

プリミティブ方程式系の導出

伊藤 旭人

神戸大学 理学部 惑星学科
流体地球物理学教育研究分野

2022/03/24

要旨

本論文では、大気、海洋のモデリングにおいて重要な方程式系である三次元球面プリミティブ方程式系の導出を行った。流体力学の基礎方程式系は運動方程式、連続の式、熱力学の式で構成される。プリミティブ方程式系は、その中の運動方程式に対していくつかの近似を行ったものである。その近似とは静水圧近似、浅い流体近似、伝統的近似であり、これらは大気、海洋の性質を反映したものとなっている。なお、導出にあたっては、地球流体電脳倶楽部の「DCPAM5 支配方程式系の導出に関する参考資料」を大いに参考に行っている。

目次

第1章	はじめに	1
第2章	プリミティブ方程式系の導出	2
2.1	導出する方程式系	2
2.2	出発点となる基本法則	3
2.2.1	状態方程式	3
2.2.2	連続の式	4
2.2.3	運動方程式	4
2.2.4	熱力学の式	5
2.3	回転系における表現	6
2.3.1	一般的なスカラー, ベクトルの微分の表現	7
2.3.2	方程式系の表現	9
2.4	球座標系における表現	10
2.4.1	直交曲線座標系における一般的なスカラー, ベクトルの微分の表現	10
2.4.2	球座標系における一般的なスカラー, ベクトルの微分の表現	10
2.4.3	球座標系における方程式系の表現	11

2.5	z -座標プリミティブ方程式系	12
2.5.1	静力学近似	12
2.5.2	伝統的近似	12
2.5.3	浅い流体の近似	12
2.6	p -座標プリミティブ方程式系	13
2.6.1	一般的なスカラー微分の表現	13
2.6.2	方程式系の表現	15
2.7	方程式系の最終形	17
第3章 まとめ		19
謝辞		20
参考文献		21

第1章 はじめに

著者の長期的な目的は惑星気候のパラメータ依存性の解明への貢献である。このテーマについての先行研究の一つである Kaspi & Showman (2015) では大気大循環モデルを用いてパラメータ実験を行い、仮想的な地球型惑星の気候のパラメータ依存性を明らかにした。この実験において、大気大循環モデルの力学過程にはプリミティブ方程式系が採用され、物理過程には放射、表面境界層、水循環の過程が取り入れられている。そこで、本論文ではプリミティブ方程式系の導出を行い、その系で表現される運動の性質への理解を深める。

第2章 プリミティブ方程式系の導出

2.1 導出する方程式系

導出する方程式系の形式は Kaspi & Showman (2015) におけるものとする。方程式系は球面上における三次元プリミティブ方程式系であり、設定としては、Kaspi & Showman (2015) にならい自転軸傾斜角ゼロ、水惑星、理想気体とする。採用している座標系は経度、緯度、気圧座標系である。導出する方程式系を以下に示す。

$$\frac{Du}{Dt} - 2\Omega v \sin \theta - \frac{uv}{a} \tan \theta = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \Sigma_u \quad (2.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega u \sin \theta + \frac{u^2}{a} \tan \theta = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \Sigma_v \quad (2.2)$$

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \ln p} - R_d T_v \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{R_d T_v \omega}{c_p p} = Q_r + Q_c + Q_b. \quad (2.5)$$

(2.1), (2.2), (2.3) はそれぞれ東西、南北、鉛直方向の運動方程式、(2.4) は連続の式、(2.5) は熱力学の式である。ただし、 u , v , ω はそれぞれ経度 (λ), 緯度 (θ), 気圧 (p) 方向の速度、 Φ は重力ポテンシャル、 T は温度、 T_v は仮温度である。物質微分は $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ で与えられ、 $\mathbf{u} = (u, v, \omega)$ であり、 t は時間である。 Σ_u , Σ_v は境界層からの表面応力項、 R_d は乾燥空気の気体定数、 c_p は空気の比熱、 a は惑星半径、 Q_r , Q_c , Q_b はそれぞれ単位質量あたりの放射、対流、境界層加熱である。次節以降において、上記五つの方程式系の導出を行う。

2.2 出発点となる基本法則

2.2.1 状態方程式

理想気体の大気を仮定し, 空気を乾燥空気と水蒸気の混合気体として扱う. 状態方程式は乾燥空気と水蒸気に対してそれぞれ,

$$p_d = \rho_d R_d T \quad (2.6)$$

$$p_v = \rho_v R_v T \quad (2.7)$$

と書ける. ただし, ρ は密度, R は気体定数, 下付き添え字 d, v はその物理量がそれぞれ乾燥空気, 水蒸気のものであることを表す. 添え字無しのは混合気体の物理量である. (2.6), (2.7) より, 全圧 p は,

$$\begin{aligned} p &= p_d + p_v \\ &= (\rho_d R_d + \rho_v R_v) T \\ &= \rho R_d \left(\frac{\rho - \rho_v}{\rho} + \frac{\rho_v R_v}{\rho R_d} \right) T \\ &= \rho R_d \left[1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) \frac{\rho_v}{\rho} \right] T \\ &= \rho R_d \left[1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) q \right] T \end{aligned}$$

となる. ただし, $q \equiv \rho_v / \rho$ は比湿である. 混合空気の気体定数 $R \equiv R_d \left[1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) q \right]$ を用いると,

$$p = \rho R T \quad (2.8)$$

となり, これが混合空気の状態方程式である. 仮温度^{*1} $T_v \equiv \left[1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) q \right] T$ を用いると, 別の表現として

$$p = \rho R_d T_v \quad (2.9)$$

と書くこともできる.

^{*1}仮温度 T_v の下付き添え字 v は virtual temperature の頭文字の意味であり, 水蒸気に対する物理量の意味ではない.

2.2.2 連続の式

連続の式 (質量保存則) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (2.10)$$

である. ただし, $i = 1, 2, 3$ であり, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ は直交直線座標系における位置ベクトル, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (u, v, w)$ は風速ベクトルである. 水蒸気の生成, 消滅による質量変化は無視している. (2.10) をベクトル表示にすると,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.11)$$

となる.

2.2.3 運動方程式

運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = \Sigma'_i \quad (2.12)$$

である. ただし, $j = 1, 2, 3$, Φ^* は重力ポテンシャル, $\Sigma' = (\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3) = (\Sigma'_x, \Sigma'_y, 0)$ は境界層からの表面応力である. 水蒸気の生成, 消滅による運動量変化は無視している. 連続の式 (2.10) を用いて変形すると

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = \Sigma'_i \quad (2.13)$$

となり, ラグランジュ形式で書くと

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = \Sigma'_i \quad (2.14)$$

である. ベクトル形式で書くと

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p + \rho \nabla \Phi^* = \Sigma' \quad (2.15)$$

である.

2.2.4 熱力学の式

単位質量あたりの全エネルギーの保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + I + \Phi^* \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho v_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + I + \Phi^* + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \rho Q + \Sigma'_i v_i \quad (2.16)$$

であり、ベクトル形式で書くと

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + I + \Phi^* \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + I + \Phi^* + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \rho Q + \Sigma' \cdot \mathbf{v} \quad (2.17)$$

である。ただし、 Q は外部からの加熱率、 I は内部エネルギーである。水蒸気の生成消滅に関する項は無視している。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の保存則は、(2.13) に v_i をかけ、変形を行うことで得られる。

$$\rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho v_i \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = v_i \Sigma'_i. \quad (2.18)$$

(2.18) の左辺第一項と第二項は、途中 (2.10) を用いて変形すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\rho \frac{\partial v_i^2}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i^2) - v_i^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i^2 v_j) - \rho v_i^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i^2) - v_i^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i^2 v_j) - v_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i^2 v_j) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。(2.18) の左辺第四項は、 $\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = 0$ の仮定と (2.10) を用いると

$$\begin{aligned} \rho v_i \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} &= \rho v_i \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \Phi^*) - \rho \Phi^* \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi^*) - \Phi^* \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i \Phi^*) - v_i \Phi^* \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \rho \Phi^* \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi^*) - \Phi^* \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i \Phi^*) - \Phi^* \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi^*) - \Phi^* \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi^*) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i \Phi^*) \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる. (2.18), (2.19), (2.20) より,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 + \rho \Phi^* \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 v_j + p v_i + \rho \Phi^* v_i \right) = p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \Sigma'_i \quad (2.21)$$

を得る. これが運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の保存則である. (2.16) と (2.21) の差をとり, (2.10) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho I) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho I v_i) &= -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \rho Q \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho I) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho I v_i) &= -\frac{p}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) - v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right] + \rho Q \\ \rho \frac{\partial I}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial I}{\partial x_i} &= \frac{p}{\rho} \left[v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + \rho Q \end{aligned}$$

を得る. ラグランジュ形式で書くと,

$$\rho \frac{dI}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho Q \quad (2.22)$$

となる. これが内部エネルギー保存式である. 内部エネルギーは温度を用いて

$$I = c_v T \quad (2.23)$$

と書ける. ただし, c_v は定積比熱である. (2.9), (2.22), (2.23) と定圧比熱 $c_p = c_v + R$ より

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt}(c_v T) &= \frac{\rho R T}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{RT} \right) + \rho Q \\ \frac{d}{dt}(c_v T) &= \frac{T}{\rho} \left(\frac{1}{T} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{T^2} \frac{dT}{dt} \right) + Q \\ \frac{d}{dt}[(c_v + R)T] &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + Q \\ \frac{d}{dt}(c_p T) &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + Q \end{aligned}$$

を得る. これは c_p を一定 (乾燥空気のもの) とすると

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q}{c_p} \quad (2.24)$$

と書ける. これが熱力学の式である.

2.3 回転系における表現

この節では慣性系から回転系へ方程式系の変換を行う. まず一般的な微分の表現を示してから, それを方程式系に適用する.

2.3.1 一般的なスカラー、ベクトルの微分の表現

慣性系における微分を添字 I , 回転系における微分を添字 R で表す. このとき任意のスカラー ψ に対し

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_R \quad (2.25)$$

である.

次に, 一定の角速度 Ω で回転する系における任意のベクトルの微分の表現を示す. そのためにまず, 図 2.1 にあるような大きさが一定のベクトル \mathbf{C} について調べる. 具体的には, \mathbf{C} の向きが微小経度 $\delta\lambda$ 分変化する場合を考える. 変化後のベクトルを \mathbf{C}' , 変化分を $\delta\mathbf{C}$ とする. また $\delta\mathbf{C}$ の向きをもつ単位ベクトルを \mathbf{m} とする. このとき, $\delta\mathbf{C}$ の大きさは, \mathbf{C} と \mathbf{C}' の赤道面上への射影が作る扇形の弧の長さ $|\mathbf{C}|\cos\theta\delta\lambda$ に近似できるので,

$$\delta\mathbf{C} = |\mathbf{C}|\cos\theta\delta\lambda\mathbf{m}$$

である. また, $\delta\lambda = |\Omega|\delta t$ より

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{C} &= |\mathbf{C}||\Omega|\cos\theta\delta t\mathbf{m} \\ &= |\mathbf{C}||\Omega|\sin\hat{\theta}\delta t\mathbf{m} \end{aligned}$$

となる. ただし, $\hat{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta$ は Ω と \mathbf{C} のなす角である. したがって,

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{C} &= \Omega \times \mathbf{C} \delta t \\ \left(\frac{d\mathbf{C}}{dt}\right)_I &= \Omega \times \mathbf{C} \end{aligned} \quad (2.26)$$

である.

大きさ一定のベクトルの微分について示したので, 次は任意のベクトル $\mathbf{A} = i'A'_x + j'A'_y + k'A'_z$ について調べる. ここで, i', j', k' は回転系 $O - x'y'z'$ における単位ベクトルである. \mathbf{A} の物質微分をとり, (2.25), (2.26) を用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_I &= i' \left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_I + j' \left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_I + k' \left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_I + A'_x \left(\frac{di'}{dt}\right)_I + A'_y \left(\frac{dj'}{dt}\right)_I + A'_z \left(\frac{dk'}{dt}\right)_I \\ &= i' \left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_R + j' \left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_R + k' \left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_R + A'_x \Omega \times i' + A'_y \Omega \times j' + A'_z \Omega \times k' \\ &= \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_R + \Omega \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.27)$$

*2Vallis (2017) より引用.

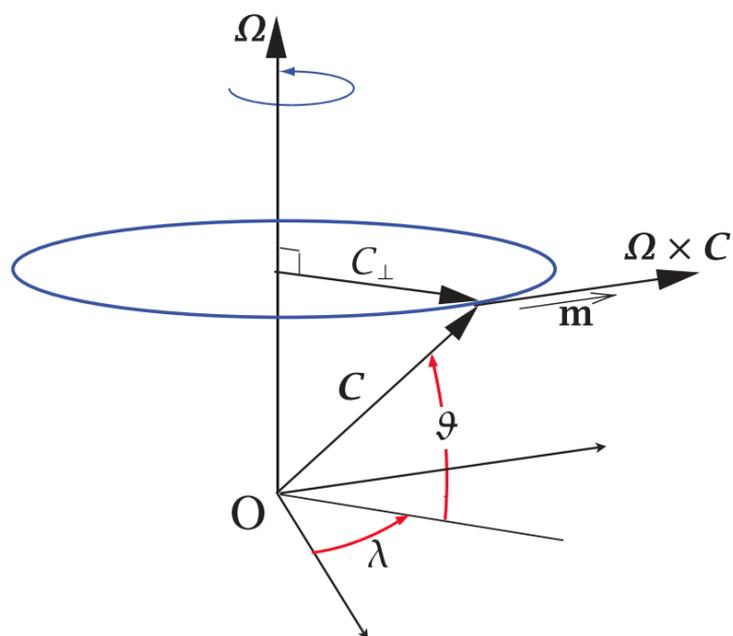


図 2.1: 一定の角速度 Ω で回転する系における, 大きさ一定のベクトル C *2.

を得る. $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ (\mathbf{r} は位置ベクトル) とすると, 慣性系における速度 $\mathbf{v}_I = (d\mathbf{r}/dt)_I$ は, 回転系における速度 $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt)_R$ を用いて

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.28)$$

と書ける. $\mathbf{A} = \mathbf{v}_I$ とおくと

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_I}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d\mathbf{v}_I}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_I \\ &= \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})\right]_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

である. \mathbf{v}_I と \mathbf{v} はそれぞれ慣性系, 回転系における速度とわかっているので, その微分もそれぞれ同じ系において行うとして, 以降は添字を省略する. すると上の式は

$$\frac{d\mathbf{v}_I}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.29)$$

と書ける.

2.3.2 方程式系の表現

運動方程式の回転系における表現を示す. (2.15) に (2.29) を用いると

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \nabla \Phi^* + \boldsymbol{\Sigma}$$

を得る. ただし, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}'/\rho$ である. ここで $\Phi \equiv \Phi^* + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2$ とすると

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.30)$$

となる.

連続の式 (2.11), 熱力学の式 (2.24) において, 物質微分はスカラーのみに作用しているため, 回転系への変換によりその形を変えない. また, 連続の式における速度場の発散も形を変えない. したがって, これらの式の形は回転系への変換により変更を受けない.

2.4 球座標系における表現

次に、球座標系への変換を行う。その前段階として、より一般的な直交曲線座標系における微分の形を掲載し、それをを用いて球座標系における表現を示す。

2.4.1 直交曲線座標系における一般的なスカラー、ベクトルの微分の表現

一般的な直交曲線座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) において、任意のスカラー ψ と任意のベクトル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ の微分は以下のように表せる。

$$\nabla\psi = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_3} \right) \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial\xi_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial\xi_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial\xi_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\psi \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{v_i}{h_i} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \left[\frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{v_j}{h_j} \frac{\partial A_j}{\partial\xi_j} + \left(-\frac{v_j}{h_j} \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial\xi_i} + \frac{v_i}{h_i} \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial\xi_j} \right) A_j \right]. \quad (2.34)$$

ただし、 \mathbf{e}_i は各軸方向の基底ベクトル、 $h_i \equiv |\mathbf{e}_i|$ は各軸方向のスケール因子である。

2.4.2 球座標系における一般的なスカラー、ベクトルの微分の表現

(2.31)–(2.34) において $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\lambda, \theta, r)$ の場合を考える。ただし、 r は鉛直座標である。これらの座標と、回転系に固定された直交直線座標 (x, y, z) との関係は

$$x = r \cos\theta \cos\lambda \quad (2.35)$$

$$y = r \cos\theta \sin\lambda \quad (2.36)$$

$$z = r \sin\theta \quad (2.37)$$

である。以下、各軸方向に関する量であることを添字 λ, θ, r で表し、速度ベクトルを (u, v, w) とする。各軸方向のスケール因子は

$$h_\lambda = r \cos\theta, \quad h_\theta = r, \quad h_r = 1 \quad (2.38)$$

である. これを (2.31)–(2.34) に代入すると, 球座標系における微分の形が導ける.

$$\nabla\psi = \left(\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (2.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \cos \theta} \left[r \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + r \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \cos \theta) + \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) \right] \quad (2.40)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + w \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \mathbf{e}_\lambda \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \theta} + w \frac{\partial A_\lambda}{\partial r} - \frac{u \tan \theta}{r} A_\theta + \frac{u}{r} A_r \right) \\ &+ \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + w \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{u \tan \theta}{r} A_\lambda + \frac{v}{r} A_r \right) \\ &+ \mathbf{e}_r \left(\frac{\partial A_r}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + w \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{u}{r} A_\lambda + \frac{v}{r} A_\theta \right) \\ &= \mathbf{e}_\lambda \left(\frac{dA_\lambda}{dt} - \frac{u \tan \theta}{r} A_\theta + \frac{u}{r} A_r \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{dA_\theta}{dt} - \frac{u \tan \theta}{r} A_\lambda + \frac{v}{r} A_r \right) \\ &+ \mathbf{e}_r \left(\frac{dA_r}{dt} - \frac{u}{r} A_\lambda + \frac{v}{r} A_\theta \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.4.3 球座標系における方程式系の表現

(2.39)–(2.42) を用いて方程式系を変形する. 運動方程式のコリオリ項は,

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= 2\Omega(\mathbf{e}_\theta \cos \theta + \mathbf{e}_r \sin \theta) \times (u\mathbf{e}_\lambda + v\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_r) \\ &= 2\Omega[\mathbf{e}_\lambda(w \cos \theta - v \sin \theta) + \mathbf{e}_\theta u \sin \theta - \mathbf{e}_r u \cos \theta] \end{aligned} \quad (2.43)$$

と書ける. 重力加速度 \mathbf{g} は惑星中心を向いているとする. これらより運動方程式は, 成分ごとに書くと, (2.30) より

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - 2\Omega(w \cos \theta - v \sin \theta) + \frac{uv}{r} \tan \theta - \frac{uw}{r} + \Sigma_\lambda \quad (2.44)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - 2\Omega u \sin \theta - \frac{u^2}{r} \tan \theta - \frac{vw}{r} + \Sigma_\theta \quad (2.45)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 2\Omega u \cos \theta + \frac{uw}{r} + \frac{v^2}{r} - g \quad (2.46)$$

となる. 連続の式は, (2.11) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

と書ける. 熱力学の式は物質微分の中身が変わるのみで, 形に変化はない.

2.5 z - 座標プリミティブ方程式系

運動方程式に対して以下の三つの近似を行い, z - 座標系におけるプリミティブ方程式系を導く.

2.5.1 静力学近似

鉛直方向の運動方程式 (2.46) を, 静力学平衡の式

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.48)$$

で置き換える. 鉛直速度の物質微分, コリオリ項, メトリック項を無視している. ただし, z は海拔高度である.

2.5.2 伝統的近似

$w \ll u, v$ の仮定のもと, 水平方向の運動方程式に近似を行う. 水平方向の運動方程式におけるコリオリ項とメトリック項のうち, 鉛直速度 w がかかっているものを無視する.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin \theta + \frac{uv \tan \theta}{r} + \Sigma_\lambda \quad (2.49)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - 2\Omega u \sin \theta - \frac{u^2 \tan \theta}{r} + \Sigma_\theta. \quad (2.50)$$

2.5.3 浅い流体の近似

大気の層の厚さが惑星半径と比べて十分に小さいことを仮定し, 方程式中の r を, 微分の独立変数として用いられる場合を除き, 惑星半径 a に置き換える. 水平

方向の運動方程式にこの近似を行った上で, 方程式系を改めて以下に示す.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho a \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin \theta + \frac{uv \tan \theta}{a} + \Sigma_\lambda \quad (2.51)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \theta} - 2\Omega u \sin \theta - \frac{u^2 \tan \theta}{a} + \Sigma_\theta \quad (2.52)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.53)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.54)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q}{c_p} \quad (2.55)$$

$$p = \rho R_d T_v. \quad (2.56)$$

ただし,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.58)$$

である.

2.6 p - 座標プリミティブ方程式系

静力学平衡のもとでは, p は z に対し単調減少する. そこで, 鉛直座標を z から p へ変換する. z と p の関係は, (2.53) と (2.56) を合わせて

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{pg}{R_d T_v} \quad (2.59)$$

と書ける.

2.6.1 一般的なスカラー微分の表現

任意のスカラー ψ の微分の表現を示す. 以下, 偏微分の下付き添字に関して, z が z - 座標系における微分を, p が p - 座標系における微分を表すと決める. 鉛直微分については, ある独立変数の異なる独立変数での微分がゼロであることと,

(2.59) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial p} &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_z \frac{\partial\lambda}{\partial p} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_z \frac{\partial\theta}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial\psi}{\partial p} \\ &= -\frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial\psi}{\partial p}\end{aligned}\quad (2.60)$$

を得る. 経度微分は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_p &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_z \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\lambda}\right)_p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_z \left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)_p + \frac{\partial\psi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_z \left(\frac{\partial t}{\partial\lambda}\right)_p \\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_z &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial\psi}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_p\end{aligned}\quad (2.61)$$

となる. 緯度微分は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_p &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_z \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\right)_p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_z \left(\frac{\partial\theta}{\partial\theta}\right)_p + \frac{\partial\psi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)_p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_z \left(\frac{\partial t}{\partial\theta}\right)_p \\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_z &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial\psi}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)_p\end{aligned}\quad (2.62)$$

となる. 時間微分は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_p &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_z \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)_p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_z \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_p + \frac{\partial\psi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_z \left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)_p \\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_z &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial\psi}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p\end{aligned}\quad (2.63)$$

である. 物質微分は, (2.60)–(2.63) を用いて

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_z &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_z + \frac{u}{a \cos\theta} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_z + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_z + w \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_p + \frac{u}{a \cos\theta} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_p + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_p \\ &\quad + \frac{gp}{R_d T_v} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \frac{u}{a \cos\theta} \left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_p + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)_p - w \right] \frac{\partial\psi}{\partial p} \\ &= \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_p\end{aligned}\quad (2.64)$$

と書ける. ここで, p -座標系における鉛直速度を

$$\omega \equiv \left(\frac{dp}{dt}\right)_z = \frac{gp}{R_d T_v} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + \frac{u}{a \cos\theta} \left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)_p + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)_p - w \right]\quad (2.65)$$

と定義する.

2.6.2 方程式系の表現

方程式系 (2.51)–(2.56) の p -座標系における表現を求める. 経度方向の圧力勾配は, (2.61) と $\Phi = gz$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_z &= \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial p}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_p \right] \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_p \end{aligned} \quad (2.66)$$

と書ける. 緯度方向の圧力勾配は, (2.62) と $\Phi = gz$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_z &= \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial p}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_p \right] \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_p \end{aligned} \quad (2.67)$$

と書ける. (2.51), (2.52) と合わせると, 運動方程式の水平成分は

$$\frac{du}{dt} - 2\Omega v \sin \theta - \frac{uv \tan \theta}{a} = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \Sigma_\lambda \quad (2.68)$$

$$\frac{dv}{dt} + 2\Omega u \sin \theta + \frac{u^2 \tan \theta}{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \Sigma_\theta \quad (2.69)$$

となる. 静力学平衡の式 (2.53) は, $\Phi = gz$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\frac{R_d T_v}{p} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \ln p} &= -R_d T_v \end{aligned} \quad (2.70)$$

と書ける.

次に、連続の式の表現を求める．速度の発散は、(2.64) を用いて

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{v})_z &= \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_z + \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right)_z + \frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \frac{1}{a \cos \theta} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_p \right] \\
&\quad + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial}{\partial p} (v \cos \theta) \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_p \right] \\
&\quad - \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{dz}{dt} \right)_z \\
&= \frac{1}{a \cos \theta} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_p \right] \\
&\quad + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right)_p + \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial}{\partial p} (v \cos \theta) \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_p \right] \\
&\quad - \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \frac{u}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_p + \omega \frac{\partial z}{\partial p} \right] \\
&= \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right)_p \\
&\quad + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial u}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{gp}{R_d T_v} \frac{\partial}{\partial p} (v \cos \theta) \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_p \\
&\quad - \frac{gp}{R_d T_v} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial p} \left[u \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_p \right] + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial p} \left[v \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_p \right] + \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{\partial z}{\partial p} + \omega \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \right\} \\
&= \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} \\
&\quad - \frac{gp}{R_d T_v} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_p + \omega \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \right] \\
&= \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{gp}{R_d T_v} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) \right]_p \tag{2.71}
\end{aligned}$$

となる．ただし、 $\mathbf{u} = (u, v, \omega)$ であり、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} \tag{2.72}$$

である. (2.56), (2.60), (2.71) より, 連続の式 (2.54) は

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v})_z \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{gp}{R_d T_v} \frac{d}{dt} \left(-\frac{R_d T_v}{gp} \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \\
&= \nabla \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

と書ける.

最後に熱力学の式を示す. (2.55) の右辺第一項は, (2.64) より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p \rho} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_p + \frac{u}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_p + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_p + \omega \frac{\partial p}{\partial p} \right] \\
&= \frac{R_d T_v \omega}{c_p p}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

と書ける. また, 加熱項を

$$\frac{Q}{c_p} = Q_r + Q_c + Q_b \tag{2.75}$$

のように要素ごとに分けることとすると, (2.55) は

$$\frac{dT}{dt} - \frac{R_d T_v \omega}{c_p p} = Q_r + Q_c + Q_r \tag{2.76}$$

と書ける.

2.7 方程式系の最終形

ここまで示してきた方程式系を改めて掲載する. Kaspi & Showman (2015) の表記に合わせるため d/dt を D/Dt と書き換え, $\Sigma_\lambda, \Sigma_\theta$ を $-\Sigma_u, -\Sigma_v$ と書き換える

ことにすると

$$\frac{Du}{Dt} - 2\Omega v \sin \theta - \frac{uv}{a} \tan \theta = -\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \Sigma_u \quad (2.77)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega u \sin \theta + \frac{u^2}{a} \tan \theta = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \Sigma_v \quad (2.78)$$

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \ln p} - R_d T_v \quad (2.79)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.80)$$

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{R_d T_v \omega}{c_p p} = Q_r + Q_c + Q_b. \quad (2.81)$$

$$p = \rho R_d T_v \quad (2.82)$$

である。これは、求めるべき方程式系 (2.1)–(2.5) に状態方程式を加えたものである。

第3章 まとめ

本論文において, 三次元球面上における p -座標プリミティブ方程式系を導出した. 出発点は理想気体の状態方程式, 質量保存則, 運動量保存則, エネルギー保存則である. 重要な近似として, 静水圧近似, 浅い流体近似, 伝統的近似を用いた.

謝辞

林祥介教授には、基礎理論講義や基礎理論読書会にて地球流体力学の考え方についてご指導いただき、また本論文の改善についてのご助言をいただきました。高橋芳幸准教授には、先行研究論文の読解の際にお世話になり、研究の方向性や参考文献についても多くのご指導をいただきました。樫村博基講師には、大気セミナーにて研究発表の改善点についてご指導いただきました。また、神戸大学地球および惑星大気科学研究室の皆さまには、セミナーでの議論を通して大気流体力学の基礎を学ぶ中で大変お世話になりました。ここに深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Geoffrey, K. Vallis, 2017: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation, 2nd edn. Cambridge University Press.
- [2] Yohai Kaspi & Adam P.Showman, 2015: ATMOSPHERIC DYNAMICS OF TERRESTRIAL EXOPLANETS OVER A WIDE RANGE OF ORBITAL AND ATMOSPHERIC PARAMETERS. *The Astrophysical Journal*, 804:60, 18pp. doi:10.1088/0004-637X/804/1/60
- [3] 地球流体電脳倶楽部, 2009: DCPAM5 支配方程式系の導出に関する参考資料. http://dennou-k.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf