磁気流体の支配方程式の導出

服部 蒼紀

神戸大学 理学部 惑星学科
流体地球物理学教育研究分野

2022/02/18

要旨

本論文では, 地球の外核に代表される導電性が高く回転し, 音速より遅い流速で, 非圧縮性の高い, 流体が従う電磁気学, 流体力学, の近似方程式を導出し, そのうち支配的な項を求める.

目 次

第 1 章　はじめに **1**

1.1 惑星の固有磁場 1

1.2 本論文の構成 1

第 2 章　準備 **2**

2.1 基本方程式 2

2.1.1 電磁気学の式 2

2.1.2 流体力学 3

第 3 章　本論 **7**

3.1 MHD 近似 7

3.1.1 マクスウェル方程式のスケーリング 7

3.1.2 誘導方程式 9

3.1.3 マクスウェルの応力テンソル 10

3.1.4 エネルギー方程式 11

3.2 ブシネスク近似 12

第 4 章　議論 **14**

4.1　スケーリング 14

第 5 章　結論 **15**

謝辞 **16**

参考文献 **17**

第1章　はじめに

1.1　惑星の固有磁場

太陽系の惑星のうち, 火星と木星を除く惑星は固有磁場を持っている. それぞれの惑星ごとの磁場の向きや大きさは異なるが, 固有磁場を持つ惑星は全て導電性流体の回転による力と電磁誘導の相互作用によって磁場を形成している．本論文では回転する磁気流体の物理学について記載する.

惑星流体コアは観測の結果によると, 地球型惑星では鉄を, 木星型惑星では金属水素を, 天王星型惑星では金属的な水で構成されている. [*1] この論文ではこのような固有磁場の問題を解く準備として音速より遅く導電性が高い回転する非圧縮率の高い流体の流体力学, 電磁気学の近似を導出する.

1.2　本論文の構成

2 章では地球外核の基本的な性質とどのようなモデル扱うかを示す．3 章では用いる近似の解説とその近似に基づく方程式系の導出を行う．4 章では流体力学と電磁気学の項を比較し無次元量の概算を行う．5 章はまとめである.

[*1] [3] による高温高圧下の再現実験によると天王星型惑星は導電性の水が金属の状態で存在すると予想されている.

第2章　準備

2.1　基本方程式

ここでは本論文で必要となる方程式の近似されていない形を掲載する.

2.1.1　電磁気学の式

真空中のマクスウェル方程式

つぎの 4 本の式は真空中の電磁場を支配するマクスウェル方程式で式 (2.1) ガウスの法則, 式 (2.2) はソレノイド条件, 式 (2.3) はファラデーの法則, 式 (2.4) はマクスウェル = アンペールの法則である.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e(\boldsymbol{r}) \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.4}$$

ここで $\boldsymbol{D}$ は電束密度,$\boldsymbol{B}$ は磁場,$\boldsymbol{E}$ は電場,$\boldsymbol{j}$ は電流密度ベクトル,ρ_e は電荷密度である. ただし $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ の関係が成り立っている. μ_0 は真空中の透磁率,c は光速であり,$1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0$ を満たしている. ただし,ε_0 は真空中の誘電率である.

今考える系は真空ではなく導電性をもつ流体であるので本来は物質中のマクスウェル方程式を考える必要があるが, 物質中の電磁場に表れる分極は小さいものとし, 磁化はキュリー温度を超えているため起こらないため物質中でも真空中と同じ誘電率と透磁率を用いる.

オームの法則

物体中の原子核や一部の電子は分極や磁化として自由電子の運動に対して抵抗を与える. このことを表しているのがオームの法則である.

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}' \tag{2.5}$$

ここで σ は電気伝導率であり, $\boldsymbol{E}'$ は静止系からみた電場である.

相対論的な電磁場

オームの法則で静止系からみた電場を必要としたが, 特殊相対論によると絶対静止系は存在せず, ふたつの慣性系はローレンツ変換を通して同じ形である. ある慣性系と別の慣性系の電磁場の関係は次であると知られている.

$$\boldsymbol{E}' = (1-\gamma)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}}{v^2} + \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{B}' = (1-\gamma)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}}{v^2} + \gamma(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{c^2}) \tag{2.7}$$

ここで $\boldsymbol{B}'$ はある慣性系からみた磁場で $\boldsymbol{B}$ は今慣性系にいる観測者が測定した磁場である. そして $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ でローレンツ因子と呼ばれている.

ローレンツ力

電磁場の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q の点電荷は

$$\boldsymbol{f}_L = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{2.8}$$

の力を受ける. この力をローレンツ力と呼び, 複数の電荷に対して考え, 単位体積当たりのローレンツ力を考えると次のようになる.

$$\boldsymbol{F}_L = \rho_e\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} \tag{2.9}$$

ここで電流密度は単位体積に単位時間当たりに流れる電荷の量であることを使った.

2.1.2 流体力学

流体力学は質点および剛体の力学とは異なり, 粒子そのものを追跡するのではなく流体が作る場に注目する必要がある. このため単位体積当たりの運動方程式と熱力学関数を使う.

質量保存の式

流体全体では質量が増減しないため次が成り立つ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2.10}$$

これは ρ であるときは質量保存を表すが, ρ の代わりに ρ_e であるときは電荷保存を表す.

運動方程式

流体の運動方程式は次のようになる.

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \right) = -\boldsymbol{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{T} \tag{2.11}$$

ただし, $\boldsymbol{v}$ は流速,$\boldsymbol{T}$ は応力テンソル,$\boldsymbol{b}$ は体積力,ρ は密度である. ここで応力テンソルは i 軸に垂直な単位体積当たりに働く j 方向の力を表す. したがって単位体積にかかる j 番目の力は発散定理より,

$$\oint_S T_{ij} dS = \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.12}$$

したがって式 (2.11) の右辺最終項は単位体積当たりの当たりの応力 (面積力) を示している. この T_{ij} の内訳については後に議論する. そして, 体積力は今考える系では重力とローレンツ力である. 左辺は慣性系の形であるため, 回転系に書き換える必要がある. ベクトル $\boldsymbol{P}$ に対して慣性系と回転系では次に関係がある.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} \right)_I + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{P} \tag{2.13}$$

ここで $\boldsymbol{\Omega}$ は角速度ベクトルである. この関係を使って式 (2.11) の左辺を回転系に書き換えると次のようになる.

$$\rho \left(\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right)_R + 2\Omega \times \boldsymbol{v} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}) \right) \tag{2.14}$$

この式の第 2 項はコリオリ力, 第 3 項は慣性重力波で, 第 3 項は遠心力である. 式 (2.14) の第 3 項は勾配表示で次のように書ける.

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \nabla ((\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})^2) \tag{2.15}$$

応力テンソルと体積力

ニュートン流体では応力テンソルはひずみ速度テンソルと次の関係がある.

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\rho\nu e_{ij} - \frac{2}{3}\rho\nu e_{kk}\delta_{ij} \tag{2.16}$$

ただし,ν は動粘性定数で,δ_{ij} はクロネッカーのデルタである. ひずみ速度テンソルは

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.17}$$

である.

つぎに体積力のうち重力は重力ポテンシャルの勾配 $\nabla\psi$ として表される. ただし重力ポテンシャルは次を満たす.

$$\nabla^2\psi = -4\pi G\rho \tag{2.18}$$

式 (2.11), 式 (2.14), 式 (2.16), より流体の運動方程式は次のようになる.

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})\right) = \rho\nabla\psi - \nabla p + \rho\nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\rho\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{F}_L \tag{2.19}$$

ただし角速度の変化はないものとした.

熱力学関数

単位体積当たりの熱力学を考えるので

$$\rho\frac{dU}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \varepsilon \tag{2.20}$$

ただし U は内部熱エネルギーで,$\boldsymbol{q}$ は熱流束ベクトルで,$varepsilon$ は熱生成率である. これを熱力学の関係式 $dU + pdV = TdS$ より

$$\rho T\frac{dS}{dt} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \varepsilon \tag{2.21}$$

と書き換わる. ここで熱流束ベクトルはフーリエの法則より

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{2.22}$$

である. ここで T は温度,k は熱伝導率で, 密度と温度で決定される値である. 温度勾配について地球外核ではマントルへ一定熱量 Q を損失するとして, 次の条件をおける.

$$-k\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla T = Q/4\pi r_{core}^2 \tag{2.23}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{n}}$ は地球中心から半径方向への単位ベクトルであり,r_{core} は核の半径である. 式 (2.21) に対して次のように変数を変える.

$$\begin{aligned}
\rho T dS &= \rho T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \rho T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp \\
&= \rho T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT - \rho T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp \\
&= \rho T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT - \rho T\frac{\partial \rho}{\partial V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp \\
&= \rho T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p dp \\
&= \rho C_p dT - \alpha T dp \qquad (2.24) \\
& \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

ここで α は体積膨張率で,C_p は定圧比熱である. 式 (2.21) は上の変数変換を行うと,

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \alpha T\frac{dp}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + \varepsilon \tag{2.26}$$

となり, 地球外核は圧力一定だと考えられるのでこれがもっとも使いやすい温度方程式である.

第3章　本論

3.1 MHD 近似

地球外核の流体の運動スケールは光速より十分遅く, 高温である.[*1] このため電磁気学に関する基礎方程式のうち時間変化する項の大きさをスケーリングし, 適切に処理する必要がある.

はじめに相対的な電磁場はローレンツ因子は $\gamma \approx 1$ なので電磁場は次のようになる.

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}{c^2} \tag{3.2}$$

これらの $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ を含む項については次の節でスケーリングを考える.

3.1.1 マクスウェル方程式のスケーリング

電磁気学の基礎方程式のうち時間変化項を含むものはファラデーの法則とマクスウェル = アンペールの法則である. ここで外核の典型的な磁場の大きさを $\mathscr{B}$, 電場の大きさを $\mathscr{E}$, とする. また物体の典型的な長さスケールを l, 時間スケールを τ とする. ファラデーの法則の両辺の割合は次のように書ける.

$$\frac{|\nabla \times \boldsymbol{E}|}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right|} = \frac{\tau \mathscr{E}}{l \mathscr{B}} \tag{3.3}$$

[*1] キュリー温度を超えているため磁化されないことを示している.

ここで, ファラデーの法則が成り立つと仮定すると次のスケーリングが成り立つ.

$$\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{B}} = \frac{l}{\tau} \tag{3.4}$$

ここで $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ の大きさは

$$|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}| = \frac{l}{\tau}\mathscr{B} \approx \mathscr{E} \tag{3.5}$$

真空中の透磁率は $\mathscr{E} \ll c^2$ であるため電磁場は次のように書ける.

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} \tag{3.6}$$

マクスウェル = アンペールの法則のうち変位電流以外の項の大きさの割合は次のように書ける.

$$\frac{\nabla \times \boldsymbol{B}}{\left|1/c^2 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right|} = c^2 \frac{\tau \mathscr{B}}{l \mathscr{E}} = c^2 \frac{\tau^2}{l^2} \tag{3.7}$$

ここで最終項はファラデーの法則が成り立つと仮定したことを使っている. l/τ は物体の典型的な速度スケールであり, 外核の流体の運動スケールが光速より遅いことから $c \gg l/\tau$ である. このことからマクスウェル = アンペールの法則の磁場と電場を含む項は

$$|\nabla \times \boldsymbol{B}| \gg \frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right| \tag{3.8}$$

となるため, 電場の時間変化項を無視して次のように書ける.

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{3.9}$$

最後にローレンツ力のスケーリングを行なう.

$$\frac{|\rho_e \boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}|} \approx \frac{l^2/\tau^2}{c^2} \tag{3.10}$$

したがって電場が電荷に対して行なう力は小さいことが明らかなのでローレンツ力は

$$\boldsymbol{F}_L = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{3.11}$$

となる.

3.1.2 誘導方程式

$\mu_0 \times \boldsymbol{j}$ の発散を取り, ソレノイド条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ とベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B}$ を使うと次のようになる.

$$\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{j} = -\nabla^2 \boldsymbol{B} \tag{3.12}$$

そしてアンペールの法則 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ は式 (3.12) とオームの法則, ファラデーの法則より次のように書ける.

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \boldsymbol{B} \tag{3.13}$$

これは慣性系での磁場の時間変化を表す式で誘導の式と呼ばれる. ただし $1/\mu_0 \sigma = \eta$ としている. η は磁気拡散率と呼ばれている.

つぎに式 (3.13) が回転系でも同様であることを示す. 式 (3.13) の右辺第 1 項を展開すると,

$$\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{3.14}$$

となる. ただし $\boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})$ の項はソレノイド条件でゼロになるため省略した. したがって式 (3.13) は回転系の物質微分の形では次のように書ける.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I = -(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \eta \nabla^2 \boldsymbol{B} \tag{3.15}$$

この式を導く際にラグランジュ微分と物質微分の関係

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) A \tag{3.16}$$

を使った. 次に慣性系の物質微分と回転系の物質微分の関係は

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_R + \Omega \times \boldsymbol{A} \tag{3.17}$$

であるので静止系と回転系での速度は次の関係が成り立つ.

$$\boldsymbol{v}_I = \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \tag{3.18}$$

これらをつかって式 (3.15) を回転系の表現に書き換える.

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I &= -(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_I + \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_I) + \eta \nabla^2 \boldsymbol{B} \\ &= -\boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_R) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_R + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \eta \nabla^2 \boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{3.19}$$

ここで回転系での角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ が一定であるとすると, 式 (3.19) は次のように書ける.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I - \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_R - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_R) + \eta\nabla^2\boldsymbol{B} \tag{3.20}$$

これは慣性系での誘導の式と同じ形である.

3.1.3 マクスウェルの応力テンソル

マクスウェルの応力テンソルは

$$m_{ij} = m_{ij}^e + m_{ij}^m \tag{3.21}$$

であり, m_{ij}^e,m_{ij}^m はそれぞれ電場のマクスウェルの応力テンソルと磁場のマクスウェルの応力テンソルを表す. これらの具体的な中身は

$$m_{ij}^e = \varepsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}|\boldsymbol{E}|^2\right), \qquad m_{ij}^m = \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}|\boldsymbol{B}|^2\right) \tag{3.22}$$

である. ここで式 (3.22) の電場のマクスウェルの応力テンソルと磁場のマクスウェルの応力テンソルを比較すると

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{|E_iE_j|}{|B_iB_j|} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll 1 \tag{3.23}$$

なので電場のマクスウェルの応力テンソルの項は無視できるのでマクスウェルの応力テンソルは磁場のマクスウェルの応力テンソルのみを考えればよい. この応力テンソルの発散の x 成分を考える.

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot m_{ij})_x &= \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial m_{zx}}{\partial z}\\ &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)E_x - \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right)E_y - \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)E_z\\ &= -\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}))_x \end{aligned} \tag{3.24}$$

したがって, 物体に働く力は

$$\boldsymbol{F}_M = -\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} \tag{3.25}$$

ここで右辺への変形は外積の性質 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ と式 (3.9) を使った. このことは電磁場が物体に対して加える力はローレンツ力のみであることを示す. ここで

ローレンツ力を式 (3.9) を使って展開する.

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu}\left(-\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{B}|^2+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\right)$$
$$=-\nabla\left(\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2\mu_0}\right)+\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{3.26}$$

$|\boldsymbol{B}|^2/2\mu_0$ は磁場圧力と呼ばれる項で保存力である. そして右辺第 2 項は磁気張力であり, 運動による物体の運動による磁力線の伸びを表す.

3.1.4 エネルギー方程式

これまでの議論の結果をつかってエネルギーを求めることにする. 誘導の式 (3.13) と $\boldsymbol{B}/\mu_0$ の内積をとると,

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})-\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\nabla\times(\eta\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{3.27}$$

となる. 各項はそれぞれ

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2\mu_0}\right) \tag{3.28}$$

$$\tag{3.29}$$

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\Big((\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\Big)+\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$$
$$=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\Big((\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\Big)+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{j}$$
$$=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\Big((\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\Big)-\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}) \tag{3.30}$$
$$-\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}\cdot\nabla\times(\eta\nabla\times\boldsymbol{B})==\nabla\cdot\left(\frac{\eta}{\mu_0}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})\right)-(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\left(\frac{\eta}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B}\right)$$
$$=\nabla\cdot(\eta\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{j})-\frac{|\boldsymbol{j}|^2}{\sigma} \tag{3.31}$$

ただし式 (3.30),(3.31) には $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$ とソレノイド条件, 式 (3.9) を使った. したがって, 単位時間当たりの磁場圧力の変化は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2\mu_0}\right)=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\Big((\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\Big)-\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})+\nabla\cdot(\eta\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{j})-\frac{|\boldsymbol{j}|^2}{\sigma} \tag{3.32}$$

ここで右辺第 1 項をオームの法則 $\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ を使って, 変形する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot \left((\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} \right) &= \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot \left((\frac{j}{\sigma} - \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{B} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) - \nabla \cdot (\eta \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{j}) \end{aligned} \tag{3.33}$$

したがって右辺第 2 項は式 (3.32) の右辺第 3 項と打ち消される. よって磁場のエネルギーの式は次のように表される.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) - \frac{|\boldsymbol{j}|^2}{\sigma} \tag{3.34}$$

右辺第 1 項の $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/\mu_0$ は系への単位時間当たり単位体積当たりのエネルギーの減少でありポインティングベクトルと呼ばれている. つぎに右辺第 2 項はローレンツ力の仕事である. そして右辺第 3 項はでんジカ熱にいるエネルギーの散逸を表し, オーム加熱と呼ばれている. 電磁場と物体からなる系から熱を外部へ放出しているので符号はマイナスである, 地球の核ではこの熱は流体を暖めるため, 流体の式に対しては異符号として扱う. 定常な場合を考えるときポインティングベクトルの仕事はゼロとなるため, ローレンツ力の仕事とオーム加熱は等しくなる.

3.2 ブシネスク近似

ブシネスク近似とは圧縮性がある主に気体のような流体を次の条件が満たされるとき非圧縮性の流体, すなわち液体のように扱うことである. ブシネスク近似が可能な流体の条件とは次の 2 つである.

- 流速が音速よりはるかに小さい
- 流体粒子が上下に動く距離が小さい

一つ目の条件については流体の運動方程式 (2.19) におけるコリオリ力の項と圧力勾配力が同程度の大きさと仮定した時の圧力と, 静力学平衡のときの圧力を比較することで流体による圧力変化が小さいことを示すことによって達成される. 具体的には地球の角速度 $\Omega \approx 7.3\times10^{-5}$ /s, 流速 $v \approx 10^{-2}$m s^{-1}, 外核の密度 $\rho \approx 10^4$kg m^{-3}, として圧力勾配 $|\nabla p| \approx p/r_{core}$ と近似できると, 流体による圧力は $p \approx 10^4$ Pa となる. 一方, 静力学平衡の圧力は $p \approx \rho g r_{core}$ であるので 2 つの圧力は 10^5 ほど大きさが異なる. このため一つ目の条件は地球外核で満たされる. 次に二つ目の条件

は外核は液体鉄であるがここでは大気力学のスケールハイトを援用して. 典型的な流体粒子の上下に運動する距離が小さいことを示す. スケールハイトは

$$H = \frac{RT}{g} \tag{3.35}$$

で与えられ,$T \approx 3000$ K として概算するとスケールハイトは 90 km であり, この条件も満たしている. したがってここからは外核を非圧縮流体として扱う.

さらに流体力学の式を静水圧平衡, 断熱平衡, とそこから線形化したしたものと考える. つまり次のように書ける.

$$p = p_0 + p_1, \quad T = T_0 + T_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad S = S_0 + S_1 \tag{3.36}$$

ここで下付き文字ゼロは基本状態つまり, 静水圧平衡の圧力, 断熱温度, 平均密度, 平均エントロピーである.

質量保存の式

非圧縮流体に対して質量保存の式 (2.10) を考える.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho_1)\boldsymbol{v}) = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v}) \tag{3.37}$$

右辺第 1 項はそもそも $\rho_1 \ll \rho_0$ であるので無視でき, ρ_0 は定数であることから

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.38}$$

となる. これは非発散の式であり, 非圧縮流体の特徴を示す 1 つの式である.

流体力学の式

流体力学の運動方程式 (2.19) は微小な項と, 力学平衡な項を取り除くと次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{2}\nabla((\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})^2) - \nabla p_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} g_0 + g_1 + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{f}_b}{\rho_0} \\ &= -\nabla \hat{\omega} + \frac{\rho_1}{\rho_0} g_0 + g_1 + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{f}_b}{\rho_0} \end{aligned} \tag{3.39}$$

式 (3.39), 式 (2.26) 式 (3.38) の三本を持ってブシネスク近似での流体力学の式である.

第 4 章　議論

4.1　スケーリング

はじめに誘導の式 (3.13) を磁気拡散時間 Vr_{core}/η と r_{core} でスケーリングすると,(ただし V は典型的な速度である.)

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = R_m \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \nabla^2 \boldsymbol{B} \tag{4.1}$$

となる. $R_m = Vr_{core}/\eta$ は磁気レイノルズ数である. この無次元数は熱拡散に対する誘導のサイズを表している. 地球外核ではこの値は 200 程度である.

次に温度方程式はブシネスク近似で圧力の時間微分が無視でき,C_p を定数とすることで

$$\dot{\theta} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta = \kappa \nabla^2 \theta + \frac{\varepsilon}{\rho C_p} \tag{4.2}$$

ここで θ は温度であり,κ は熱拡散定数である.

この温度方程式を熱拡散時間 r_{core}^2/κ と典型的な速度と温度 V,　θ_0 でスケーリングすると

$$\dot{\theta} + P_e \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta = \nabla^2 \theta + \varepsilon \tag{4.3}$$

となり,P_e はペクレ数である. この無次元数は熱拡散に対する熱対流のサイズを表している. 地球外核ではおおよそ 3×10^7 である. そしてペクレ数に対する磁気レイノルズ数の比は拡散比率ということができる[*1].

[*1] この比には名前がない

第 5 章　結論

本論文では惑星の固有磁場を構成する流体がどのように近似されるか調べた.

その結果, 地球外核の流体の物性値や地球の諸物理量から MHD 近似とブシネスク近似が成り立つことが示された. 最後にこの流体力学の熱に関するスケールと電磁気学の磁場の拡散に関するスケールを無次元化し, 磁気拡散に比べ熱拡散が大きいことが示された.

謝辞

本研究を行うにあたって, 高橋先生, 林先生にはお世話になりました. また地球流体電脳倶楽部の資料を豊富に参考にしました.

参考文献

[1] D. Gubbins., P. H. Roberts. Magnetohydrodynamics of the Earth's Core. Geomagnetism, Vol. 2, p. 1 - 183. (1987).

[2] 吉田茂生., 竹広真一., 佐々木洋平., 林祥介. 磁気流力学 (MHD) の定式化 (2002). https://www.gfd-dennou.org/library/riron/mhd/teishiki/pub/index.htm.

[3] Guarguaglini, M., Hernandez, JA., Okuchi, T. *et al.* Laser-driven shock compression of“ synthetic planetary mixtures ”of water, ethanol, and ammonia. Sci Rep 9, 10155 (2019). https://doi.org/10.1038/s41598-019-46561-6.

[4] 砂川重信, : 理論電磁気学, 第 3 版. 紀伊國屋書店. (1999).