2 次元移流方程式

室井ちあし

1989/12/13

1　2 次元移流方程式の安定性

2 次元線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y, t), \quad c_x, c_y = \text{const.} \tag{1}$$

を考える. 移流の速さ c は

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$$

である.1 次元移流方程式の場合と同様にして (1) の安定性を調べる. まず, 空間微分を 2 次の差分で近似して

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{i,j} = -c_x \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - c_y \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

とする. ただし, 近似を行うとき $x = i\Delta x, \ \ y = j\Delta y$ とし, $u(i\Delta x, \ j\Delta y)$ を $u_{i,j}$ と書いた. 解として, 仮に

$$u_{i,\ j} = Re[U(t) e^{i(kx+ly)}]$$

を代入すれば, 振動方程式

$$\frac{dU}{dt} = i \left(-\frac{c_x}{\Delta x} \sin k\Delta x - \frac{c_y}{\Delta y} \sin l\Delta y \right) U$$

が得られる. 時間微分の近似として, 例えば leapfrog スキームを取るならば, 安定であるための条件は, 任意の許される $k, \ l$ に対して

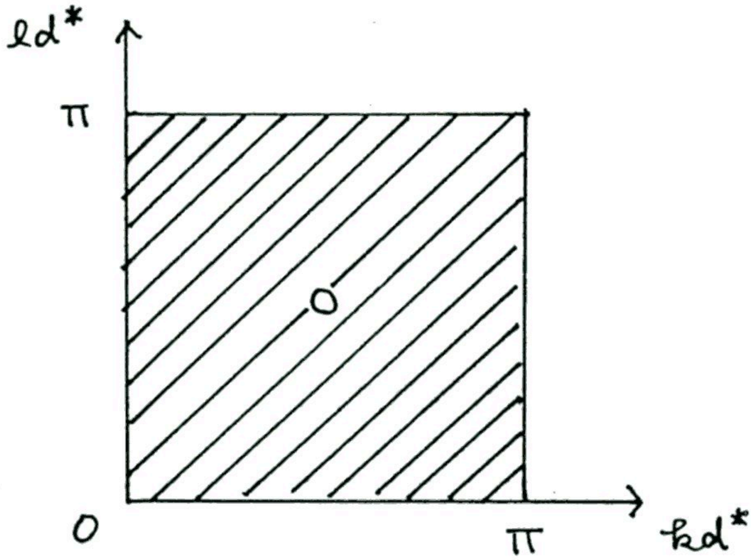

図 1: $\Delta x = \Delta y \equiv d^*$ の場合の 2 次元平面格子における波数の可能領域 (F.Mesinger & A.Arakawa).

$$\left| \left(\frac{c_x}{\Delta x} \sin k\Delta x + \frac{c_y}{\Delta y} \sin l\Delta y \right) \Delta t \right| \leq 1 \tag{2}$$

が成立することである.

話を簡単にするため, $\Delta x = \Delta y \equiv d^*$ の場合のみを考える. kd^*, ld^* を座標に取った波数平面を考えると, 可能な k, l の範囲は図 1 の斜線をつけた領域で表される.

また, (2) の左辺が最大となるのは, $k\Delta x, l\Delta y = \frac{\pi}{2}$ のとき, すなわち, 図 1 で丸をつけた点である. このとき, 波長の x 成分, y 成分は共に $4d^*$ となる.

$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \mathrm{const.}$ という条件の元では, 不等式 (2) の左辺は, $c_x = c_y = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ の時に最大となる. よって, 安定であるための条件は

$$\sqrt{2}c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

となる. よって, 1 次元の時と比べると, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ は, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍以下でなければならない.

最も不安定となりやすいのは, 1 次元の時と同じく, 座標軸方向の波長が最短波長

の 2 倍, $4d^*$ の時である. この波の波数は $\sqrt{k^2+l^2}$ である. よって, 波の進行方向の波長は $\frac{4d^*}{\sqrt{2}}$ である. これは, 全ての $k=l$ なる波に対して成立する.

文献

Mesinger, F. and A. Arakawa, 1976: Numerical Methods Used in Atmospheric Models. *WMO/ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publications Series,* No.**17**.