連続体の記述
オイラー表現・ラグランジュ表現

林 祥介, 竹広 真一

1999 年 07 月 20 日

目 次

要旨

連続体 (特に流体) の記述には, 物質粒子の存在を明示的に意識するか否かで, 大別して 2 種類の方法がある. 物質粒子を明示的に意識しないで, 空間に固定した座標系を用いる場合をオイラーの方法, 連続体を構成する物質粒子を意識して, 物質粒子に固定した座標系を用いる場合をラグランジュの方法, という.

1　物質粒子とラベル

1.1　物質粒子

連続体の各点における物理量を定義するためにその点を中心とした微小部分を考える. この微小部分を, 仮想的な粒子という意味で, 物質粒子 (流体の場合は流体粒子) と呼ぶ[1]. 物質粒子 (流体の場合は流体粒子) は連続的に分布する質点の集合である. 物質粒子という仮想粒子を介して, 連続体は連続的に分布する質点の集合としてとらえられることになる.

連続体の各点の運動学的な量, すなわち, 速度や加速度は, それぞれの点における物質粒子の速度, 加速度として定義される. 力学法則は各物質粒子に対して質点力学を適応することにより得られる.

1.2　ラベル

連続体を記述するためには, 連続体の各場所を指定するための座標を導入しなければならない. 連続体の各場所を指定するとは各物質粒子の位置を指定することに他ならない.

質点力学 (多体系の力学) においては各質点を区別するのに番号付を行う. N 個の質点からなる質点力学の場合は各質点の座標は

$$\boldsymbol{x}_i(t), \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{1}$$

で指定された. 連続体においては, 質点である物質粒子が連続無限個あるので, 各物質粒子を指定するのに番号 i $(i = 1, \ldots, N)$ ではなく 3 次元座標を用いる. 形式的に書けば物質粒子の時刻 t での位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}, t) \tag{2}$$

であらわされる. $\boldsymbol{\alpha}$ は物質粒子を区別するための 3 次元座標で, 空間座標 $\boldsymbol{x}$ に対して ラベル座標 (label coordinate), または, 単にラベルと呼ばれる.

ラベル座標の与え方は, 物質粒子を一意的に指定できさえすれば, 任意である. 質点力学において各質点の番号 (名前) をどのようにつけるかは力学法則には何の影

[1]「連続体概説」参照, 連続体の定義から当然のことであるが, 物質粒子は連続体を構成する原子, 分子を多数含む連続体中の微小部分として考えなければならない.

響もないのと同じである．連続体の場合における番号づけのルールは, 空間座標 $\boldsymbol{x}$ とラベル座標 $\boldsymbol{\alpha}$ とが一対一に対応していることである．すなわち, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}, t)$ を $\boldsymbol{\alpha}$ から $\boldsymbol{x}$ への関数と見立てたときの関数行列式が

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right| \neq 0 \tag{3}$$

となっていさえすればよい．

物質粒子の指定には連続体ならではの不定性がある．質点力学においては, 番号 i と名付けられた質点が他の質点と混同されることはない．質点同士の区別 (さかいめという意味) は自明であるからである．しかし, 連続無限個の物質粒子からなる連続体においては, どこからどこまでを一つの粒子と名付けるかは自明ではない．物質粒子は連続体の微小部分を切り取った体積要素に過ぎないからである．よって, 物質粒子とラベルの対応付を拘束する (覚えておく) なんらかの方法が別途必要となる．

2　ラグランジュ表現 (物質表示)

2.1　ラグランジュ座標

物質粒子のラベル座標として, 物質粒子のとある時刻, たとえば $t = 0$, での位置 $\boldsymbol{\xi}$ を選んだものを ラグランジュ座標(Lagrangian coordinate) という. ラグランジュ座標は質点力学における質点の番号 i の自然な延長である.

形式的に書けば, 物質粒子の時刻 t での座標は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) \tag{4}$$

で指定される. ただし,

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \boldsymbol{\xi} \tag{5}$$

である.

散逸のある流体のように, 物質粒子 (流体粒子) が散逸 (拡散) によって時間とともに周囲とまざってしまうような連続体では, ラグランジュ座標も厳密には定義できない. このような場合にはそもそも流体粒子というもの自体の仮想的実体が不明瞭になっている. 流体粒子が薄まらないで追跡できる時間範囲でのみラグランジュ座標も有効であるが, $t = 0$ での流体粒子が薄まってしまって周囲と混ざった状態になる前に適宜ラグランジュ座標を再定義しなければならない.

2.2　ラグランジュ表現

連続体の物理量一般を記述する座標系としてラグランジュ座標系, すなわち, ($\boldsymbol{\xi}$, t) を用いることをラグランジュ表現 (Lagrangian description), または, 物質表示 (material description) という.

2.3　ラグランジュの方法

連続体を無数の物質粒子の集団として明示的にとらえ, 各粒子の運動を記述することにより連続体全体の運動をとらえる方法である. 物理量は各物質粒子の属性として記述され, したがって, 時間 t および質点の座標 $\boldsymbol{\xi}$ の関数として記述される.

一般的に, 物質粒子の運動にのって現象を見る視点をすべて「ラグランジュ的に見る」という．この意味で, 先の $\boldsymbol{\xi}$ に限らず, 一般に, 物質粒子の位置を記述する座標 (つまり先に述べたラベル座標) は何でもラグランジュ座標と呼ばれる.

2.4　ラグランジュの方法における変位場, 速度場, 加速度場

時刻 t における物質粒子の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) \tag{6}$$

である．空間上の任意の位置のラグランジュ座標を得るためには, 上式の逆関数

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t) \tag{7}$$

を得ておくことが必要である.

連続体の変形は次のようにあらわされる.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) - \boldsymbol{\xi} \tag{8}$$

これを 変位ベクトル という.

物質粒子の座標を時間微分することにより, 連続体の速度場 $\boldsymbol{v}$, 加速度場 $\boldsymbol{a}$ が得られる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t}, & (9) \\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\xi}, t) &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t^2}, & (10) \end{aligned}$$

時間微分は $\boldsymbol{\xi}$ 一定の下で行なう.

よって

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_0^t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t')dt' \tag{11}$$

である．あるいは, 速度場が空間座標 $\boldsymbol{x}$ の関数として与えられているならば

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_0^t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t'), t')dt'. \tag{12}$$

3　オイラー表現 (空間表示)

3.1　オイラー座標

物質粒子のラベル座標を空間座標と同一視し, ラベル座標を明示的には用いない場合, 空間座標のことを特にオイラー座標という.

物質粒子のオイラーラベル座標は, 空間座標を固定しておいて, 当該時刻にその位置にいる物質粒子を指す. 物質粒子にのっかって見れば, 粒子のラベルは各時刻ごとにつけかえられていることになる.

3.2　オイラー表現

連続体の物理量一般を記述する座標系として空間に固定された座標系, すなわち, ($\boldsymbol{x}$, t) を用いることをオイラー表現 (Eulerian description), または, 空間表示 (spatial description) という.

3.3　オイラーの方法

連続体の運動を変形場 (流体ならば流れの場) としてとらえ, 物理量を時間 t および 空間に固定された座標 $\boldsymbol{x}$ の関数として記述する方法である. 物質粒子の存在は変形場 (流体ならば流れの場) の記述の中に陰にはいる.

3.4　オイラーの方法における速度加速度

オイラー表現では物質粒子の位置は, ラグランジュ座標表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$$

の逆関数

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t) \tag{13}$$

で与えられる. $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t)$ は現時刻 t において座標 $\boldsymbol{x}$ にいる粒子のラグランジュ座標, すなわち, $t = 0$ において存在していた位置である.

オイラー座標での 変位ベクトル は, ラグランジュ座標でのそれを変数変換して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi},t) &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t),t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t)-\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t),t)-\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t) \tag{14}$$

である.

速度ベクトルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t),t) \qquad (15)\\ &= \frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t}(\boldsymbol{x},t), \qquad (16)\end{aligned}$$

加速度ベクトルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t),t) \qquad (17)\\ &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t^2}(\boldsymbol{x},t) \qquad (18)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \qquad (19)\end{aligned}$$

これらの量は, ある時間 t において空間の固定点 $\boldsymbol{x}$ に存在する連続体についての量であることに注意が必要である. 同一の $\boldsymbol{x}$ における異なる時間での値は, 一般に異なる連続体粒子についての量を表わしている.

4 ラグランジュ微分とオイラー微分

4.1 時間微分もラグランジュとオイラー

ある連続体粒子についての物理量の時間変化を表わす時間微分をラグランジュ微分 (物質微分 : material derivative) と呼び, 通常

$$\frac{d}{dt} \tag{20}$$

で表わす.

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} \tag{21}$$

一方, 空間のある固定点でみたときの物理量の時間変化を表わす時間微分をオイラー微分と呼び, 通常

$$\frac{\partial}{\partial t} \tag{22}$$

で表わす.

$$\frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{23}$$

4.2 ラグランジュ微分のオイラー表現

ある物理量 A のオイラー表現が得られているとする. ある時間 t において $\boldsymbol{x}$ に位置した物質粒子は Δt 時間後の位置は $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\Delta t$ である. したがって, 物質粒子とともに移動して見た A の時間変化 ΔA は

$$\Delta A = A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}\Delta t, t + \Delta t) - A(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial A}{\partial t}\Delta t + \nabla A \cdot \boldsymbol{v}\Delta t,$$

ゆえに

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla A.$$

よって, ラグランジュ微分のオイラー表現は

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \tag{24}$$

で与えられる.

5　一般化 ラグランジュ 表現

ラベル座標として仮想的な物質粒子の初期位置を定義する方法を一般化ラグランジュ表現 (generalized Lagrangian description) という. 形式的に書けば, 例えば,

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)$$

のようなものである. $\boldsymbol{\xi}$ は通常のラグランジュ座標, $\boldsymbol{X}$ が仮想的な物質粒子の初期位置としてのラベル座標で, 実用上空間座標と同一視することが多い. $\boldsymbol{U}$ は $\boldsymbol{X}$ からの仮想的変位である.

仮想的変移として用いられる座標には, たとえば, 重心の位置とか, 位相平均された位置などがある.

6 参考文献

Batchelor, G.K. 著, 橋本英典 他 訳 : 入門流体力学, 東京電機大学出版局, 614pp.

Landau,L.D., Lifshitz,E.M. 著, 竹内 均 訳, 1970 : 流体力学 1, 東京図書, 280pp.

今井　功, 1973 : 流体力学 (前編), 裳華房, 428pp.

7 謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっている. 原作版は竹広真一による「流体力学の基礎」 (1989-04-21) であり, 保坂征宏による改定 (1990-04-23) を経て, 林祥介, 竹広真一によって「連続体の記述」として書き直された (1996-04-23). 構成とデバッグに協力してくれたセミナー参加者のすべてに感謝するものである.