

# 非線形移流方程式

室井ちあし

1990/03/28

## 1 非線形移流方程式のおぼけ

非線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t) \quad (1)$$

を考える。これは, shock equation と呼ばれている (Shuman,1974)。

この一般解は,

$$u = f(x - ut)$$

である (Platzman,1964 他).  $f$  は任意の関数である。

ここでは, 方程式 (1) に関して,  $u$  と  $\frac{\partial u}{\partial x}$  との積による効果のみを考える。

方程式 (1) を有限差分法で解こうとすると, aliasing error (おぼけ) という誤差が発生する。これは, 格子点法では波長が  $2\Delta x$  以下, すなわち波数にして  $k_{max} \equiv \frac{\pi}{\Delta x}$  以上の波は扱えない, というところから発生する誤差である。

例として, 波長  $l = \frac{4}{3}\Delta x$  の正弦波を考える。図 1 に, この波が実線で表されている。ところが, 格子点での値しか分かっていないとすると, この波は, 点線で表された, 波長  $4\Delta x$  の正弦波と区別がつかない。すなわち, 波長  $4\Delta x$  の正弦波があったとき, これが本当に波長  $4\Delta x$  の正弦波なのか, 実は  $\frac{4}{3}\Delta x$  の正弦波なのか, 格子

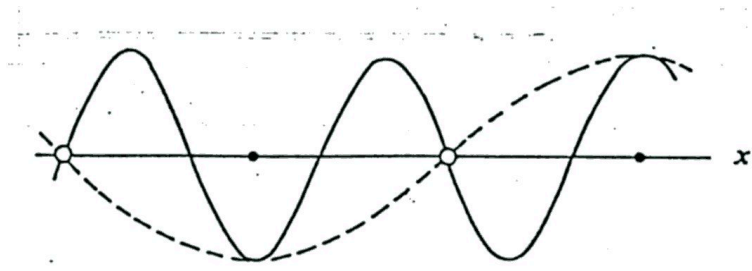


図 1: 有限差分格子によって, 波長  $4\Delta x$  の正弦波と間違えられた波長  $\frac{4}{3}\Delta x$  の正弦波 (F.Mesinger & A.Arakawa, 1976)

点での値を見ているだけでは決して分からないのである. これが aliasing error である.

もう少し数学的にみてみよう.  $u$  が,

$$u = \sum_n u_n \sin k_n x$$

と, 調和解の和で書けるとする. このとき, 非線形効果により,

$$\sin k_1 x \sin k_2 x$$

という項が発生する. ところが,

$$\sin k_1 x \sin k_2 x = \frac{1}{2} [\cos(k_1 - k_2)x - \cos(k_1 + k_2)x]$$

であるから, 最初, 全ての波が  $k \leq k_{max}$  であっても, すぐに  $k > k_{max}$  なる波が発生してしまう.

さて, どのような波が aliasing error の影響を受けるかを考えてみる. 非線形効果の結果, 波数  $k > k_{max}$  なる波が生じたとしよう.

$$\sin kx = \sin[2nk_{max} - (2nk_{max} - k)]x$$

であるから,

$$\sin kx = \sin \frac{2n\pi x}{\Delta x} \cos \left( \frac{2n\pi}{\Delta x} - k \right) x - \cos \frac{2n\pi x}{\Delta x} \sin \left( \frac{2n\pi}{\Delta x} - k \right) x$$

ここで,  $\sin \frac{2n\pi}{\Delta x} j\Delta x = 0$ ,  $\cos \frac{2n\pi}{\Delta x} j\Delta x = 1$  より,

$$\sin kj\Delta x = -\sin(2nk_{max} - k)j\Delta x$$

よって, 次のような波数  $k^*$

$$k^* = 2nk_{max} - k$$

の波に対して, aliasing error が起きる. すなわち, 波数  $k$  であった波は, 有限差分の世界では波数  $k^*$  なる波として認識されることになる.

## 2 非線形不安定性

aliasing error が数値積分に及ぼす影響を考えてみる. 運動エネルギーのパワースペクトルを考えると, これは, 異なったスケールの現象の, 相対的な重要度を表す. さて, 経験によれば, 気象学で出て来る変数のスペクトルは, 大ざっぱにみれば, 時間的に余り変動しない. すなわち, 昨日は小さいスケールの現象が重要, 今日では大きなスケールの現象が重要, ということはない.

有限差分法においては, スペクトルの形が aliasing error によって変化してしまう, ということが重要である. 前記のように, 最初は全ての波が  $k_{max}$  以下であっても, 非線形項によって,  $k_{max}$  以上の波がどんどん作られる. このため,  $k_{max}$  以下の波において偽のエネルギー流入がおき, 積分を開始してからある程度時間が経過すると, 物理的に到底受け入れがたいような値となってしまう, 何らかの対策をとらないと, ついには発散して計算不能となる. これは, 非線形項によって引き起こされる現象なので, これを

非線形不安定性 (nonlinear instability)

という. この現象は, Phillips(1956) によって発見された.

## 3 非線形不安定性の抑止と予防

長時間にわたって積分するならば, 非線形不安定性を抑制, ないし予防する手段を考えねばならない. 短時間の積分ならば, 抑制した方が大概いいのだが, 特に抑制せずとも何とかなる.

高い周波数をカットすることによって aliasing error を防ぐ場合, なにも  $k > \frac{1}{2}k_{max}$  を落としてしまう必要はない.  $k > \frac{2}{3}k_{max}$  を落とせば十分である. なぜなら,  $k > \frac{2}{3}k_{max}$  ならば, 発生する aliasing error もまた  $k > \frac{2}{3}k_{max}$  であり, 次のステップで落とされてしまうからである. (Orszag,1971)

高い周波数を落としてしまっても構わないのなら, いちいちフィルターをかけて高い周波数をカットするより, 何もせずとも高い周波数を減衰させてしまうスキーム, たとえば Lax-Wendroff scheme を使った方が簡単である (Richitmyer,1963). こういったスキームを使う場合, 必ずしも最初から最後までこれ一つで通さなければな

らない, ということはない. 他のスキームの中に, ときたまこうしたスキームをいれてやれば十分である (Kasahara, 1969). しかし, このようなスキームでは減衰量を調節できないから, 本来減衰しないスキームに減衰項を付け加えた方がいい, という意見もある (Kreiss and Olinger, 1973).

非線形不安定を避けるもう一つのやり方は, 移流項の積分に Lagrange 的な考え方を使うことである. 時間ステップ  $\Delta t$  で, 1 群の格子点が移動すると, それに伴って様々な値が変化する. その値を計算する. また, その場所に対応する従属変数の値は, 空間的に内挿することによっても求められる. 移流による値の変化は, 内挿による値と格子点における値との差に等しいと置く. こうして得られるスキームは, Euler 的なスキームと同じ場合もあるが, 違ったスキームが得られるときもある. このようなやり方は最初 Leith (1965) によって用いられた. 新しい例では, Krishnamurti et al. (1973) がある.

非線形不安定を取り扱うもう一つの考え方として, Arakawa の保存スキームを使う方法がある. これは, 渦度方程式においては, enstrophy<sup>1</sup> が保存する, という性質を利用するものである. 当然, これは渦度方程式に対してしか用いることが出来ないが, それでも結構役にたつ. Arakawa の保存スキームを使うときは, 移流項を人工的に減衰させる必要はない. このため, 移流項の統計的特性, これは大気大循環の研究に役立つ特性であるが, これが保存できるようになった.

短波長の波の位相の誤差は大きいから, これが非線形相互作用によって長波長の波の位相に影響を与える前に除去すべきである, という議論がときどき行われる. この議論は, いくつかの点を見落としている. たとえ短波長の波の位相速度が狂っていたとしても, 波の強度もまた狂っていない限り, 必ずしも状況は悪くならない. 大気大循環などをシミュレーションする際, 我々にとって, 個々の波がどれだけ正確に再現されても, そのこと自体はあまり意味がない. 我々にとって興味があるのは, それらが寄り集まった振舞い, 例えばエネルギーが全体としてどのように輸送されるか, といった問題である. すなわち, 統計をとったときに意味のある関数が出てくれば十分なのである. 位相は少々狂っても統計的には使える関数を生み出すことはある. だから, 短波長の波は必ずしも除去しなくていいのである. また, 興味がないからといって短波長の波をカットすると, 興味の対象である長波長の波のエネルギーまで一緒に減衰させてしまう. エネルギーを減衰させるのに, 物理的意味もないのに計算の都合だけで減衰させることが好ましい訳はない.

<sup>1</sup>渦度の 2 乗/2, すなわち  $(\nabla \times \mathbf{v})^2/2 = (\nabla^2 \Psi)^2/2$  を enstrophy という.

## 4 渦度方程式

Arakawa の方法を導入するにあたって, 渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = 0; \quad \zeta = \nabla^2 \Psi \quad (2)$$

を考える. 但し, 速度  $\mathbf{v}$  は非発散とする. よって

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \Psi \quad (3)$$

となる. これを (2) に代入し

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi = J(\nabla^2 \Psi, \Psi) \quad (4)$$

となる. ただし,  $J$  はヤコビアンである. この方程式は, 2次元非発散の速度による移流の結果としての局所的な渦度の変化を表す. これもまた非線形移流方程式である. しかし, 大きなスケールの大気の運動に対しては, (4) は (2) よりもよい近似となっている. そこで, 10年以上にわたって, この方程式に小さな現象を現す付加的な項を補ったものが, 天気予報における基礎的な方程式として使われてきた.

## 5 渦度方程式の波数空間における性質

渦度方程式 (4) に対する Arakawa の方法を説明するためには, この積分の波数空間における性質を少し知らねばならない. この方程式のもとでは, 異なった周波数間のエネルギーのやり取りとして, どのようなものが可能であるかを調べてみよう.

### 5.1 運動エネルギー

最初に, 速度が2次元非発散の時の, 運動エネルギースペクトルを考える. これは (3) で与えられる. 領域  $A$  内では流線関数は直交関数で展開できて

$$\Psi = \sum_n \Psi_n \quad (5)$$

とおくことができる. ただし,  $\Psi_n$  は, Helmholtz の方程式

$$\nabla^2 \Psi_n + \lambda_n^2 \Psi_n = 0 \quad (6)$$

の固有関数である. パラメーター  $\lambda_n$  は, 成分  $\Psi_n$  の一般化された波数という.

例として, 領域  $A$  を一辺が  $L_x, L_y$  の長方形であるとする. 境界条件は, 周期  $L_x$  の周期的境界条件, また, 上下の境界では 0 とする. この時, 流線関数は

$$\Psi = \sum_{n_1, n_2} \left( a_{n_1, n_2} \cos \frac{2\pi n_1}{L_x} x + b_{n_1, n_2} \sin \frac{2\pi n_1}{L_x} x \right) \sin \frac{\pi n_2}{L_y} y$$

とかける. これを微分すれば

$$\nabla^2 \Psi_n = - \left[ \left( \frac{2\pi n_1}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\pi n_2}{L_y} \right)^2 \right] \Psi_n$$

となる. よって

$$\lambda_n^2 = \left( \frac{2\pi n_1}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\pi n_2}{L_y} \right)^2$$

である. 領域の形が異なれば, (6) は異なった直交関数系で展開され, やはり (5) を満たす. これらの関数もまた, Helmholtz 方程式 (6) の解である.

ある量  $\alpha$  の平均を

$$\bar{\alpha} \equiv \frac{1}{A} \int_A \alpha dA$$

と定義する. ここで知りたいのは, 単位質量当りの運動エネルギーの平均

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{(u^2 + v^2)} = \frac{1}{2} \overline{\nabla \Psi \cdot \nabla \Psi}$$

である. そこで, ここへ (5) を代入し, 項別微分, 項別積分が可能であると仮定すると

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{\nabla \sum_n \Psi_n \cdot \nabla \sum_m \Psi_m} = \frac{1}{2} \overline{\sum_n \nabla \Psi_n \cdot \sum_m \nabla \Psi_m} = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \overline{\nabla \Psi_m \cdot \nabla \Psi_n}$$

となる. さて,

$$\nabla \Psi_m \cdot \nabla \Psi_n = \nabla \cdot (\Psi_m \nabla \Psi_n) - \Psi_m \nabla^2 \Psi_n$$

である. また, 境界では質量の出入りはない, 即ち

$$\overline{\nabla \cdot (\Psi_m \nabla \Psi_n)} = 0$$

と仮定すれば, (6) を使って

$$\bar{K} = -\frac{1}{2} \sum_m \sum_n \overline{\Psi_m \nabla^2 \Psi_n} = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \lambda_n^2 \overline{\Psi_m \Psi_n}$$

となる. 関数  $\Psi_n$  は直交する, 即ち

$$\overline{\Psi_m \Psi_n} = \delta_{mn}$$

であるから, 二重和は単なる和

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n^2 \overline{\Psi_n^2}$$

となる. そこで, 結局, 領域 A における平均の運動エネルギーは, 周波数毎のエネルギーの和として

$$\bar{K} = \sum_n K_n \quad (7)$$

とかける. ただし

$$K_n \equiv \frac{1}{2} \lambda_n^2 \overline{\Psi_n^2} \quad (8)$$

とする.  $K_n$  は, 平均の運動エネルギーへの寄与を表すが, これは  $n$  の関数で, 運動エネルギースペクトルを与える. (8) を見れば, これは決して負にはならない. 流線関数  $\Psi$  が与えられたとき, 直交関係を使えば  $\Psi_n$  は求まる. よく使われ形の領域に対しては, 係数  $\lambda_n$  が計算されているから, (8) を使えば運動エネルギースペクトルが計算できる. これらは, ほかのスペクトルの計算と共に, 観測や数値計算によって得られた気象学の様々な変数の値の振舞いや構造を研究するのに非常によく使われている.

## 5.2 エンストロフィー

渦度の 2 乗平均は

$$\bar{\zeta^2} = \overline{(\nabla^2 \Psi)^2}$$

であるが, これも同様に分解できる. (5) 代入し, (6) を使って直交関数系  $\Psi_n$  で展開すれば

$$\bar{\zeta^2} = \sum_n \lambda_n^4 \overline{\Psi_n^2}$$

となる.  $\Psi_n$  に対する運動エネルギーを求めるため (8) を代入する. このとき, エンストロフィー (enstrophy) の平均は渦度の 2 乗平均, すなわち,

$$\frac{1}{2}\overline{\zeta^2} = \sum_n \lambda_n^2 K_n \quad (9)$$

であることがわかる. となる.

### 5.3 平均の波数

これを (7) と比較すれば, 平均の波数は平均の enstrophy, 運動エネルギーと関係があることが分かる. 平均の波数を

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{\sum_n \lambda_n^2 K_n}{\sum_n K_n}}$$

と定義する.(9), (7) を代入すれば

$$\lambda = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\overline{\zeta^2}}{K}} \quad (10)$$

が得られる. よって

速度が 2 次元非発散の時, 平均の波数は平均の enstrophy と  
運動エネルギーとの比で決まる!

我々が知りたいのは, 渦度方程式 (4) では, エネルギースペクトルの時間依存性として, どのようなものが可能か, ということである. このためには, (10) の時間依存性を見れば十分である. (4) より

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}\overline{\zeta^2} = \overline{\zeta \frac{\partial}{\partial t} \zeta} = \overline{\zeta J(\zeta, \Psi)} \quad (11)$$

である. 再び, 領域 A の境界上では質量の移動はないと仮定すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{K} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{(\nabla \Psi)^2} = \overline{\nabla \Psi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Psi} \\ &= \overline{-\Psi \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi} = \overline{-\Psi J(\zeta, \Psi)} \end{aligned} \quad (12)$$

となる. ところが, 任意の 2 つのスカラー量  $p, q$  の間には

$$J(p, q) = \mathbf{k} \cdot \nabla \times (p \nabla q) = -\mathbf{k} \cdot \nabla \times (q \nabla p)$$

という式が成り立つ. そこで,  $p, q$  のどちらかが領域  $A$  の境界上で定数ならば, Stokes の定理を使えば

$$\overline{J(p, q)} = 0 \quad (13)$$

という式が成り立つ. 同じ境界条件で

$$\overline{pJ(p, q)} = 0, \quad \overline{qJ(p, q)} = 0 \quad (14)$$

も成立する. よって,  $\Psi$  が境界上で定数ならば, (11),(12) より

$$\frac{1}{2}\overline{\zeta^2} = \text{const.}, \quad \& \quad \overline{K} = \text{const.}$$

となる. これより, 2次元非発散では, 平均の波数は時間的に変化しないということが分かる. すなわち, 系統的により高い周波数へとエネルギーが流れる, ということははい. のみならず, enstrophy を得るため,  $K_n$  と波数の2乗とを掛け合わせねばならないから, 高い周波数へと流れることの出来るエネルギーは明らかに限られており, しかも, 周波数が高くなるほど限られている. (Fjørtoft, 1953)

Charney(1966) に従って前述の関係

$$\overline{K}\lambda^2 = \sum_n K_n \lambda_n^2 = \text{const.}$$

を機械的なアナロジーで図解してみる. 左辺の2つの要素は定数である. そこでこの状況は, 図1に示したように, 重さの無い半無限の棒の, 左側には支点から距離  $\lambda^2$  の所に重さ  $\overline{K}$  のおもりが, 右側には距離  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots$  の所に重さ  $K_1, K_2, K_3, \dots$  のおもりがぶら下げられて, バランスを取っているのと同じ, と考えられる. 左側のおもりは動かさない. 右側のおもりは動かしてもいいが, バランスを崩してはいけない. 距離  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots$  は変えられないから, エネルギー(おもり)を動かすときには少なくとも3つ以上の要素をいっぺんに動かさねばならない. また, 高い周波数へは少ししかエネルギーを動かしてはいけない.

(4)の数值解と, その非線形不安定に戻る. enstrophy と運動エネルギーとの平均値を保存する有限差分スキームが作れるならば, 明かに, 波数の平均は変化しない. そうなれば当然, 高い周波数へ系統だってエネルギーが流れる, という事は起きない. Arakawa は, ヤコビアン(14)の性質を満たす有限差分近似が作れることを示した. このような近似を使えば, 平均の enstrophy と運動エネルギーは移流項において保存し, 平均の波数も同じく保存する. 従って非線形不安定性は予防される. のみならず, この近似では(13)も保存されるので, 平均の渦度も保存される. よって,

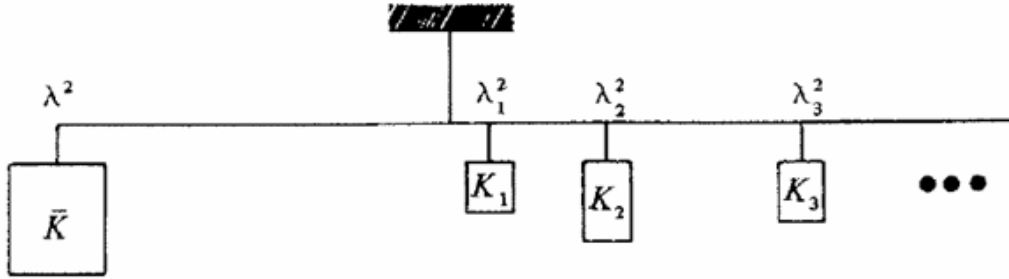


図 2: 調和項成分間のエネルギー交換の機械的アナロジー (F.Mesinger & A.Arakawa, 1976)

渦度の周波数分布が大局的にみて保存される。真の非発散渦度方程式では、個々の流体粒子の渦度、及び領域が保存するから、渦度の周波数分布の全モーメントは保存する。特性 (13), (14) が保存するので、有限差分の計算においては、分布の最初の 2 つのモーメントは保存する。

## 6 Arakawa の方法

Arakawa の方法とは、この場合、(14) を満たすように近似を作ることである。有限差分法の計算では、(14) は、

$$\overline{\zeta_{ij} J_{ij}(\zeta, \Psi)} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \zeta_{ij} J_{ij}(\zeta, \Psi) = 0 \quad (15)$$

という形を取る。但し、 $J$  はヤコビアンの有限差分近似を表し、 $N$  は格子点の総数を表す。

ヤコビアンに対する有限差分近似は沢山ある。3 つの等価な式

$$\begin{aligned} J(p, q) &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( q \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( q \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial q}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

のどれかを利用すればいい。ここでは accuracy が 2 次のもののみを考えることにする。空間微分を近似して (16) の値を求めるにあたり、最も単純な中心差分を使うことにすると、図 3 に示した 9 個の近接した格子点における  $p, q$  の値が必要とな

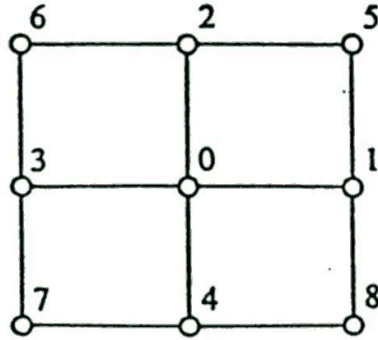


図 3: ヤコビアン の定義 に用いられる 格子 (F.Mesinger & A.Arakawa, 1976)

る. 格子間隔を  $d$ ,  $p_k, q_k$  を格子点  $k$  における  $p, q$  の値とする. この時, 式 (16) の 3 つの式の近似として各々

$$\begin{aligned}
 J^{++}(p, q) &= \frac{1}{4d^2} [(p_1 - p_3)(q_2 - q_4) - (p_2 - p_4)(q_1 - q_3)] \\
 J^{\times+}(p, q) &= \frac{1}{4d^2} \times [q_2(p_5 - p_6) - q_4(p_8 - p_7) - q_1(p_5 - p_8) + q_3(p_6 - p_7)] \\
 J^{+\times}(p, q) &= \frac{1}{4d^2} \times [p_1(q_5 - q_8) - p_3(q_6 - q_7) - p_2(q_5 - q_6) + p_4(q_8 - q_7)]
 \end{aligned}$$

が得られる. 添字  $+, \times$  は, どの格子点での値  $p, q$  を使って近似を行ったか, というを表す. 3 つの近似 (17) は, 全て consistent で, 2 次 の accuracy をもつ. より一般的な近似を行うには, これら 3 つを線形結合して

$$J(p, q) = \alpha J^{++} + \beta J^{\times+} + \gamma J^{+\times} \tag{18}$$

とすればよい. 但し, 適合性がなければならないから,

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

である. この近似も 2 次 の accuracy をもつ.

(18) を使って (15) の和を求めようとする時, 計算領域内の各点について 24 個の項がでてくる. ( $J^{++}$  から 8 個,  $J^{\times+}$  から 8 個,  $J^{+\times}$  から 8 個) これらの項は全て  $\text{const.} \cdot \zeta_k \zeta_l \Psi_m$  という形をしている. ここで, 定数  $\alpha, \beta, \gamma$  を適当に選べば, 境界を除いて, 和をとったときこれらの項が全て打ち消し合う様になる. このとき, (15)

は近似的に満たされる. 例えば,  $k = 0$  の点は, (15) に対して

$$\begin{aligned}\zeta_0 J_0(\zeta, \Psi) &= \frac{1}{4d^2} \zeta_0 \{ \alpha J^{++}(\zeta, \Psi) + \dots \} \\ &= \frac{1}{4d^2} \{ \alpha \zeta_0 ((\zeta_1 - \zeta_3)(\Psi_2 - \Psi_4) - \dots) + \dots \} \\ &= \frac{1}{4d^2} (\alpha \zeta_0 \zeta_1 \Psi_2 + 23 \text{ more terms})\end{aligned}$$

という形で効いている. ここで,  $\zeta_0 \zeta_1 \Psi_2$  という項は,  $\zeta_1 J_1(\zeta, \Psi)$  にもでてくる. ヤコビアン近似 (17) の形からみると, この項は  $J^{+\times}$  中の項  $p_3 q_6$  からきている. これら 2 つの項は  $\alpha = \beta$  ならば打ち消しあう. 同様に考えれば, 結局,

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$$

であれば, 式 (15) の第 2 式は, 項同士が打ち消し合って 0 となる. すなわち, 式 (15) が成立する. のみならず,

$$\zeta_1 J_1(\zeta, \Psi) = \frac{1}{4d^2} (\dots - \beta \zeta_1 \zeta_0 \Psi_2 + \dots)$$

ならば, 式 (15) が成立するだけでなく, 平均の運動エネルギー, 平均の渦度保存の式においても, 項同士が全て打ち消し合って 0 となる, ということを示される (Arakawa, 1966; Lilly, 1965). よって, (4) に対して近似

$$J_A \equiv \frac{1}{3} (J^{++} + J^{+\times} + J^{+\times}) \quad (19)$$

を使えば, 平均の渦度, enstrophy, 運動エネルギーが保存される. これは, 非線形不安定性を予防する, という観点からすると十分すぎるものである. この近似式 (19) は通常

### Arakawa Jacobian

と呼ばれる. Arakawa は, これら 3 つの性質を保存する 4 次の accuracy を持つスキームの作り方も示した. また, 風が非発散, 発散両方の場合における, プリミティブ方程式中の移流項に対する近似も作られている.

Arakawa Jacobian は, 最近 (Jespersen, 1974), いわゆる有限要素法の特別な場合である, ということが示された.

## 文献

- Arakawa, A., 1966: Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion : Two dimensional incompressible flow. Part I *J. Comput. Phys*, **1**, 119–143.
- Charney, J. G., 1966: Some remaining problems in numerical weather prediction. *Advances in Numerical Weather Prediction, Hartford, Conn., Travelers Research Center, Inc.*, 61–70.
- Fjørtoft, R., 1953: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two-dimensional, nondivergent flow. *Tellus*, **5**, 225–230.
- Jespersen, D. C., 1974: Arakawa's method is a finite-element method. *J. Comput. Phys.*, **16**, 383–390.
- Kasahara, A., 1969: Simulation of the earth's atmosphere. *National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colo., NCAR Manuscript*, 27–69, 42pp.
- Kreiss, H. and J. Olinger, 1973: Methods for the approximate solution of time dependent problems. *WMO/ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publications Series*, No.10, 107pp.
- Krishnamurti, T. N., M. Kanamitsu, B. Ceselski and M. B. Mathur, 1973: Florida State University's Tropical Prediction Model. *Telles*, **25**, 523–535.
- Leith, C., 1965: Lagrangian advection in an atmospheric model. : WMO-IUGG Symposium on Research and Development Aspects of Long Range Forecasting, Boulder, Colo., 1964. *WMO Tech. Note*, **66**, 168–176.
- Lilly, D. K., 1965: On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. *Mon. Wea. Rev.*, **93**, 11–26.
- Mesinger, F. and A. Arakawa, 1976: Numerical Methods Used in Atmospheric Models. *WMO/ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publications Series*, No.17.
- Orszag, S. A., 1971: On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high-wavenumber components. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 1074.
- Phillips, N. A., 1956: The general circulation of the atmosphere : a numerical experiment. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **82**, 123–164.

- Richtmyer, R. D., 1963: A survey of difference methods for nonsteady fluid dynamics. *National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colo., NCAR Tech. Notes*, 63-2, 25pp.
- Platzman, G. W., 1964: An exact integral of complete spectral equations for unsteady one-dimensional flow. *Dynamical Prediction Grope, Dept. of the Geophysical Sciences, Univ. of Chicago, Tech. Rept.*, **16**, 28pp.
- Shuman, F. G., 1974: Analysis and experiment in nonlinear computational stability. *Difference and Spectral Methods for Atmosphere and Ocean Dynamics Problems, Proc. Symp., Novosibirsk, Part I*, 51-81.