二流近似を用いた
地球大気の放射伝達計算

流体地球物理学教育研究分野
1863426S　田村 笙

発表の流れ

1 研究目的

2 計算式の導出

3 計算式の検討

4 まとめ

1 研究目的

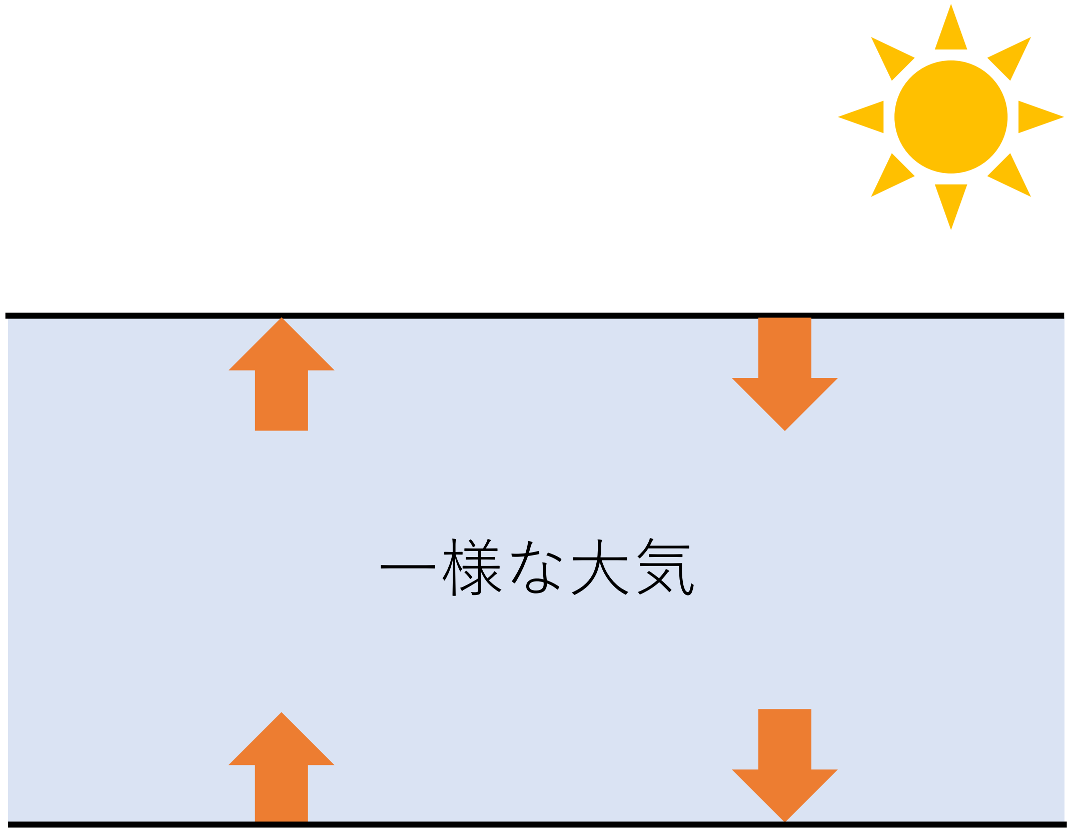
- 多くの気候モデルにおいて放射伝達過程が考慮される
- 気候モデルのシミュレーション時間短縮のため, 放射伝達計算の高速化が必要

→放射伝達計算を高速に行うための計算式を考え, 検証する

2 計算式の導出

方針

- 光学的特性が一様な大気を仮定
- 太陽放射を想定
- 放射伝達方程式を**二流近似**する.
- 大気上端および下端での上向き, 下向き放射フラックスの計算式を考える.



2 計算式の導出

二流近似

放射伝達方程式を，上向き及び下向きフラックスに関する二つの微分方程式に近似.

二流近似方程式

$$\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - S^+$$

$$\frac{\mathrm{d}F^-}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + S^-$$

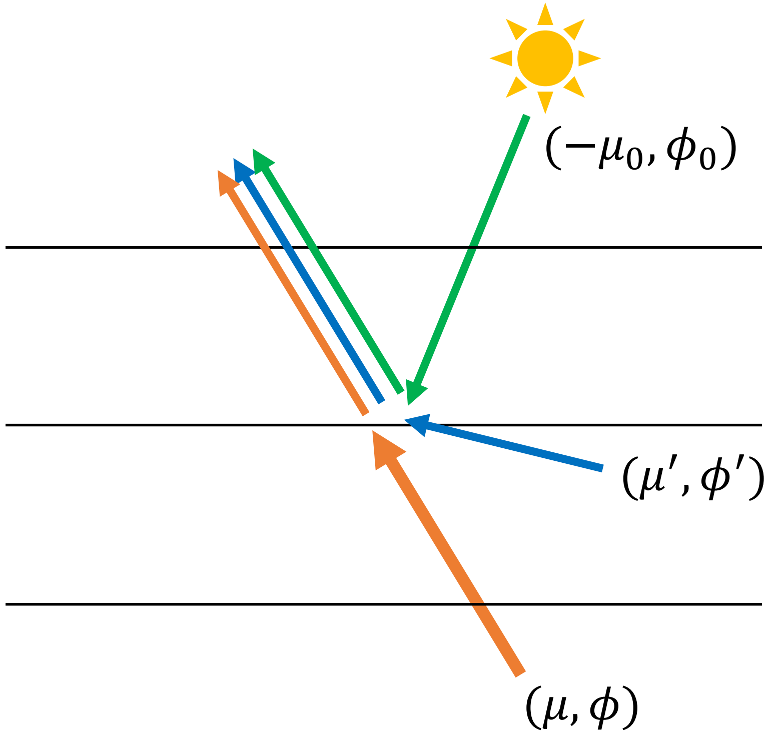
F^+: 上向き放射フラックス
F^-: 下向き放射フラックス
τ: 光学的深さ

2 計算式の導出

平行平面大気の放射伝達方程式

$$\mu \frac{\partial I_\nu(\tau,\mu,\phi)}{\partial \tau} = I_\nu(\tau,\mu,\phi) - \frac{\widetilde{\omega}_\nu}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} p_\nu(\mu,\phi;\mu',\phi') I_\nu(\tau,\mu',\phi')\,\mathrm{d}\phi'\,\mathrm{d}\mu' - \frac{\widetilde{\omega}_\nu}{2} F_{s\nu} p_\nu(\mu,\phi;-\mu_0,\phi_0) e^{-\tau/\mu_0}$$

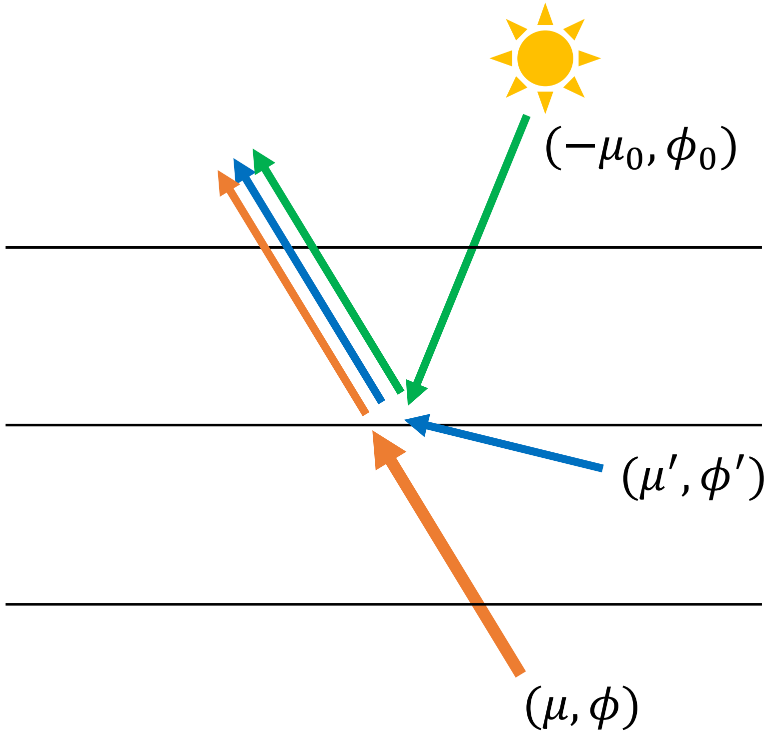
μ: 天頂角の余弦
ϕ: 方位角
I_ν: 振動数 ν から $\nu+\delta\nu$ の間の放射輝度
p_ν: 振動数 ν の散乱位相関数
$\widetilde{\omega}_\nu$: 振動数 ν の一次散乱アルベド
$F_{s\nu}$: 振動数 ν の太陽放射フラックス



2 計算式の導出

平行平面大気の放射伝達方程式

$$\mu \frac{\partial I_\nu(\tau,\mu,\phi)}{\partial \tau} = \boxed{I_\nu(\tau,\mu,\phi)} - \boxed{\frac{\widetilde{\omega}_\nu}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} p_\nu(\mu,\phi;\mu',\phi') I_\nu(\tau,\mu',\phi')\, \mathrm{d}\phi'\, \mathrm{d}\mu'} - \boxed{\frac{\widetilde{\omega}_\nu}{2} F_{s\nu} p_\nu(\mu,\phi;-\mu_0,\phi_0) e^{-\tau/\mu_0}}$$



第一項 (μ,ϕ) 方向からの放射

第二項 (μ,ϕ) 方向への全ての散乱

第三項 $(-\mu_0,\phi_0)$ 方向からの太陽直達光の散乱

※添字 ν は今後省略

2 計算式の導出

放射伝達方程式をϕ, μについて積分

$$\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}\tau} = \int_0^1 I(\tau,\mu)\,\mathrm{d}\mu - \frac{\widetilde{\omega}}{2}\int_0^1\int_{-1}^1 p(\mu,\mu')I(\tau,\mu')\,\mathrm{d}\mu'\,\mathrm{d}\mu - \pi F_s\widetilde{\omega}\beta_0 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}F^-}{\mathrm{d}\tau} = -\int_0^1 I(\tau,-\mu)\,\mathrm{d}\mu + \frac{\widetilde{\omega}}{2}\int_0^1\int_{-1}^1 p(-\mu,\mu')I(\tau,\mu')\,\mathrm{d}\mu'\,\mathrm{d}\mu + \pi F_s\widetilde{\omega}(1-\beta_0)e^{-\tau/\mu_0}$$

$$F^+(\tau) = \int_0^1\int_0^{2\pi}\mu I(\tau,\mu,\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\mu$$

$$F^-(\tau) = -\int_{-1}^0\int_0^{2\pi}\mu I(\tau,\mu,\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\mu = \int_0^1\int_0^{2\pi}\mu I(\tau,\mu,\phi)\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\mu$$

$$I(\tau,\mu) \equiv \int_0^{2\pi} I(\tau,\mu,\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

$$p(\mu,\mu') \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\mu,\phi;\mu',\phi')\,\mathrm{d}\phi$$

$$\beta_0 \equiv \frac{1}{2}\int_0^1 p(\mu,-\mu_0)\,\mathrm{d}\mu = 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 p(-\mu,-\mu_0)\,\mathrm{d}\mu$$

2 計算式の導出

Eddington 近似

放射輝度の ϕ 積分を Legendre 多項式で展開し, 第二項までで打ち切る

$$I(\tau, \mu) = \sum_l I_l(\tau) P_l(\mu) \approx I_0(\tau) + \mathrm{I}_1(\tau)\mu$$

散乱位相関数の ϕ 積分をLegendre 多項式で展開し, 第二項までで打ち切る

$$p(\mu, \mu') = \sum_l (2l+1) g_l P_l(\mu) P(\mu') \approx 1 + 3g\mu\mu'$$

P_l: l次の Legendre 多項式
$I_l,\ g_l$: 展開係数
$g_1 \equiv g$: 非対称因子

2 計算式の導出

Eddington 近似を用いた二流近似方程式

$$\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - \pi F_s \gamma_3 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}F^-}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + \pi F_s \gamma_4 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}[7 - \widetilde{\omega}(4 + 3g)]$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4}[1 - \widetilde{\omega}(4 - 3g)]$$

$$\gamma_3 \equiv \beta_0 = \frac{1}{4}(2 - 3g\mu_0)$$

$$\gamma_4 = 1 - \gamma_3$$

2 計算式の導出

δ -Eddington 近似

前方散乱（入射光と同じ向きの散乱）が他の散乱と比べて強くなることを考慮し，
散乱位相関数を次のように近似する

$$p(\mu, \mu') \approx 2f\delta(\mu - \mu') + (1 - f)(1 + 3g'\mu\mu')$$

$$f = g^2$$ (Joseph *et al.* (1976))

$\delta(x)$: Dirac のデルタ関数

2 計算式の導出

δ -Eddington 近似を用いた二流近似方程式

$$\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - \pi F_s \gamma_3 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\frac{\mathrm{d}F^-}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + \pi F_s \gamma_4 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}[7 - \tilde{\omega}'(4 + 3g')]$$
$$\gamma_2 = -\frac{1}{4}[1 - \tilde{\omega}'(4 - 3g')]$$
$$\gamma_3 \equiv \beta_0 = \frac{1}{4}(2 - 3g'\mu_0)$$
$$\gamma_4 = 1 - \gamma_3$$

パラメータのスケーリング

$$g' = \frac{g}{1+g}, \qquad \tau' = (1 - \tilde{\omega} g^2)\tau, \qquad \tilde{\omega}' = \frac{(1-g^2)\tilde{\omega}}{1 - \tilde{\omega} g^2}$$

2 計算式の導出

放射フラックスの計算式

$$F_{tot}^{+}(\tau) = F^{+}(\tau)$$

$$F_{tot}^{-}(\tau) = F^{-}(\tau) + F_{dir}^{-}(\tau)$$

$$F^{+}(\tau) = k_1 e^{\lambda\tau'} + \Gamma k_2 e^{-\lambda\tau'} + C^{+}(\tau')$$

$$F^{-}(\tau) = \Gamma k_1 e^{\lambda\tau'} + k_2 e^{-\lambda\tau'} + C^{-}(\tau')$$

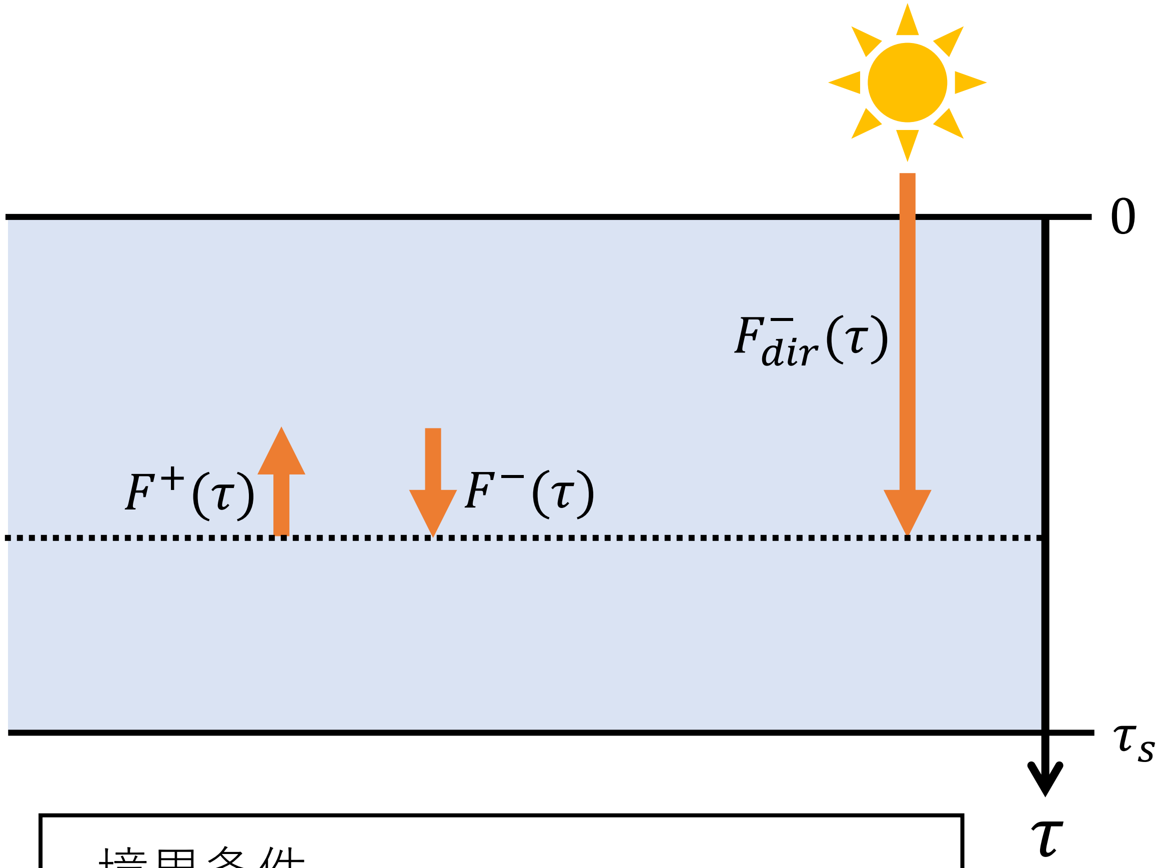
$$F_{dir}^{-}(\tau) = \mu_0 \pi F_s \exp(-\tau/\mu_0)$$

$$\lambda = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^{1/2}$$

$$\Gamma = \gamma_2/(\gamma_1 + \lambda)$$

$$C^{+}(\tau') = \frac{\tilde{\omega}' \pi F_s \exp(-\tau'/\mu_0)\,[(\gamma_1 - 1/\mu_0)\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2}$$

$$C^{-}(\tau') = \frac{\tilde{\omega}' \pi F_s \exp(-\tau'/\mu_0)\,[(\gamma_1 + 1/\mu_0)\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2}$$



境界条件

$$F^{+}(\tau_s) = R_{sfc} F_{tot}^{-}(\tau_s)$$

$$F^{-}(0) = 0$$

R_{sfc}: 地表の反射率

3 計算式の検討

Toon *et al.* (1989) が用いたパラメータ条件について放射フラックス $F^{+}(0), F^{-}(\tau_s)$ を計算し, 計算結果の正確さを評価する

表 1: 各パターンのパラメータ値

	ヘイズA	ヘイズB	雲A	雲B
太陽天頂角の余弦 μ_0	1	1	1	1
光学的深さ τ	1	1	64	64
一次散乱アルベド $\tilde{\omega}$	1	0.9	1	0.9
非対称因子 g	0.794	0.794	0.848	0.848

全ての事例において $R_{suf} = 0,\ F_s = 1$

3 計算式の検討

Toon *et al.* (1989) が用いたパラメータ条件について放射フラックス $F^{+}(0), F^{-}(\tau_s)$ を計算し, 計算結果の正確さを評価する

表 1: 各パターンのパラメータ値

	ヘイズA	**ヘイズB**	**雲A**	**雲B**
太陽天頂角の余弦 μ_0	1	1	1	1
光学的深さ τ	**1**	**1**	64	64
一次散乱アルベド $\tilde{\omega}$	1	0.9	1	0.9
非対称因子 g	**0.794**	**0.794**	0.848	0.848

全ての事例において $R_{suf} = 0,\ F_s = 1$

3 計算式の検討

Toon *et al.* (1989) が用いたパラメータ条件について放射フラックス $F^{+}(0), F^{-}(\tau_s)$ を計算し, 計算結果の正確さを評価する

表 1: 各パターンのパラメータ値

	ヘイズA	ヘイズB	雲A	雲B
太陽天頂角の余弦 μ_0	1	1	1	1
光学的深さ τ	1	1	**64**	**64**
一次散乱アルベド $\tilde{\omega}$	1	0.9	1	0.9
非対称因子 g	0.794	0.794	**0.848**	**0.848**

全ての事例において $R_{suf} = 0,\ F_s = 1$

3 計算式の検討

Toon *et al.* (1989) が用いたパラメータ条件について放射フラックス $F^{+}(0), F^{-}(\tau_s)$ を計算し, 計算結果の正確さを評価する

表 1: 各パターンのパラメータ値

	ヘイズA	**ヘイズB**	**雲A**	**雲B**
太陽天頂角の余弦 μ_0	1	1	1	1
光学的深さ τ	1	1	64	64
一次散乱アルベド $\tilde{\omega}$	**1**	**0.9**	**1**	**0.9**
非対称因子 g	0.794	0.794	0.848	0.848

全ての事例において $R_{suf} = 0,\ F_s = 1$

3 計算式の検討

正確さの評価

$$(\text{相対誤差}) = \frac{|X - X_e|}{X_e}$$

X: 計算値
X_e: Toon *et al.* (1989) に示された ‘exact’ な値

3 計算式の検討

計算結果

- ヘイズ A, B で誤差が大きい
  (特に, $F^{+}(0)$ で 20%~)

- 雲 A, B の誤差は比較的小さい
  (~6% 程度)

- A の方が B よりも誤差が小さい

表 2: 計算結果

	ヘイズA	ヘイズB	雲A	雲B
$F^{+}(0)$	0.210	0.156	2.668	0.354
$F_e^{+}(0)$	0.173	0.124	2.662	0.376
相対誤差[%]	21.5	25.8	0.234	5.79
$F^{-}(\tau_s)$	1.916	1.762	0.473	0.000
$F_e^{-}(\tau_s)$	1.830	1.516	0.480	0.000
相対誤差[%]	5.69	16.2	1.38	-

$F_e^{+}(0)$, $F_e^{-}(\tau_s)$ は Toon *et al.* (1989) より引用

3 計算式の検討

計算結果

- **ヘイズ A, B で誤差が大きい (特に, $F^+(0)$ で 20%~)**

- 雲 A, B の誤差は比較的小さい (~6% 程度)

- A の方が B よりも誤差が小さい

表 2: 計算結果

	ヘイズA	ヘイズB	雲A	雲B
$F^+(0)$	0.210	0.156	2.668	0.354
$F_e^+(0)$	0.173	0.124	2.662	0.376
相対誤差[%]	**21.5**	**25.8**	0.234	5.79
$F^-(\tau_s)$	1.916	1.762	0.473	0.000
$F_e^-(\tau_s)$	1.830	1.516	0.480	0.000
相対誤差[%]	**5.69**	**16.2**	1.38	-

$F_e^+(0)$, $F_e^-(\tau_s)$ は Toon *et al.* (1989) より引用

3 計算式の検討

計算結果

- ヘイズ A, B で誤差が大きい
  (特に, $F^+(0)$ で 20%~)

- **雲 A, B の誤差は比較的小さい**
  (~6% 程度)

- A の方が B よりも誤差が小さい

表 2: 計算結果

	ヘイズA	ヘイズB	雲A	雲B
$F^+(0)$	0.210	0.156	2.668	0.354
$F_e^+(0)$	0.173	0.124	2.662	0.376
相対誤差[%]	21.5	25.8	**0.234**	**5.79**
$F^-(\tau_s)$	1.916	1.762	0.473	0.000
$F_e^-(\tau_s)$	1.830	1.516	0.480	0.000
相対誤差[%]	5.69	16.2	**1.38**	**-**

$F_e^+(0)$, $F_e^-(\tau_s)$ は Toon *et al.* (1989) より引用

3 計算式の検討

計算結果

- ヘイズ A, B で誤差が大きい
  (特に, $F^+(0)$ で 20%~)
- 雲 A, B の誤差は比較的小さい
  (~6% 程度)
- **A の方が B よりも誤差が小さい**

表 2: 計算結果

	ヘイズA	ヘイズB	雲A	雲B
$F^+(0)$	0.210	0.156	2.668	0.354
$F_e^+(0)$	0.173	0.124	2.662	0.376
相対誤差[%]	**21.5**	25.8	**0.234**	5.79
$F^-(\tau_s)$	1.916	1.762	0.473	0.000
$F_e^-(\tau_s)$	1.830	1.516	0.480	0.000
相対誤差[%]	**5.69**	16.2	**1.38**	-

$F_e^+(0)$, $F_e^-(\tau_s)$ は Toon *et al.* (1989) より引用

3 計算式の検討

計算式の検討

- 計算による誤差が10% 程度であれば許容できる (Toon *et al.* (1989))
- 雲A, B は許容範囲内 (相対誤差: ~6%)
- ヘイズA, B については正確さを上げる必要がある

4 まとめ

- 二流近似を用いた放射フラックスの計算式を考えた
- 四つのパターンについて放射フラックスを計算し, 正確さを評価した
- 雲 $(\tau = 64, g = 0.848)$ で小さな相対誤差
- ヘイズ $(\tau = 1,\ g = 0.794)$ で大きな相対誤差

  →正確さを上げる必要がある
- ヘイズ, 雲で $\tilde{\omega} = 1$ の方が $\tilde{\omega} = 0.9$ よりも相対誤差が小さい

参考文献

- Joseph, J. E., 1976: The Delta-Eddington Approximation for Radiative Flux Transfer. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2452-2459.
- Meador, W. E., and W. R. Weaver, 1980: Two-Stream Approximation to Radiative Transfer in Planetary Atmospheres: A Unified Description of Existing Methods and a New Improvement. *J. Atmos. Sci.,* **37**, 630-643.
- Toon, O. B., C. P. McKay, and T. P. Ackerman, 1989: Rapid Calculation of Radiative Heating Rates and Photodissociation Rate in Inhomogeneous Multiple Scattering Atmospheres. *J. Geophys, Res.*, **94**, 287-301.
- Wiscombe, W. J., 1977: The Delta-Eddington Approximation for a Vertically Inhomogeneous Atmosphere. *Tech. Note TN-121 + STR*, Natl. Cent. for Atmos. Res., Boulder, Colo.
- グラント W. ペティ. “詳解 大気放射学 基礎と気象・気候学への応用”. 近藤豊, 茂木信宏訳. 東京大出版会, 2019, 416p.
- 関 友也. “地球大気の放射場に関する放射伝達方程式についての考察”. 2012. http://www.gfd-dennou.org/arch/prepri/2012/kobe-u/120210_tbseki-Bthesis/paper/pub/sotsuron.pdf. (参照: 2022/01/13)
- 地球流体電脳倶楽部. “DCPAM5 支配方程式とその離散化”. 2014. https://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf. (参照: 2022/01/13)