad K_J = \frac{\bar{\rho}_o}{\bar{\rho}_c} \frac{\text{Pm}^2}{E^2} K_G \quad (23)$$

ここで $\bar{\rho}_o/\bar{\rho}_c$ を Gastine et al. (2014) の表現で評価すると

$$\bar{\rho}_o = 1, \quad \bar{\rho}_c = \theta_c^m, \quad \theta_c = \theta[r = (r_i + r_o)/2] = \frac{\chi}{1 + \chi} [\exp(N_\rho/m) - 1] + 1,$$

に数値をいれると, $\bar{\rho}_o/\bar{\rho}_c = 0.065774378$.

	Hydrodynamic	Steady dynamo	Unsteady Dynamo
E	10^{-3}	2×10^{-3}	10^{-5}
N_ρ	5	3	3
χ	0.35	0.35	0.35
Ra	351,806	80,000	2.5×10^7
Ra*	0.148638035	0.0338	10.5625
Pr	1	1	2
Pm	1(?)	50	2
n	2	2	2

3.2 初期条件

原論文には記述がないので, 適当に作る.

- Hydrodynamic benchmark の場合
球殻中程に集中した水平構造 Y_{19}^{19} のエントロピー擾乱を置く. 速度場は静止場.
- Steady dynamo benchmark の場合
球殻中程に集中した水平構造 Y_7^7 のエントロピー擾乱を置く. 速度場は静止場. 磁場は微小な rY_1^0 成分のポロイダル成分を置く.

グループ	解像度	K.E.	K.E.(zonal)	K.E.(merid)
Leeds	384x192x128	81.8581	9.37724	0.0220183
Glatzmaier	1024x512x121	81.8335	9.37437	0.0220109
ASH	512x256x129	81.1903	9.30039	0.0218364
MAGIC	384x192x121	81.8385	9.37514	0.0220136
SPMODEL	256x128x64	81.8299	9.36436	0.0220118

4 ベンチマーク結果

4.1 流体力学ベンチマーク (Hydrodynamic)

4.1.1 運動エネルギー

Jones et al. (2011) の無次元化にあわせた数値.

4.1.2 速度場, エントロピー場の図

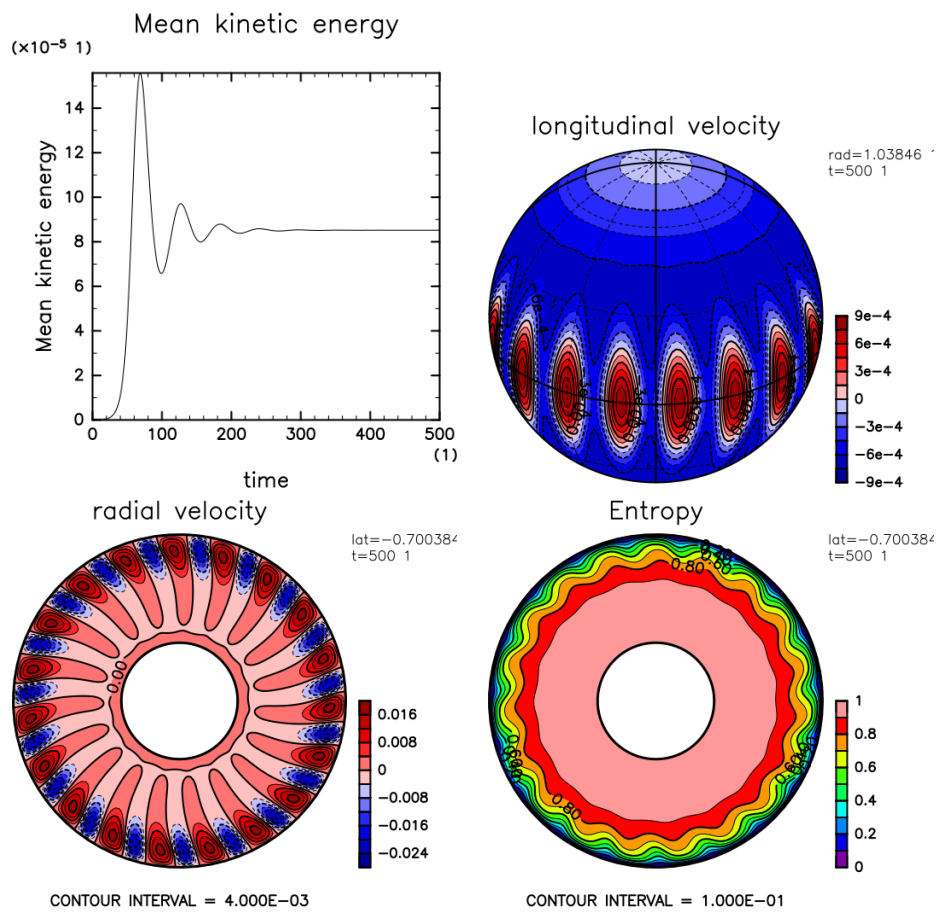


図 1: `smodel` による非弾性球殻対流ベンチマークの計算結果.

参考文献

- Braginsky, S.I., Roberts, P.H., 1995: “Equations governing convection in earth’s core and the geodynamo.” *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **79**, 1–97
- Zhang, K.-K., Busse, F.H., 1987: “On the onset of convection in rotating spherical shells.” *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **39**, 119-147
- Jones, C.A., Boronski, P., Glatzmaier, G.A., Gastine, T., Miesch, M.S., Wicht, J., 2011: “Anelastic convection-driven dynamo benchmarks”, *Icarus*, **216**, 120–135
- Lantz, S.R., Fan, Y., 1999: “Anelastic magnetohydrodynamic equations for modeling solar and stellar convection zones”, *Ap.J.Suppl.*, **121**, 247–264