

修 士 学 位 論 文

雲解像モデル deepconv への 地形の導入と数値実験

令和3年2月5日

専攻名 惑星学専攻

学籍番号 197s409s

氏名 白濱 理花

神戸大学大学院理学研究科博士課程前期課程

要旨

地形はその熱的効果および力学的効果によって大気循環に影響を及ぼしている。地形に起因する内部重力波のひとつである山岳波は運動量を鉛直輸送し、大気大循環にも重要な役割を果たしていると考えられている。本研究では、地形が大気循環に及ぼす力学的効果を調べることを目指し、二次元版の雲解像モデル deepconv に地形を導入した。モデルへの地形の導入にあたって、地形起源の大気循環の中でも山岳波に注目しその表現を検証した。

まず deepconv が基礎方程式系に用いている準圧縮方程式系における線形山岳波の性質は線形近似のもとでは、完全圧縮方程式系の場合と完全に同じであることを確認した。次に deepconv の基礎方程式系を座標変換して地形に沿う座標系の方程式を導出し、離散化して deepconv に地形を導入した。

地形を導入した deepconv の振る舞いを検証するために Satomura et al. (2003) の理想化された山岳波のモデル相互比較実験を行った。線形近似が成り立つと考えられる山の高さ ($h_0 = 100$ m) の実験では、波の構造と運動量フラックスは、線形解とよく一致することが確認された。非線形効果が無視できない山の高さ ($h_0 = 500$ m) の実験では、波の構造と運動量フラックスはモデル相互比較実験に参加したモデルの結果と同様であることが確認された。これらのことから本研究で deepconv に地形を取り入れることに成功したことが示された。

目次

第1章	はじめに	1
1.1	大気循環に対する地形の効果	1
1.2	山岳波のモデル相互比較実験	2
1.3	本研究の目的と論文の構成	3
第2章	線形波動理論	4
2.1	ブシネスク方程式系における波動	4
2.1.1	分散関係	4
2.1.2	群速度	7
2.2	完全圧縮方程式系における波動	9
2.2.1	分散関係	9
2.2.2	群速度	13
2.3	準圧縮方程式系における波動	14
2.3.1	分散関係	14
2.4	山岳波の線形解	15
2.4.1	伝播特性	16

2.4.2	ローレンツ型の山から励起される山岳波の構造	19
2.4.3	運動量フラックス	21
第 3 章	モデルの概要	24
3.1	雲解像モデル deepconv の概要	24
3.1.1	基礎方程式系	24
3.1.2	境界条件	26
3.1.3	離散化の概要	26
3.2	地形に沿う座標系の導入とモデルの変更点	27
3.2.1	基礎方程式系	31
3.2.2	境界条件	31
3.2.3	時間離散化方法	32
第 4 章	山岳波の数値実験	33
4.1	計算設定	33
4.2	実験設定	33
4.2.1	初期場の設定	33
4.2.2	実験 A: 高さ 100 m の山	34
4.2.3	実験 D: 高さ 500 m の山	34
4.2.4	線形理論との関係	35
4.3	実験結果 (1): 波の構造	36
4.3.1	実験 A: 高さ 100 m の山	36

4.3.2	実験 D: 高さ 500 m の山	43
4.4	実験結果 (2): 運動量フラックス	47
4.4.1	実験 A: 高さ 100 m の山	47
4.4.2	実験 D: 高さ 500 m の山	52
4.5	結果のまとめと考察	55
第 5 章	結論	56
付録 A	地形に沿う座標系の幾何的な性質	57
A.1	数学的準備	57
A.2	地形に沿う座標系における方程式系の導出	60
付録 B	波の構造の時間変化と運動量フラックスの時間変化	65
付録 C	CReSS と SCALE による実験	71
付録 D	追加実験	76
付録 E	変数・定数リスト	79
謝辞		81
参考文献		83

第1章 はじめに

1.1 大気循環に対する地形の効果

地面に標高差があり斜面が存在する場合、地形が大気循環に及ぼす影響は二つある。一つは熱的效果である。地球に到達する太陽放射エネルギーのうち約 50% は地表面で吸収される。したがって地表面は大気にとって最大の熱エネルギー供給源である。地表面からの加熱・冷却の影響により、斜面上の接地気相には上向きまたは下向きの浮力が生じる。その結果、斜面風などが生成される。

もう一つは力学的効果である。まず、大気層の厚さが場所によって変化する場合、流れにのった流体柱には伸縮が生じ、渦位の保存により相対渦度が変化する。大気層の厚さの変化は数学的には β 効果と同じ役割を持っており、地形性 β 効果という。また、密度成層した大気中において、水平気流が斜面にぶつかると、斜面に沿って空気塊が強制的に持ち上げられ山岳波が生じる。山岳波は大気中に普遍的に存在する内部重力波のひとつである。

内部重力波は大気や海洋などの安定成層した流体中に存在する、重力を復元力とする波である。内部重力波は、空間スケールが小さく、対流圏では一般に振幅が小さいので、直接日々の天気にはあまり影響しない。しかし、大型大気レーダーによる観測や数値計算により、その重要性は強く認識されている。内部重力波は運動量を波の発生源から遠方へ輸送する性質があり、平均風の加速・減速や子午面循環の駆動に重要な役割を果たしていると考えられている。内部重力波は発生源における振幅は小さくても、大気密度が指数関数的に減少していることから、中層大気中ではその振幅が無視できないほど大きくなる。高度約 90 km にある地球の自転と同じ速さの流れ(弱風層)は、対流圏で発生した重力波が運動量を鉛直に伝播し、ある高度で砕波して平均流に運動量を渡し、平均流を減速することで維持されていると考えられている (Lindzen, 1981)。また、山岳波は雲の成因となったり、航空機の飛行に影響するほど強い鉛直流をもたらしたりすることが分かっており、山岳波の性質を調べることは非常に重要である。

1.2 山岳波のモデル相互比較実験

山岳波の大気循環に対する効果は重要であるため、その数値モデルでの再現性を検証するために相互比較実験が行われてきた。そのうちの 하나가 Satomura et al. (2003) である。実際の地形・大気条件を与えた比較実験 (Doyle et al., 2011) も行われている一方で、Satomura et al. (2003) は一様な非粘性・断熱の大気中にローレンツ型の孤立峰によって生成される山岳波の表現を調べる理想化実験であるため、数値モデルの流体力学的表現を検証できる利点がある。

Satomura et al. (2003) では、Satomura et al. (1989) で指摘されている z^* 座標系の導入に伴う擬鉛直速度の要因とされる、急斜面上での打ち切り誤差についての検証を行うため、「急斜面モデル比較プロジェクト (St-MIP)」を行っている。St-MIP では圧縮性の近似度合いの異なる方程式を用いた三つの非静力学大気モデル (表 1.1) が参加し、孤立山岳上の流れについて検証された。St-MIP に参加したモデルの山岳波構造と水平運動量フラックスの鉛直成分の結果から、 z^* 座標系は孤立山岳を十分に解像するほど細かな水平格子間隔を用いる限り、先行研究で懸念されているほど打ち切り誤差は小さくなく、急斜面を持つ孤立山岳の流れも精度よく表現していることが示された。

ただし、準圧縮方程式系を用いたモデルである CReSS による実験では、波の振幅が他のモデルや線形解と比べて小さく、また運動量フラックスの絶対値も他のモデルや線形解析解と比べて小さい結果となっていた。この原因として数値モデルの特性や基礎方程式系が異なることが考えられるが、明確には示されていない。

表 1.1: St-MIP で用いられたモデル

モデル	MRI/NPD-NHM	TSO	CReSS
論文	Saito et al. (2001)	Satomura (1989)	Tsuboki & Sakakibara (2001)
開発元	気象庁数値予報課 気象研究所	気象研究所	名古屋大学地球水循環研究センター 高度情報科学技術研究機構
基礎方程式	完全圧縮方程式系	完全圧縮方程式系	準圧縮方程式系
時間積分	HI-VI/HE-VI 法	HE-VI 法	HE-VI 法

1.3 本研究の目的と論文の構成

本研究では、地形が大気循環に及ぼす力学的効果を調べることを目指して雲解像モデル `deepconv` (Sugiyama et al., 2009) に地形を導入する。地球流体電脳倶楽部では、惑星大気中の大循環から局所循環まで様々な時空間スケールで現れる循環の構造を明らかにすることを目指し、対象とする広大な時空間スケールを低コストでカバー可能とするべく、惑星大気大循環モデル DCPAM と雲解像モデル `deepconv` を共通したプログラム書式と共通したユーティリティ群の下に設計開発し、それらを用いた数値実験を行っている。複数のモデルを活用した実験の実施とその結果の比較理解のためには、扱いやすく、コード内容の追跡しやすいモデル群が必要である。DCPAM と `deepconv` はこのような同じ思想に基づいて同じ形式で開発されたモデルである。しかしながら、`deepconv` は木星大気における複数凝結成分の雲の鉛直分布と対流運動の特徴を調べることを当初の目的として開発されてきたために、地形の効果が取り入れられていない。

モデルへの地形の導入にあたっては、地形起源の大気循環の中でも山岳波に注目してその表現を検証する。そのため、まずは `deepconv` が基礎方程式に用いている準圧縮方程式系における線形山岳波の性質を確認する。その上で、Satomura et al. (2003) と同じ条件で実験を実施することで、モデルの振る舞いを確認し、線形解析および他のモデルの結果と比較検討する。

本論文の構成は以下のようになっている。第2章では山岳波の線形理論を示し、第3章では数値モデルの概要と地形の導入について説明する。第4章では地形を導入した `deepconv` を用いた Satomura et al. (2003) の山岳波の実験とその結果について述べる。第5章は結論である。

第2章 線形波動理論

ここでは重力波の分散関係式と山岳波の線形解析解を求める。deepconv では基礎方程式系として準圧縮方程式系を用いている。通常、大気力学の教科書における重力波の解説にはその本質をわかりやすく説明するために非圧縮のブシネスク方程式系が用いられる。一方、圧縮性を取り入れた系の説明には完全圧縮方程式系が用いられるため、準圧縮方程式系で、さらに deepconv のように無次元圧力を変数に用いる場合の山岳波の線形解析解は見当たらない。そこで、ここではまずブシネスク方程式系と完全圧縮方程式系における重力波の分散関係式と山岳波の線形解析解を復習する。その上で準圧縮方程式系のそれらを導出し、その性質を考察する。

具体的には、非回転系で密度成層した水平-鉛直2次元非粘性等温大気において、水平方向一様な平均流 \bar{u} が存在する場合の波動について調べる。式中の文字が表す変数については付録Eにまとめた。各物理変数の基本場の成分を上線付きで表し $\bar{\cdot}$ のみに依存するものとし、擾乱成分はプライム付きで表す。

2.1 ブシネスク方程式系における波動

まずブシネスク方程式系における波の分散関係や偏波関係を求める。

2.1.1 分散関係

線形化されたブシネスク方程式系は、

運動量方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + b' \quad (2.1b)$$

連続の式

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.1c)$$

浮力の式

$$\frac{\partial b'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial b'}{\partial x} + w' N^2 = 0 \quad (2.1d)$$

である。(Vallis, 2017) ここで, u は水平速度, w は鉛直速度, $\phi = p/\rho_0$ (p は圧力, ρ_0 は基準密度), $b' = \partial \phi' / \partial z$, $N^2 = \partial \bar{b} / \partial z$ である. 擾乱成分について, 以下のような波型の解を仮定する.

$$a'(x, z, t) = \text{Re } A \exp[i(kx + mz - \omega t)] \quad (2.2)$$

ここで, A は複素振幅, k は水平波数, m は鉛直波数, ω は振動数である. これ以降, 実数部分をとることを表す Re を省略することにする. (2.2) を (2.1) に代入すると, 偏波関係式,

$$i(\omega - \bar{u}k)U = ik\Phi \quad (2.3a)$$

$$i(\omega - \bar{u}k)W = im\Phi - B \quad (2.3b)$$

$$ikU + imW = 0 \quad (2.3c)$$

$$i(\omega - \bar{u}k)B - WN^2 = 0 \quad (2.3d)$$

を得る. これらの係数行列の固有方程式は,

$$(\omega - \bar{u}k)^2 = \frac{k^2 N^2}{(k^2 + m^2)} \quad (2.4)$$

であり, 分散関係式が得られた. 分散関係を図 2.1 に示す. 振動数は水平波数が大きくなるにつれて N に近づく. 水平波数が一定の場合, 鉛直波数が小さいほうが振動数は大きい.

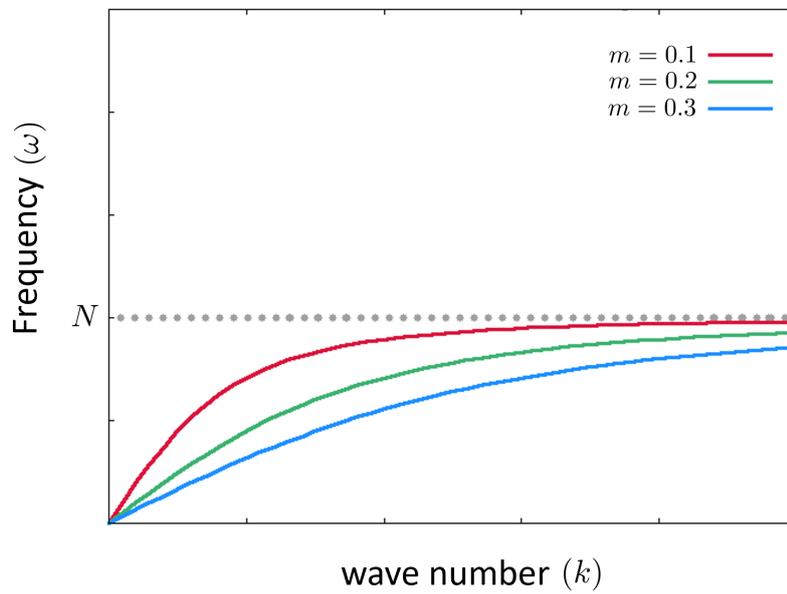


図 2.1: プシネスク系の重力波の分散関係. 縦軸は振動数 ω , 横軸は水平波数 k である. $m = 0.1, m = 0.2, m = 0.3$ の場合を示している.

2.1.2 群速度

重力波の群速度の水平成分 c_g^x と鉛直成分 c_g^z は, 分散関係式 (2.4) より,

$$c_g^x = \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}}, \quad c_g^z = \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \quad (2.5)$$

となる.

定常状態 ($\omega = 0$) における群速度と水平波長の関係を図 2.2 に示す. 水平群速度は短波のほうが大きい. 鉛直群速度はある波長の波で最大値をとる.

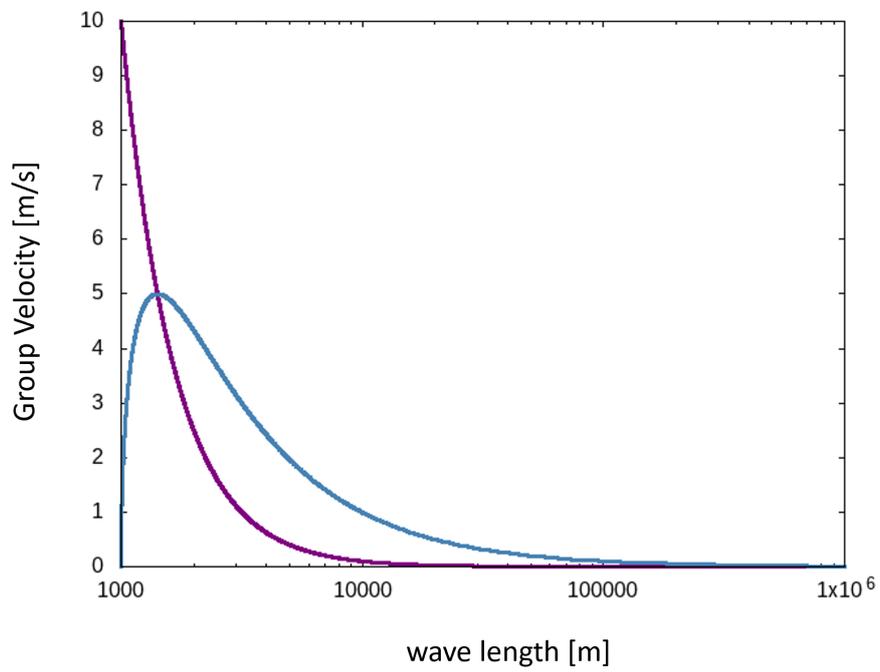


図 2.2: $\bar{u} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $N = 0.01 \text{ s}^{-1}$ の場合のブシネスク方程式系における群速度と水平波長の関係を示す. 青線が鉛直群速度, 紫線が水平群速度を表す.

2.2 完全圧縮方程式系における波動

次に、完全圧縮方程式系における波の分散関係式と偏波関係式を求める。

2.2.1 分散関係

線形化された完全圧縮方程式系は、

運動方程式

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.6a)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \quad (2.6b)$$

連続の式

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0 \quad (2.6c)$$

熱の式

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = c_s^2 \left\{ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right\} \quad (2.6d)$$

である。(Vallis, 2017) ここで u は水平速度, w は鉛直速度, p は圧力, ρ は密度, g は重力加速度, c_s^2 は音速であり, 基本場は静水圧平衡の関係,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g \quad (2.7)$$

が成り立っているとす。

ここで基本場について、

$$\bar{p} = p_0 \exp(-z/H) \quad (2.8b)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 \exp(-z/H) \quad (2.8b)$$

とすると、基本場の静水圧平衡の式より、 $H = RT_0/g$ である。擾乱成分について、

$$\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{u}}(x, z, t) \exp(z/2H) \quad (2.9a)$$

$$p' = \tilde{p}(x, z, t) \exp(-z/2H) \quad (2.9b)$$

$$\rho' = \tilde{\rho}(x, z, t) \exp(-z/2H) \quad (2.9c)$$

とし, (2.6) に代入し整理すると,

運動方程式

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (2.10a)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{2H} \tilde{p} - \tilde{\rho} g \quad (2.10b)$$

連続の式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{\rho} + \rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{\tilde{w}}{2H} \right) = 0 \quad (2.10c)$$

熱の式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{p} - \frac{\tilde{w}}{H} p_0 = \bar{c}_s^2 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{\rho} - \frac{\tilde{w}}{H} \rho_0 \right\} \quad (2.10d)$$

が得られる. すべての変数に対して,

$$\tilde{a}(x, z, t) = A \exp[i(kx + mz - \omega t)] \quad (2.11)$$

とする. A は複素振幅である. 以下では, $\rho_0 \tilde{u}$ の複素振幅を U , $\tilde{\rho}$ の複素振幅を Q とする. (2.11) を (2.10) のそれぞれの変数に代入し整理すると, 偏波関係式,

$$i(\omega - \bar{u}k)U = ikP \quad (2.12a)$$

$$i(\omega - \bar{u}k)W = \left(im - \frac{1}{2H} \right) P + Qg \quad (2.12b)$$

$$i(\omega - \bar{u}k)Q = ikU + \left(im - \frac{1}{2H} \right) W \quad (2.12c)$$

$$i(\omega - \bar{u}k)P = i(\omega - \bar{u}k)\bar{c}_s^2 Q + (\gamma - 1)Wg \quad (2.12d)$$

を得る. ここで $\gamma = c_p/c_v$ である.

偏波関係式より, 係数行列の固有方程式は,

$$(\omega - \bar{u}k)^4 - \bar{c}_s^2(\omega - \bar{u}k)^2 \left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2} \right) + (\gamma - 1)g^2 k^2 = 0 \quad (2.13)$$

であり, $N^2 = g^2/(c_p T_0)$ の関係を用いると,

$$(\omega - \bar{u}k)^4 - \bar{c}_s^2(\omega - \bar{u}k)^2 \left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2} \right) + \bar{c}_s^2 N^2 k^2 = 0 \quad (2.14)$$

となり、分散関係式が得られる。分散関係式を図 2.3 に示す。音波モードの振動数の二乗の値は、 $k = 0$ のときに最小値 $c_s^2/4H^2$ をとる。水平波数が大きくなるにつれて、振動数は大きくなる。重力波モードの振動数の二乗の値は、 $k = 0$ のとき最小値 0 をとり、水平波数が大きくなるにつれて N^2 に近づいていく。

(2.14) を書き直すと、

$$(\omega - \bar{u}k)^2 = \frac{\bar{c}_s^2}{2} \left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k^2N^2}{\bar{c}_s^2 \left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2} \right)^2}} \right\} \quad (2.15)$$

となる。(2.15) において、 $g = 0$ とすると、第 2 項の正をとる根 (ω_1^2) と負をとる根 (ω_2^2) はそれぞれ、

$$\omega_1^2 = \bar{c}_s^2(k^2 + m^2) \quad (2.16a)$$

$$\omega_2^2 = 0 \quad (2.16b)$$

となる。 ω_1^2 は速さ \bar{c}_s で四方に広がる波で、音波である。 ω_2^2 は $g = 0$ でゼロになるので重力を復元力とする波であることが示唆される。そこで $g \neq 0$, $k^2N^2 \ll \bar{c}_s^2(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2})^2$ として、 ω_2^2 の近似値を求めると、

$$\omega_2^2 = \frac{k^2N^2}{k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2}} \quad (2.17)$$

となる。この ω_2^2 が表すのが内部重力波モードである。

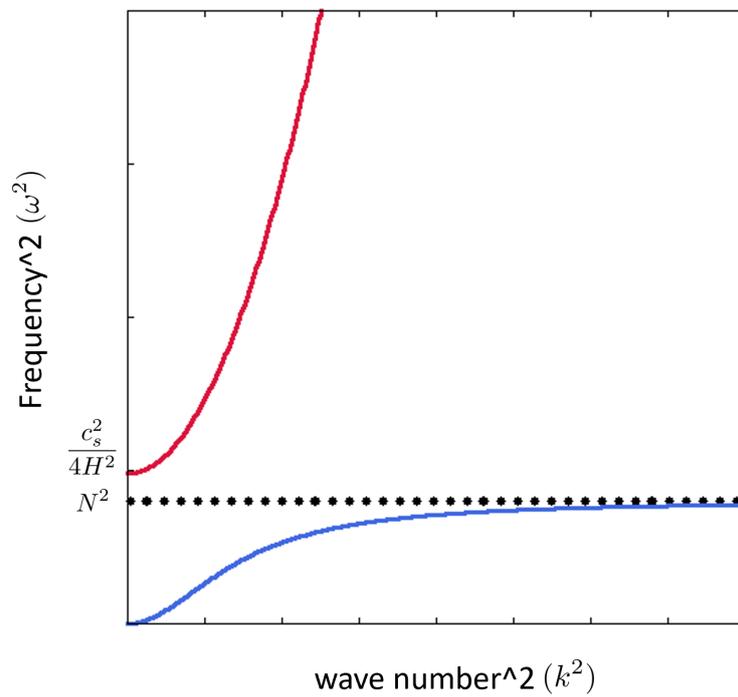


図 2.3: $m = \text{const.}$ とした場合の完全圧縮方程式系の分散関係を示す. 縦軸は振動数の二乗 ω^2 , 横軸は水平波数の二乗 k^2 である. 2つのモードが存在し, 赤線は音波モード, 青線は内部重力波モードを示す.

2.2.2 群速度

重力波の群速度の水平成分と鉛直成分は、分散関係式 (2.17) より、

$$c_g^x = \bar{u} \pm \frac{N \left(m^2 + \frac{1}{4H^2} \right)}{\left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2} \right)^{3/2}}, \quad c_g^z = \mp \frac{Nmk}{\left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2} \right)^{3/2}} \quad (2.18)$$

で与えられる。 $k > 0$ の場合を考えると、波が定常 ($\omega = 0$) であるならば、 $\bar{u} > 0$ のとき、群速度の水平成分は負の符号、鉛直成分は正の符号をとる。もし c_g^z が正ならば、運動量は鉛直上向きに輸送される。

簡単化のため、 $m \gg \frac{1}{2H}$ である波の性質と構造を調べる。分散関係式は次のように近似できる。

$$(\omega - \bar{u}k)^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2} = N^2 \cos^2 \vartheta \quad (2.19)$$

ここで、 ϑ は波数ベクトルと x 軸のなす角である。このとき群速度は、

$$c_g^x = \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}}, \quad c_g^z = \mp \frac{Nmk}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \quad (2.20)$$

となる。これはブシネスク方程式系における群速度と一致する。

2.3 準圧縮方程式系における波動

最後に、準圧縮方程式系における波の分散関係と偏波関係を求める。なおここで用いる方程式系は deepconv の支配方程式と同じく、無次元圧力変数に用いている。

2.3.1 分散関係

線形化された準圧縮方程式系は、

運動方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial x} \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} - c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \quad (2.21b)$$

圧力方程式

$$\frac{\partial \pi'}{\partial t} = - \left\{ \frac{\bar{c}_s^2}{c_p \bar{\theta}} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\bar{c}_s^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial \bar{\rho} \theta' w'}{\partial z} \right\} - \bar{u} \frac{\partial \pi'}{\partial x} \quad (2.21c)$$

熱の式

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} - w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (2.21d)$$

である。(杉山他, 2012) ここで u は水平速度, w は鉛直速度, π は無次元圧力, θ は温位, ρ は密度, c_p は単位質量あたりの定圧比熱である。基本場は静水圧平衡の関係

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p \bar{\theta}} \quad (2.22)$$

が成り立っていると仮定する。

今、基本場の成分について、

$$\bar{\pi} = \pi_0 \exp(-z/H^*) \quad (2.23a)$$

$$\bar{\theta} = \theta_0 \exp(z/H^*) \quad (2.23b)$$

とすると、基本場の静水圧平衡の式より、 $H^* = c_p T_0/g$ である。また、(2.23) と状態方程式より、

$$\bar{\rho} = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad (2.24)$$

である。

また擾乱成分について、

$$\mathbf{u}' = \text{Re } \tilde{\mathbf{u}}(x, z, t) \exp\left(\frac{z}{2H}\right) \quad (2.25a)$$

$$\pi' = \text{Re } \tilde{\pi}(x, z, t) \exp\left(-\frac{z}{H^*} + \frac{z}{2H}\right) \quad (2.25b)$$

$$\theta' = \text{Re } \tilde{\theta}(x, z, t) \exp\left(\frac{z}{H^*} + \frac{z}{2H}\right) \quad (2.25c)$$

とする。ここで、 $H = RT_0/g$ である。全ての変数に対して、

$$\tilde{a}(x, z, t) = A \exp[i(kx + mz - \omega t)] \quad (2.26)$$

とする。ここで A は複素振幅である。これらを (2.21) に代入すると、偏波関係式、

$$i(\omega - \bar{u}k)U = c_p \theta_0 i k \Pi \quad (2.27a)$$

$$i(\omega - \bar{u}k)W = c_p \theta_0 \left(im - \frac{1}{H^*} + \frac{1}{2H} \right) \Pi - \frac{\Theta}{\theta_0} g \quad (2.27b)$$

$$i(\omega - \bar{u}k)\Pi = \frac{\bar{c}_s^2}{c_p \theta_0} \left\{ ikU + \left(im + \frac{1}{H^*} - \frac{1}{2H} \right) W \right\} \quad (2.27c)$$

$$i(\omega - \bar{u}k)\Theta = \frac{\theta_0 W}{H^*} \quad (2.27d)$$

が得られる。係数行列の固有方程式は、

$$(\omega - \bar{u}k)^4 - \bar{c}_s^2 (\omega - \bar{u}k)^2 \left\{ k^2 + m^2 + \frac{1}{4H^2} \right\} + \bar{c}_s^2 k^2 N^2 = 0 \quad (2.28)$$

であり、分散関係式が得られた。

以上から、線形論における準圧縮方程式系の分散関係式は完全圧縮方程式系の分散関係式と一致することが確かめられた。このことから、Satomura et al. (2003) において CReSS の結果が他のモデルと異なっているのは、方程式系の違いが原因ではないと考えられる。

2.4 山岳波の線形解

ここではブシネスク方程式系を用いて山岳波の線形解について説明する。しかし完全圧縮方程式系、準圧縮方程式系でも基本的な性質は変わらない。

2.4.1 伝播特性

山岳波は流体が下端の境界条件を通じて地形を感じるにより生じる。今、地形が関数 $h(x)$ で表されると仮定し、

$$h(x) = \text{Re } h_0 \exp(ikx) \quad (2.29)$$

とする。境界条件は、

$$w = \frac{Dh}{Dt} = \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (2.30)$$

である。したがって、鉛直速度の解析解は、

$$w = \text{Re } \bar{u} h_0 i k \exp[i(kx + mz)] \exp\left(\frac{z}{2H}\right) \quad (2.31)$$

である。

ここでブシネスク方程式系の分散関係式において、定常状態 ($\omega = 0$) の場合を考えると、

$$m^2 = \left(\frac{N}{\bar{u}}\right)^2 - k^2 \quad (2.32)$$

が得られる。短波 ($k^2 > (N/\bar{u})^2$) の場合、 m^2 は負であり、よって m は虚数となり捕捉型の波となる。長波 ($k^2 < (N/\bar{u})^2$) の場合、 m^2 は正であり、 m は実数となり伝播型の波となる。

図 2.4, 図 2.5 に、正弦関数型の地形を与えた場合の山岳波の鉛直速度の分布を示す。

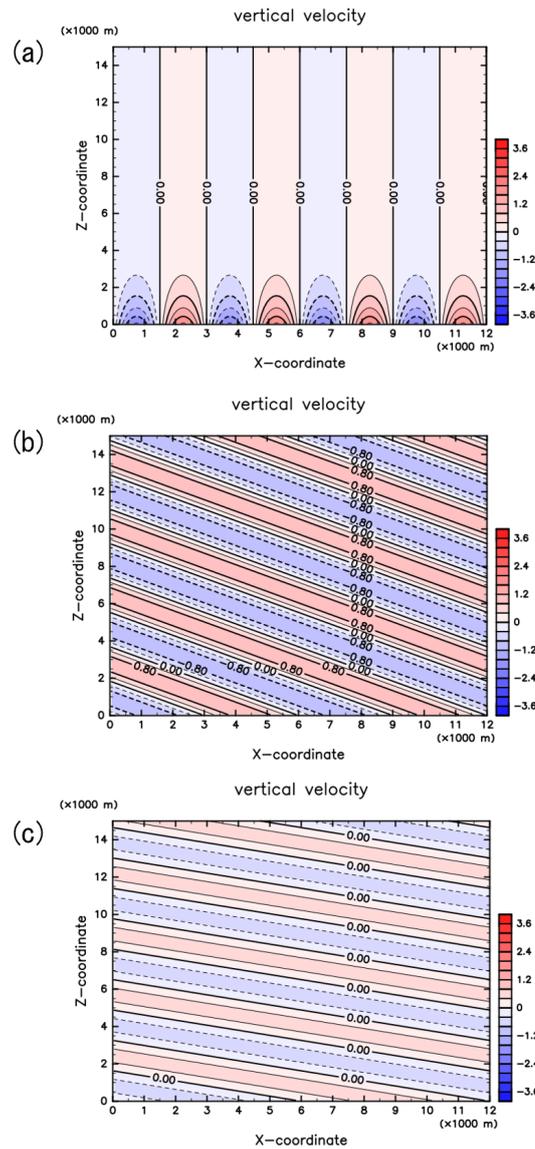


図 2.4: プシネスク方程式系の鉛直速度の解析解. 縦軸は高さ, 横軸は x 座標である. (a) 波長 3 km の山, (b) 波長 6 km の山, (c) 波長 12 km の山. (a) は捕捉型の波, (b)(c) は伝播型の波である.

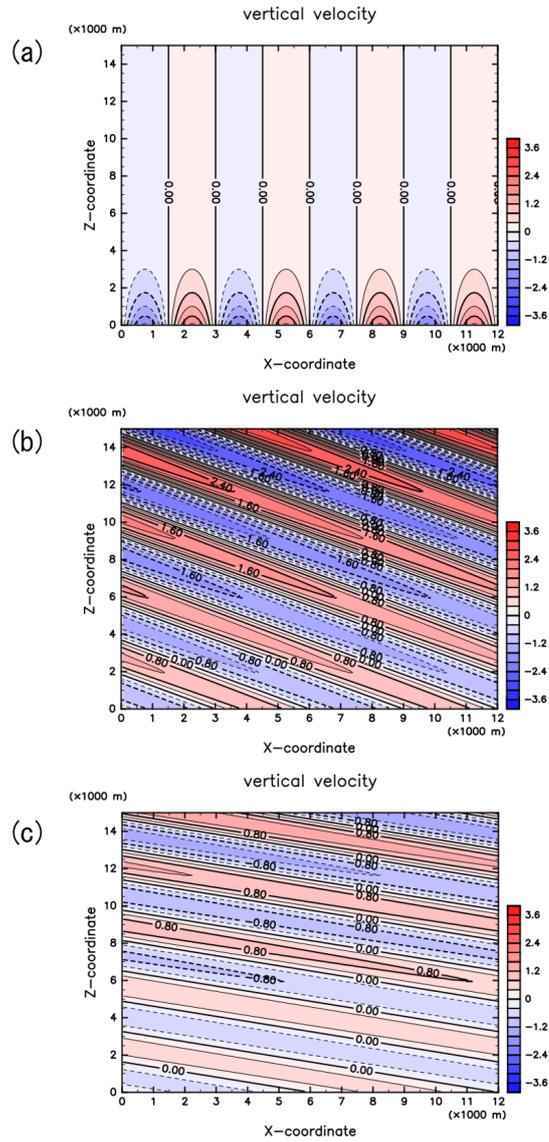


図 2.5: 準圧縮方程式系の鉛直速度の解析解. 縦軸は高さ, 横軸は x 座標である. (a) 波長 3 km の山, (b) 波長 6 km の山, (c) 波長 12 km の山. (a) は捕捉型の波, (b)(c) は伝播型の波である.

2.4.2 ローレンツ型の山から励起される山岳波の構造

地形を表す関数として、ローレンツ型の関数

$$h(x) = \frac{h_0 a^2}{a^2 + x^2} \quad (2.33)$$

を与えた場合に励起される山岳波の構造について述べる。ここで a は山の半値幅、 h_0 は山の高さに対応する。

任意の地形 $h(x)$ はフーリエ逆変換を用いて、

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{ikx} dx \quad (2.34)$$

と表されるので、この山から励起される山岳波はそれぞれの波数の波の重ね合わせとして、

$$w(x, t) = \sum_k \tilde{w}_k(z) e^{ikx} \quad (2.35)$$

のように書ける。

山岳波の鉛直速度分布は、境界条件より、地形 $h(x)$ の一階微分に比例する。ローレンツ型の関数 $h(x)$ の一階微分、

$$\frac{dh(x)}{dx} = -\frac{2h_0 a^2 x}{(a^2 + x^2)^2} \quad (2.36)$$

のフーリエ変換は、

$$\begin{aligned} F_{\frac{dh(x)}{dx}}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh(x)}{dx} e^{-ikx} dx \\ &= [h(x) e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{i\pi}{a} k e^{-|k|a} \end{aligned} \quad (2.37)$$

である。

ここで、 $k > 0$ の場合のスペクトルを図 2.6 に示す。スペクトルが最大となる波数は $k_{\max} = 1/a$ である。ローレンツ型の地形の場合、この波数の波の振幅が最大である。

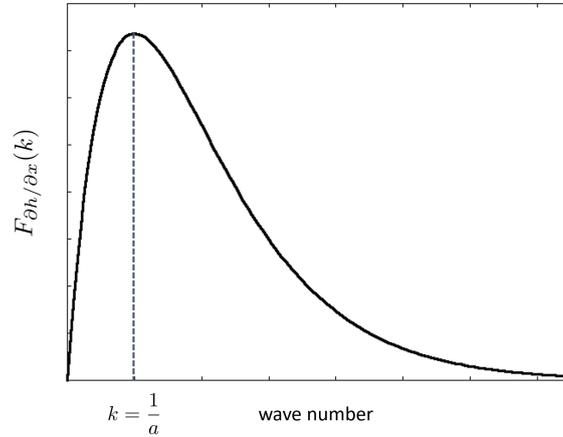


図 2.6: ローレンツ型の関数の一階微分のスペクトル

ブシネスク方程式系の分散関係式は,

$$\left(\frac{N}{U}\right)^2 = m^2 + k^2 = K^2 \tag{2.38}$$

である. ここで K は全波数, $K = \sqrt{k^2 + m^2}$ である. N と U が定数であるとき, 波数空間において, これは原点を中心とする半径 N/U の円の方程式である. 水平波数に対する鉛直波数の変化率は,

$$\frac{\partial m}{\partial k} = \mp \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{N}{U}\right)^2 - k^2}} \tag{2.39}$$

である. $k = 0$ のとき $\partial m / \partial k = 0$ となり, $k = (N/U)$ のとき発散する. $m > 0$ の場合を考えると, 水平波数が大きいとき, 鉛直波数の減少率は大きく, 水平波数が小さいとき, 鉛直波数の減少率は小さいことがわかる.

水平波数が最大 ($k = N/U$) の波の波面は垂直であり, 水平波数が小さくなるにつれて励起される波の波面は風下側に傾く. 水平波数に対する鉛直波数の変化率の関係から, 波面が垂直な構造の波の成分の数は少なく, 傾きの大きな波の成分の数が多いたことがわかる.

2.4.3 運動量フラックス

基本場と擾乱の関係

線形化されたブシネスク方程式系の運動方程式と連続の式は,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} + w' \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.40b)$$

である. (2.40) を東西平均すると,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = 0 \quad (2.41)$$

が得られる. 積の微分の公式を用いて,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \frac{\partial \overline{(u'v')}}{\partial y} - \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial z} - \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} = 0 \quad (2.42)$$

とできる. これを整理すると,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \overline{u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)} + \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial z} = 0 \quad (2.43)$$

となる. ここで連続の式を用いると,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial z} = 0 \quad (2.44)$$

と書ける. ここで上付き線は東西平均を, プライムは東西平均からのずれの成分を表す. (2.44) の左辺第二項に含まれる $\overline{u'w'}$ は水平運動量フラックスの鉛直成分であり, u' と w' に相関がある場合には値を持ち, 運動量が輸送される. $\overline{u'w'}$ は乱流運動量フラックスであり, (2.44) は基本場の水平風速が乱流運動量フラックスの収束によって時間変化することを表している.

ここで, ブシネスク系においては, 再び偏波関係式,

$$ikU + imW = 0 \quad (2.3c)$$

より, U と W の関係は, m が実数の場合, すなわち伝播型の波の場合には同位相となり, m が虚数の場合, すなわち捕捉型の波の場合には逆位相となることがわか

る。そのため伝播型の波は運動量を輸送し、捕捉型の波は運動量を輸送しない。実際、(2.3c) を用いると、

$$\begin{aligned}\overline{u'w'} &= \frac{Ue^{i(kx+mz-\omega t)} + U^*e^{-i(kx+mz-\omega t)}}{2} \cdot \frac{We^{i(kx+mz-\omega t)} + W^*e^{-i(kx+mz-\omega t)}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(UW^* + U^*W) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_r}{k} |U|^2\end{aligned}\tag{2.45}$$

と表される。^{*1} ここでアスタリスクは複素共役を表し、下付き添え字 r は実部を表す。また、 $\overline{u'w'}$ の符号は $k > 0$ の場合 m によって決まることがわかる。 m が虚数のときには $\overline{u'w'} = 0$ である。

山岳波による運動量輸送

山岳波はエネルギーを上向きに運ぶことから、鉛直群速度 c_g^z は正の符号をとる。つまり $m > 0$ であり、そのとき、 $\overline{u'w'} < 0$ である。これは直感的には山に風がぶつかると風が減速されるということである。山岳波により東向きの運動量が下向き

^{*1}(2.45) の導出の補足。偏波関係式より、 U と W は以下のように関係づけられる。

$$U = (U_r, U_i), \quad W = -\frac{m}{k}(U_r, U_i)$$

ここで下付き添え字 r は実部、 i は虚部を表す。

$$\begin{aligned}UW^* &= -\frac{m^*}{k}(U_r + iU_i)(U_r - iU_i) \\ &= -\frac{m^*}{k}(U_r^2 + U_i^2 + i(U_iU_r - U_rU_i)) \\ &= -\frac{m^*}{k}|U|^2 \\ U^*W &= -\frac{m}{k}(U_r - iU_i)(U_r + iU_i) \\ &= -\frac{m}{k}(U_r^2 + U_i^2 + i(U_rU_i - U_rU_i)) \\ &= -\frac{m}{k}|U|^2\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}UW^* + U^*W &= -\frac{|U|^2}{k}(m + m^*) \\ &= -\frac{|U|^2}{k}2m_r\end{aligned}$$

である。

に運ばれ, 地面と大気の間で運動量の交換が行われる. 山岳波が次第に上方に伝わると上のほうからも運動量を輸送してくる. 散逸がない場合には十分な時間が経ち定常状態になると, この運動量フラックスは高さに対して一定の値になる.

第3章 モデルの概要

本章では本研究で用いる雲解像モデル deepconv の概要とモデルへの地形の導入について述べる。まずは地形を導入する前の時点でのモデルについて、その概要を述べる。そのあとでモデルの地形の導入について述べる。deepconv は三次元モデルであるが、本研究では水平-鉛直の二次元モデルとして使用し、地形に沿う座標系を導入した。

3.1 雲解像モデル deepconv の概要

雲解像モデル deepconv (Sugiyama et al., 2009) は地球流体電脳倶楽部の deepconv プロジェクトで開発されている数値モデルである。木星大気における複数凝結成分の雲の鉛直分布と対流運動の特徴を調べることを目的として開発されてきた。これまで deepconv で行われた木星大気の雲対流の数値計算結果より、周期的な対流活動の存在が明らかになっている (Sugiyama et al., 2014)。しかし木星の対流を調べることを目的としたこともあり、deepconv は地形の効果を取り入れていない。

deepconv の基礎方程式系は準圧縮方程式系に全ての凝結成分の保存式を組み合わせたものである。雲微物理過程と乱流混合過程はそれぞれ Kessler (1969) と Klemp and Wilhelmson (1978) のパラメタリゼーションを用いて表現している。基礎方程式系の空間離散化は差分法を用いて行っており、時間積分は音波モードとそれ以外のモードを異なる時間ステップを用いて積分する、モード分割法を用いて行っている。

3.1.1 基礎方程式系

力学的な枠組みは、準圧縮方程式系 (Klemp and Wilhelmson, 1978) を用いている。この方程式系では、速度以外の予報変数を水平一様な基本場の成分とそこから

のずれの擾乱成分に分離し、方程式の一部を線形化している。

準圧縮方程式系の時間発展方程式は以下の通りである。密度の式では乾燥成分と湿潤成分の分子量の差を考慮するが、熱の式では考慮しない。また圧力方程式では非断熱加熱による大気膨張と、凝縮に伴う圧力変化を無視している。

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - c_{p_d} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial x} + Turb.u \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - c_{p_d} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial y} + Turb.v \quad (3.1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - c_{p_d} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial z} + Turb.w \\ & + \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\Sigma q_v / M_v}{1/M_d + \Sigma \bar{q}_v / M_v} - \frac{\Sigma q_v + \Sigma q_c + \Sigma q_r}{1 + \Sigma \bar{q}_v} \right) g \end{aligned} \quad (3.1c)$$

圧力方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi'}{\partial t} = & - \left\{ \frac{\bar{c}_s^2}{c_{p_d} \bar{\theta}_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\bar{c}_s^2}{c_{p_d} \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\theta}_v w}{\partial z} \right\} \\ & - \left(u \frac{\partial \pi'}{\partial x} + v \frac{\partial \pi'}{\partial y} + w \frac{\partial \pi'}{\partial z} \right) + \frac{R_d \pi'}{c_{v_d}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\bar{c}_s^2}{c_{p_d} \bar{\theta}_v} \left\{ \frac{\dot{\theta}}{\bar{\theta}} + \left(\frac{\Sigma \dot{q}_v / M_v}{1/M_d + \Sigma \bar{q}_v / M_v} - \frac{\Sigma \dot{q}_v + \Sigma \dot{q}_c + \Sigma \dot{q}_r}{1 + \Sigma \bar{q}_v} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.1d)$$

熱の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v \frac{\partial \theta'}{\partial y} + w \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right) - w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \\ & + \frac{Q_{cnd} + Q_{rad} + Q_{dis}}{\bar{\pi}} + Turb.\theta \end{aligned} \quad (3.1e)$$

混合比の保存式

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_v}{\partial x} + v \frac{\partial q_v}{\partial y} + w \frac{\partial q_v}{\partial z} \right) + Src.q_v + Turb.q_v \quad (3.1f)$$

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_c}{\partial x} + v \frac{\partial q_c}{\partial y} + w \frac{\partial q_c}{\partial z} \right) + Src.q_v + Turb.q_c \quad (3.1g)$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_r}{\partial x} + v \frac{\partial q_r}{\partial y} + w \frac{\partial q_r}{\partial z} \right) + Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r \quad (3.1h)$$

ここで, θ_v は仮温位, q_v は気相の混合比, q_c は雲水混合比, q_r は雨水混合比, $\dot{\theta} = D\theta/Dt$ である. また, $Turb$ は粘性拡散, Q_{cnd} は凝縮による加熱, Q_{rad} は放射加熱, Q_{dis} は散逸加熱, Src は凝縮による生成, $Fall$ は落下を示す. ただし, 本研究では非粘性, 断熱な流れに注目するので, 粘性項, 非断熱加熱項はすべてゼロとする.

3.1.2 境界条件

境界条件は水平方向には周期境界であり. 鉛直方向には $w = 0$ である.

3.1.3 離散化の概要

格子と変数の配置

本モデルでは, 図 3.1 に示すように 水平・鉛直方向の格子点をずらして互い違いに配置する. 配置方法は水平方向に Arakawa C グリッド, 鉛直方向に Lorenz グリッドを用いている. スカラー量 (気圧偏差, 温位偏差) は格子の中心に配置する. ベクトル量 (速度など) は中心からつぎのように半格子ずらして配置する. ベクトル量の x 成分を評価する点は, 鉛直方向にはスカラー量と同じとし, 水平方向に半格子ずらす. ベクトル量の z 成分を評価する点は, 水平方向にはスカラー量と同じとし, 鉛直方向に半格子ずらす. 格子点のラベル付けおよび境界は図 3.2 のように設定する.

空間・時間方向の離散化の手法

空間方向の離散化は移流項には四次精度中心差分を用いて行う. その他の項には二次精度中心差分を用いる. 時間方向の離散化は時間分割法を用いて行う. 音波に関連する項とその他の項 (移流項) はそれぞれ短い時間刻み $\Delta\tau$ と長い時間刻み Δt を用いて時間積分を行う. 音波に関する項の離散化には水平方向は陽解法, 鉛直方向は陰解法とする HE-VI 法を用いている. 音波に関連しない項はリーブ・フログ法を用いて積分する. 熱力学の式は移流項のみであり, リーブ・フログ法を用いて長い時間刻み Δt で時間積分を行う.

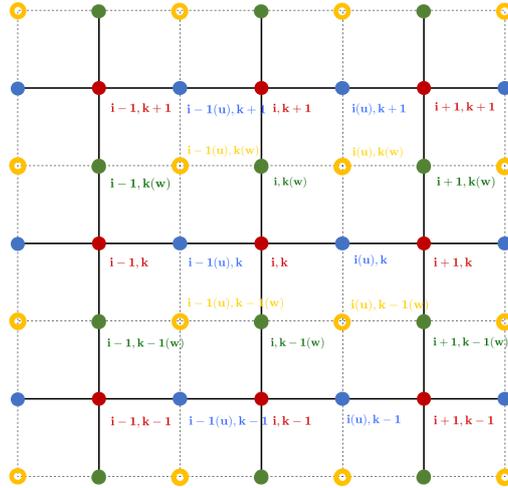


図 3.1: 格子点の配置 (地球流体電脳倶楽部, 2012)

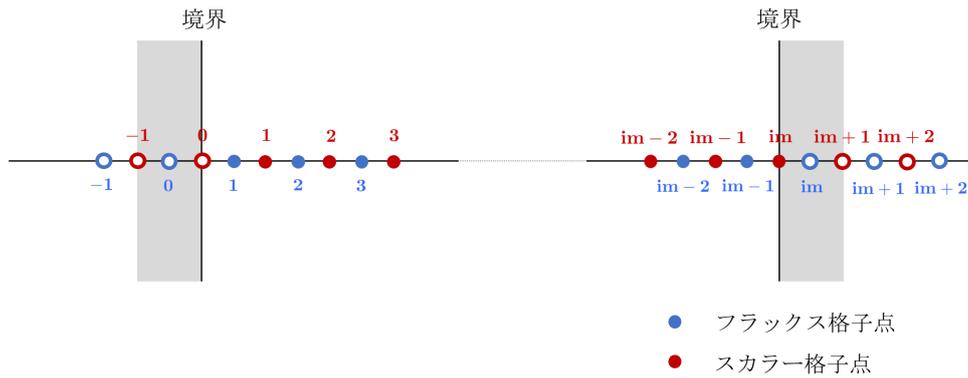


図 3.2: 添え字と境界の設定. 実際に計算する領域の添え字の範囲は, 1 から im である. (地球流体電脳倶楽部, 2012)

3.2 地形に沿う座標系の導入とモデルの変更点

この節では地形に沿う座標系の導入について述べる. 式変形の詳細は付録 A.2 に示す. 雲解像モデル CReSS (Tsuboki and Sakakibara, 2001) と同様に次のような地形に沿った座標系を用いる.

$$\xi = x \tag{3.2a}$$

$$\eta = y \tag{3.2b}$$

$$\zeta = \zeta(x, y, z) \tag{3.2c}$$

この場合、デカルト座標系の速度成分 (u, v, w) は、地形に沿う座標系の速度成分 (U, V, W) を用いて次のように表される。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

ここで、

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

であり、

$$|G| = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \neq 0 \quad (3.5)$$

であるとき、地形に沿う座標系の速度成分 (U, V, W) は デカルト座標系の速度成分 (u, v, w) を用いて表される。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

本研究では水平方向の座標を変えず、鉛直方向の座標のみ、地面からある高度までの幅で規格化した座標を用いる。つまり、

$$\xi = x \quad (3.7a)$$

$$\eta = y \quad (3.7b)$$

$$\zeta = \zeta(x, y, z) = z^* \quad (3.7c)$$

とする。地形に沿う座標系 $z^*(x)$ としては、

$$z^*(x) \equiv \frac{z_{top}(z - z_{sfc}(x))}{z_{top} - z_{sfc}(x)} \quad (3.8)$$

を与える。ここで $z_{sfc}(x)$ はデカルト座標系における地形の高度分布、 z_{top} は計算領域の上端である。上式より、地表面 $z = z_{sfc}$ では $z^* = 0$ 、領域の上端 $z = z_{top}$ では $z^* = z_{top}$ となる。またこのとき、 $\partial z^*/\partial z$ は z に依存しないので、 z^* 曲線の間隔は z 方向に変化しない。

地形の関数 $z_{sfc}(x)$ として,

$$z_{sfc} = \frac{ha^2}{a^2 + x^2} \quad (3.9)$$

のようにローレンツ型の関数を与えた場合の z^* 曲線を図 3.3 に示す. この座標系では, ヤコビアンの変数成分は記号 M_1, M_3 を用いて,

$$-\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{z^*(x)}{z_{top}} - 1 \right) \frac{\partial z_{sfc}(x)}{\partial x} = M_1 \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial z^*} = 1 - \frac{z_{sfc}(x)}{z_{top}} = M_3 \quad (3.10b)$$

と表される. また, 地形に沿う座標系の速度成分は,

$$U = u \quad (3.11a)$$

$$W = \frac{1}{M_3}(M_1 u + w) \quad (3.11b)$$

のように表される. 本モデルでは, $\partial z_{sfc}(x)/\partial x$ には解析的な値を用いている.

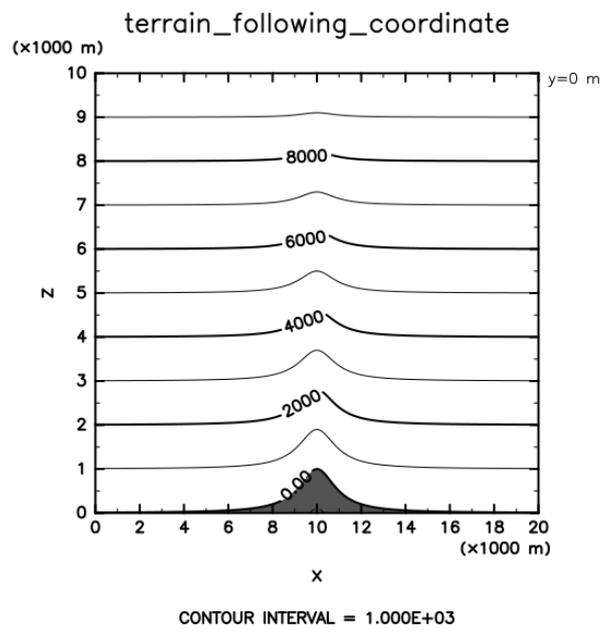


図 3.3: 高さ $h = 1000$ m, 半値幅 $a = 1000$ m の場合の z^* 曲線.

3.2.1 基礎方程式系

水平・鉛直の二次元を考える場合, 前節に述べた地形に沿う座標系の基礎方程式系は以下ようになる.

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + W \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) - \frac{c_{pd} \bar{\theta}_v}{M_3} \left(M_3 \frac{\partial \pi'}{\partial x} + M_1 \frac{\partial \pi'}{\partial z^*} \right) \quad (3.13a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + W \frac{\partial w}{\partial z^*} \right) - \frac{c_{pd} \bar{\theta}_v}{M_3} \frac{\partial \pi'}{\partial z^*} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \quad (3.13b)$$

圧力方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi'}{\partial t} = & - \frac{1}{M_3} \left\{ \frac{\bar{c}_s^2}{c_{pd} \bar{\theta}_v} \left(M_3 \frac{\partial u}{\partial x} + M_1 \frac{\partial u}{\partial z^*} \right) + \frac{\bar{c}_s^2}{c_{pd} \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w)}{\partial z^*} \right\} \\ & - \left(u \frac{\partial \pi'}{\partial x} + W \frac{\partial \pi'}{\partial z^*} \right) \\ & + \frac{R_d \pi'}{c_{vd}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{M_3} \left\{ M_1 \frac{\partial u}{\partial z^*} + \frac{\partial w}{\partial z^*} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.13c)$$

熱の式

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial \theta'}{\partial x} + W \frac{\partial \theta'}{\partial z^*} \right) - \frac{w}{M_3} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z^*} \quad (3.13d)$$

座標変換前後の式を比べると, 方程式中の x 方向と z 方向の偏微分が含まれる項が書き変わっている.

3.2.2 境界条件

境界条件は水平方向には周期境界条件とする. 鉛直方向には上端 ($z^* = z_{top}$) で $w = 0$ とする. 下端では以下のように設定する. すなわち, 地形に沿う座標系 (x - z^* 座標系) における鉛直速度がゼロとなるように, デカルト座標系 (x - z 座標系) における鉛直速度を設定する.

$$w = - \frac{1}{M_3} u M_1 \quad \text{at} \quad z^* = 0 \quad (3.14)$$

3.2.3 時間離散化方法

本研究では地形に沿う座標系の導入に伴い, 水平・鉛直方向ともに陽解法とする HE-VE 法を用いることとした. 音波に関連する項の離散化方法として HE-VI 法は煩雑なためである.

第 4 章 山岳波の数値実験

本章では, 地形を導入した雲解像モデル `deepconv` の検証のために行ったテスト計算結果を示す. テスト計算として, Satomura et al. (2003) で行われた山岳波の実験を行った.

4.1 計算設定

本研究では Satomura et al. (2003) で行われた 6 つの山岳波の実験を行い, 波の構造と水平運動量フラックスの鉛直成分を確認した. 地形にはローレンツ型の山を与える. 山の高さが 100 m (実験 A) と 500 m (実験 D) の二種類に対して, それぞれ複数の半値幅を与えて実験を行った.

4.2 実験設定

各実験では, ローレンツ型の山を与え, 初期条件から非粘性・断熱の条件でほぼ定常な解が得られるまで積分する.

4.2.1 初期場の設定

実験で与えた初期場は, まず等温大気 (実験 A は 231 K, 実験 D は 924 K) を仮定し, 静水圧平衡の関係から圧力分布を求める. そして風は水平風速 $u = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ を与えた.

4.2.2 実験 A: 高さ 100 m の山

実験 A では半値幅が異なる高さ 100 m のローレンツ型の山の形を与えて 4 つの実験を行った。また、初期条件として 231 K の等温大気を仮定した。各実験の実験名、山の半値幅 a 、計算領域幅 L, H 、格子点間隔 $\Delta x, \Delta z$ 、タイムステップ $\Delta t, \Delta \tau$ 、積分時間の設定を表 4.2 に示す。

補足

Satomura et al. (2003) では実験 A1 の格子点間隔は $\Delta x = 1000$ m, $\Delta z = 250$ m であるが、その格子間隔では deepconv では山岳波を表現することができなかった。その原因は不明である。格子間隔を小さくするとその問題は解決した。そのため A1 では $\Delta x = 100$ m, $\Delta z = 100$ m として実験を行った。それに伴い、Satomura et al. (2003) での水平方向の計算領域幅は $L = 2000$ km であるが、計算時間の都合から今回は、計算領域幅が結果に影響しないことを確認した上で $L = 200$ km として実験を行った。

表 4.1: 実験 A: 各実験の設定

	a (m)	L, H (km)	$\Delta x, \Delta z$ (m)	$\Delta t, \Delta \tau$ (s)	積分時間 (s)
A1	5000	200, 60	100, 100	1.0, 0.05	18000
A2	500	200, 60	100, 100	1.0, 0.05	6000
A3	100	40, 10	20, 20	0.05, 0.01	1200
A4	50	10, 4	5, 5	0.01, 0.002	600

4.2.3 実験 D: 高さ 500 m の山

実験 D では山の半値幅が異なる高さ 500 m のローレンツ型の山を与えて 2 つの実験を行った。また、初期条件として 924 K の等温大気を仮定している。各実験の実験名、山の半値幅 a 、計算領域幅 L, H 、格子点間隔 $\Delta x, \Delta z$ 、タイムステップ $\Delta t, \Delta \tau$ 、積分時間の設定を表 4.3 に示す。

表 4.2: 実験 D: 各実験の設定

	a (m)	L, H (km)	$\Delta x, \Delta z$ (m)	$\Delta t, \Delta \tau$ (s)	積分時間 (s)
D1	500	100, 30	50, 50	0.05, 0.01	6000
D2	250	100, 30	50, 50	0.05, 0.01	6000

4.2.4 線形理論との関係

ブシネスク方程式系における運動方程式は、変数を基本場の成分と擾乱成分に分けて表し、基本場が水平方向に一様であるとする、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \quad (4.1)$$

である。非線形効果は上式の左辺第二項と第三項の大小関係によって、見積もられる。偏波関係式と境界条件より、

$$|u'| \sim \frac{m}{k} |w'| \sim \frac{m}{k} k h_0 \bar{u} \quad (4.2)$$

である。 $|k| \leq |m|$ の場合、分散関係式より $m \sim \mathcal{O}(N/\bar{u})$ である。このことから、

$$|u'| \sim \frac{N}{\bar{u}} h_0 \bar{u} \quad (4.3)$$

であり、 $(|u'|/|\bar{u}|) \sim h_0(N/\bar{u})$ とわかる。つまり、山の高さ h_0 と \bar{u}/N の比によって線形理論の妥当性が示され、 $h_0 N/\bar{u} \sim \mathcal{O}(1)$ のとき非線形の効果が無視できないだろう。 $h_0 N/\bar{u}$ の大きさは、実験 A では $\mathcal{O}(0.1)$ のため実験結果が線形理論の解に近いと考えられるが、実験 D では $\mathcal{O}(1)$ のため実験結果を線形理論では十分に説明できないと考えられる。

4.3 実験結果 (1): 波の構造

ここでは実験で得られた山岳波の波の構造を示す. なお, 特に断らない限り, 図中の高度は幾何学的高度 z である. モデルでは z^* 座標を用いているが, その計算結果を用いて線形内挿して描画している.

4.3.1 実験 A: 高さ 100 m の山

山岳波の時間発展

図 4.1 に山の中心の直上における鉛直速度の時間発展を示す. 時間の経過とともに位相が降りてきている. いずれの実験結果も十分に時間が経過すると計算領域の下層では時間変化しなくなっており, 定常状態に至ったとみなすことができる. 山の半値幅を小さくすると, 定常状態に至るまでの時間が短くなることがわかる. また A1 では約 8000 s, A2 では約 4000 s 後に, モデルの上端から位相の異なる波が降りてきている. この波はモデルの上端で反射して戻ってきている波である.

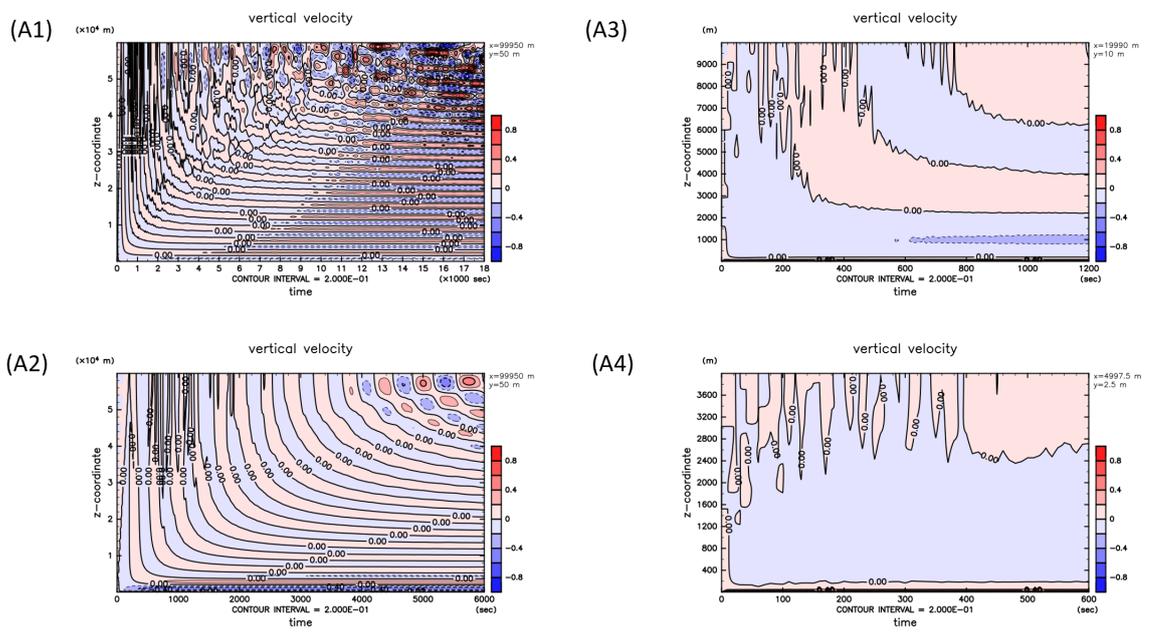


図 4.1: 実験 A で得られた, 山の中心の直上における鉛直速度の時間発展. 横軸は時間, 縦軸は z^* 座標系の高度である.

山岳波の構造

十分に時間が経過し、定常状態となっているとみなせる鉛直速度分布を用いて、山岳波の構造を確認する。図 4.2-4.5 にそれぞれ A1-A4 の結果を示す。

まず線形解析解と比較する。A1-A4 の実験では deepconv は解析解とほぼ一致する構造を持つ波を表現した。A1 では伝播する波が現れている。deepconv で得られた波の振幅は高度 8 km 以上では約 $0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ほど小さいが、それらは振幅の 20% 程度である。一方、deepconv から得られた波の位相の傾きは、解析解よりも小さい。特に山の風上側の高度 10 km 以上において顕著である。しかし、時間発展を追って確認してみると、位相の傾きは次第に水平に近づくことがわかった (付録 B)。このことからさらに時間が経過すると、位相の傾きは解析解に近づくと考えられる。A2 では A1 よりも小さい仰角で伝播する波が現れている。deepconv で得られた波の振幅は解析解に比べて高度 10 km では約 $0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ほど大きい但那らは振幅の 20% 程度である。一方、位相の傾きは解析解よりも小さい。特に山の風上側高度 10 km 以上において顕著である。これは A1 と同じ傾向であり、さらに時間が経過すると位相の傾きは解析解に近づくと考えられる。A3 では地面に捕捉された波が現れている。また、解析解の振幅に比べて約 5% 程度、振幅の大きい領域が存在し、風上よりも風下でその違いが明らかである。下の St-MIP に参加した他のモデルの結果との比較で述べるように、St-MIP に参加した全てのモデルで同様の傾向があるため、非線形効果が現れているかもしれない。A4 では A3 と同様に地面に捕捉された波が現れている。また、解析解の振幅に比べて約 10% 程度、振幅の大きい領域が存在する。解析解に対するこの傾向は St-MIP に参加したすべてのモデルに見られる。

次に St-MIP に参加した 3 つのモデルの結果と比較する。A1 では波の構造の特徴、振幅の大きさについて、CReSS 以外のモデルの結果とおおよそ一致する。CReSS 以外のモデルから得られる波の振幅は $\sim 10\%$ 程度の範囲で deepconv の結果と一致し、変動の大きい領域の x 方向の広がりもほぼ同じである。しかし CReSS から得られる結果は、他のモデルより振幅が $\sim 0.15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 程度小さく、これは振幅の 40% 程度である。A2 では、波の構造、振幅の大きさについて、全てのモデルの結果とおおよそ一致している。波の峰に沿って局所的なピークが見られる箇所があるが、これはモデル間の差の範囲である。A3 と A4 は全てのモデルの結果とおおよそ一致している。

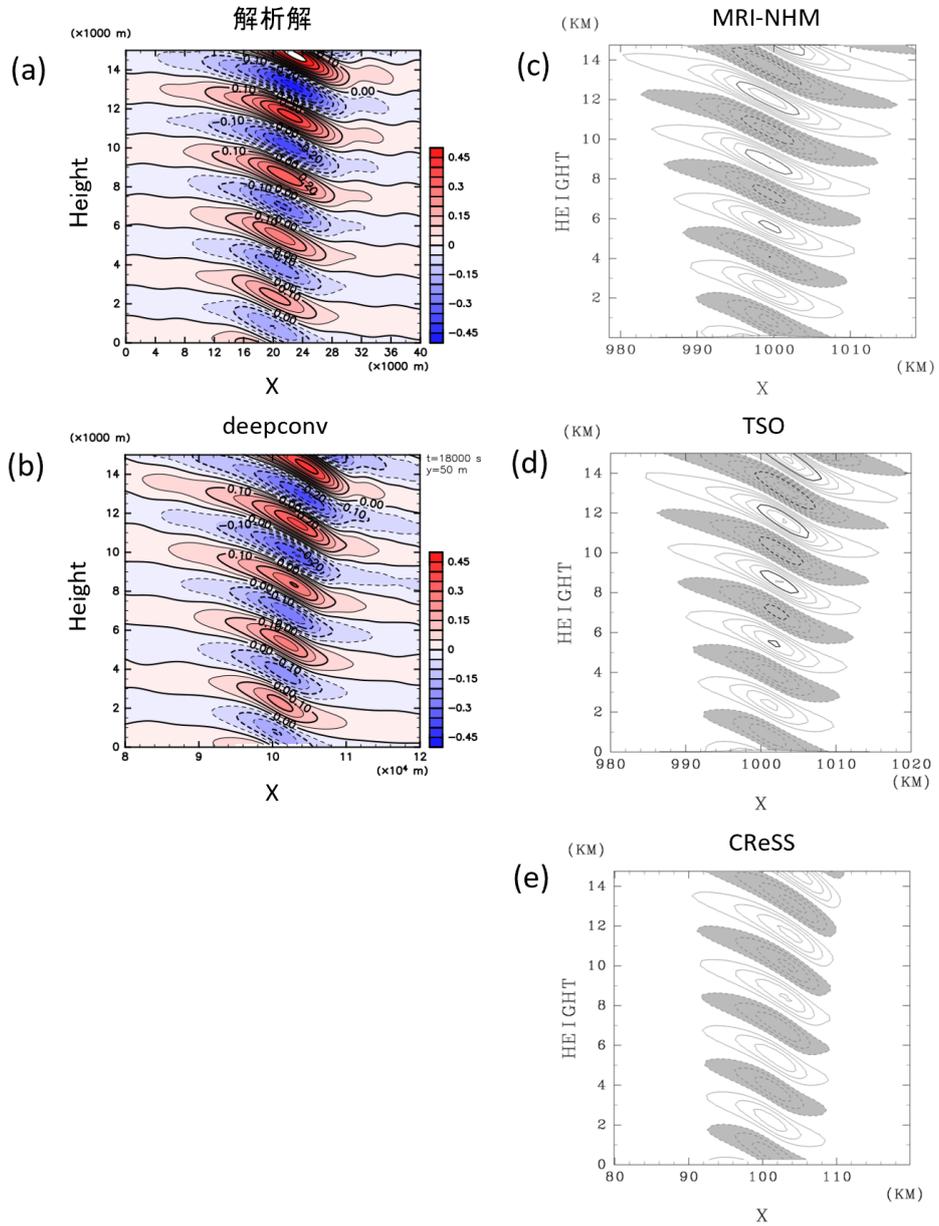


図 4.2: 実験 A1. 時刻 $t = 18000$ s, 高度 $0 \sim 15$ km における鉛直速度分布のスナップショット. (a) は解析解であり $x = 20$ km に山がある. (b) は数値実験の結果で $x = 100$ km に山がある. (c)(d)(e) は St-MIP に参加したモデルの結果であり, (c) は MRI/NPD-NHM, (d) は TSO, (e) は CReSS の結果で, $x = 1000$ km に山がある. 等値線の間隔は $0.05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

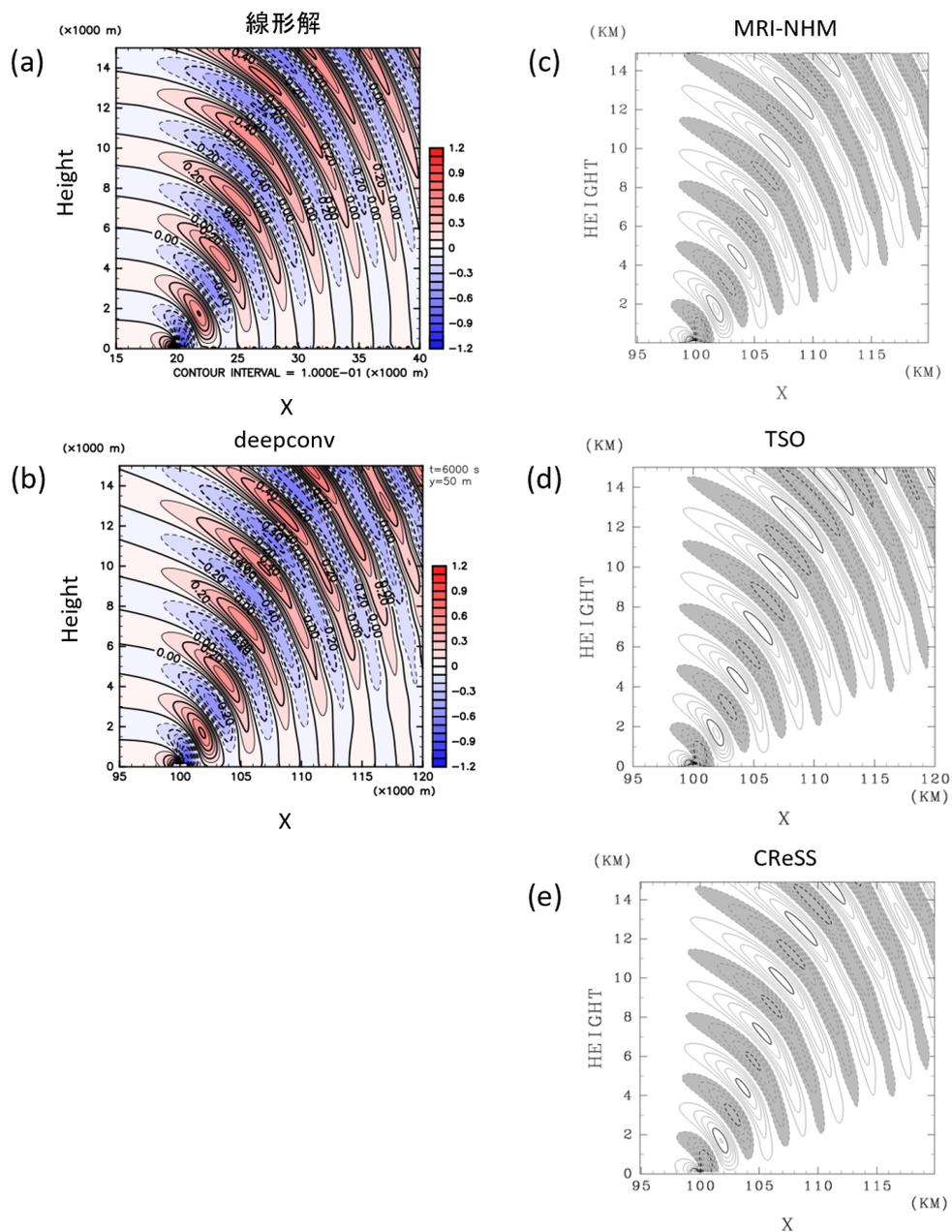


図 4.3: 実験 A2. 時刻 $t = 6000$ s, 高度 $0 \sim 15$ km における鉛直速度分布のスナップショット. (a) は解析解であり $x = 20$ km に山がある. (b) は数値実験の結果, (c)(d)(e) は St-MIP に参加したモデルの結果であり, (c) は MRI/NPD-NHM, (d) は TSO, (e) は CReSS の結果で, 計算領域の中央に山が存在する. 等値線の間隔は $0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

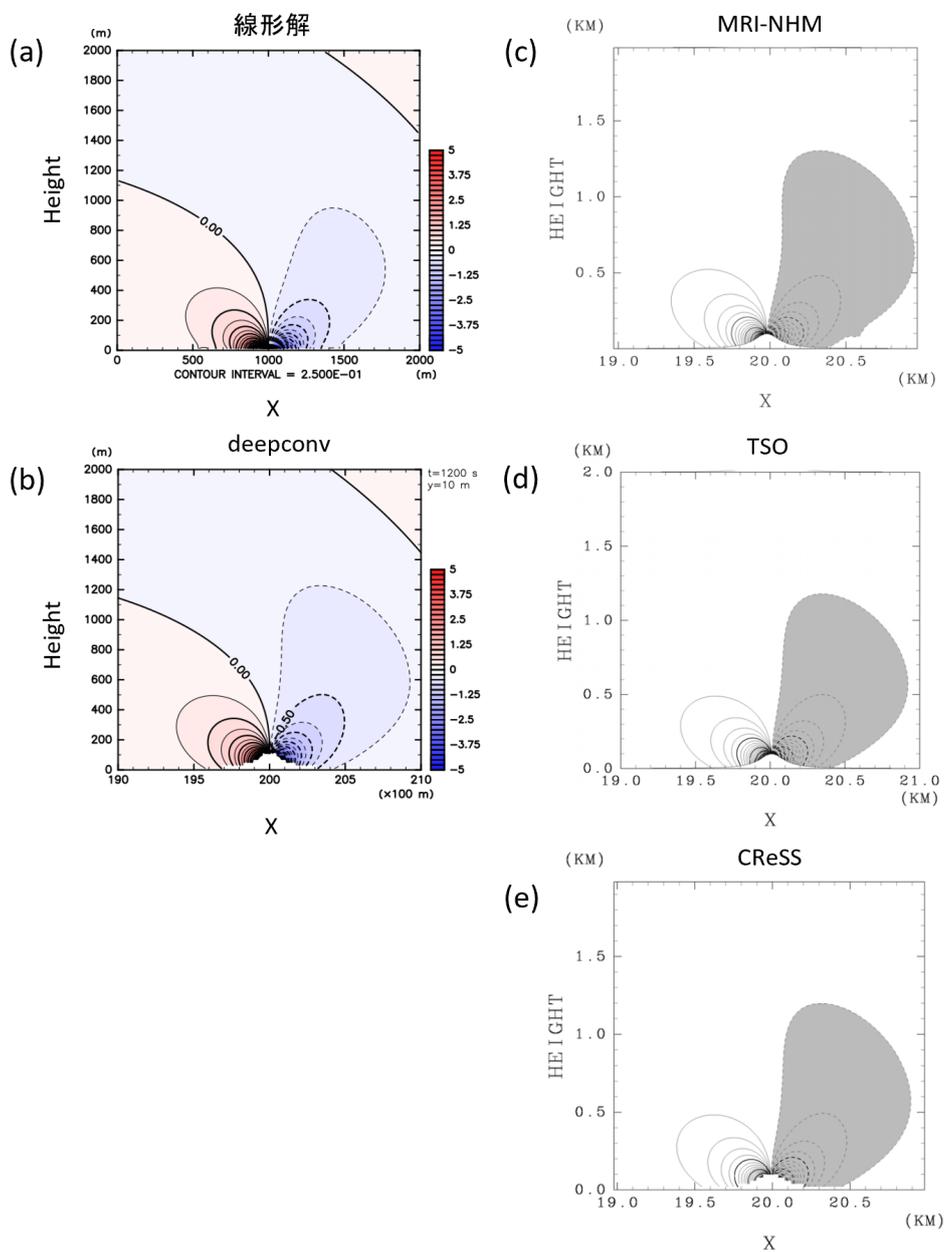


図 4.4: 実験 A3. 時刻 $t = 1200$ s, 高度 $0 \sim 2$ km における鉛直速度分布のスナップショット. (a) は解析解であり $x = 1$ km に山が存在する. (b) は数値実験の結果, (c)(d)(e) は St-MIP に参加したモデルの結果であり, (c) は MRI/NPD-NHM, (d) は TSO, (e) は CReSS の結果で, 計算領域の中央に山がある. 等値線の間隔は $0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

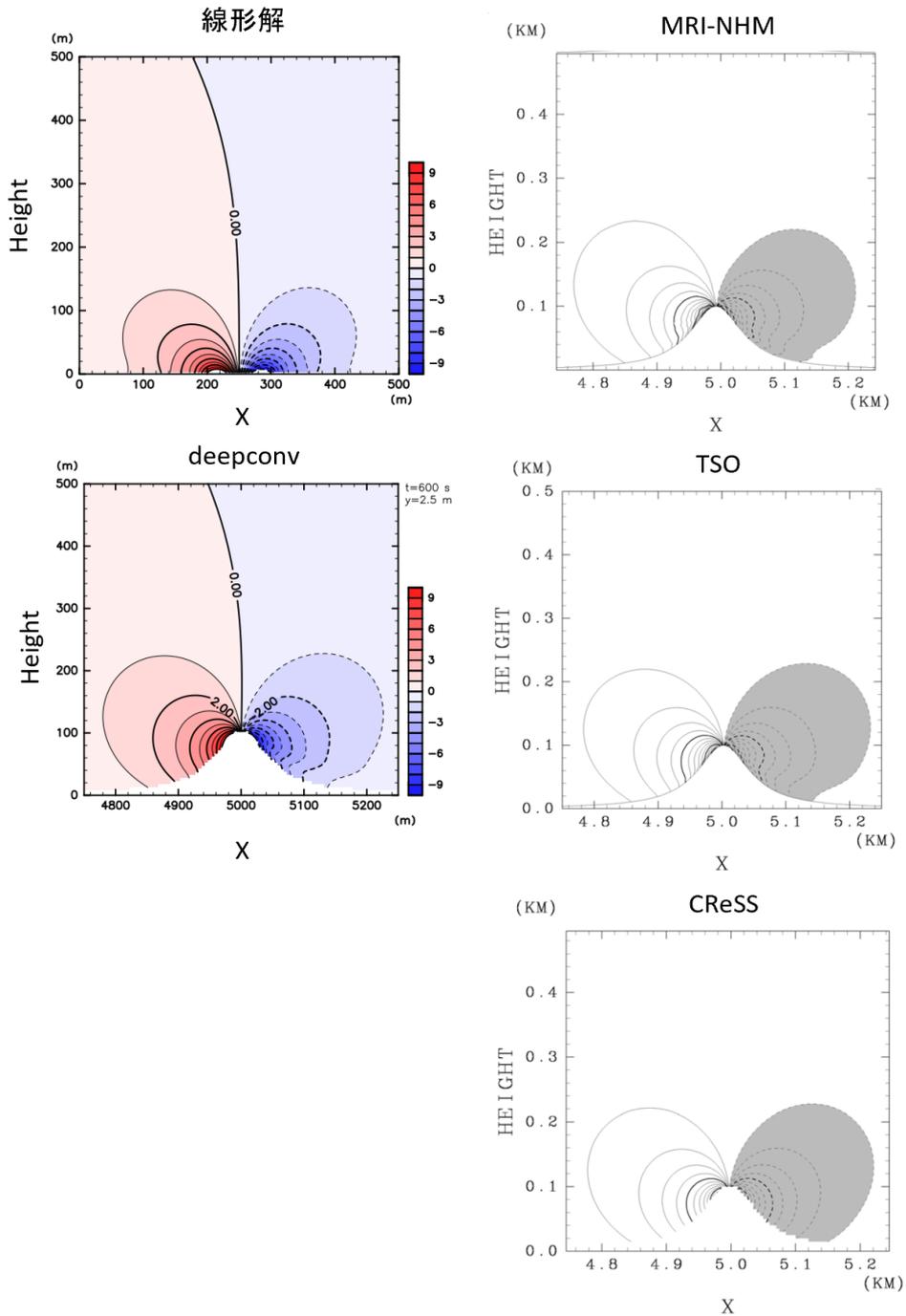


図 4.5: 実験 A4. 時刻 $t = 600$ s, 高度 0 ~ 500 m における鉛直速度分布のスナップショット. (a) は解析解であり $x = 250$ m に山が存在する. (b) は数値実験の結果, (c)(d)(e) は St-MIP に参加したモデルの結果であり, (c) は MRI/NPD-NHM, (d) は TSO, (e) は CReSS の結果で, 計算領域の中央に山がある. 等値線の間隔は $1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.3.2 実験 D: 高さ 500 m の山

山岳波の時間発展

図 4.6 に山の中心の直上における鉛直速度の時間発展を示す。いずれの実験結果もモデルの上端から位相が降りてきている。十分に時間が経過すると計算領域の下層では時間変化しなくなっており、定常状態に至ったとみなすことができる。

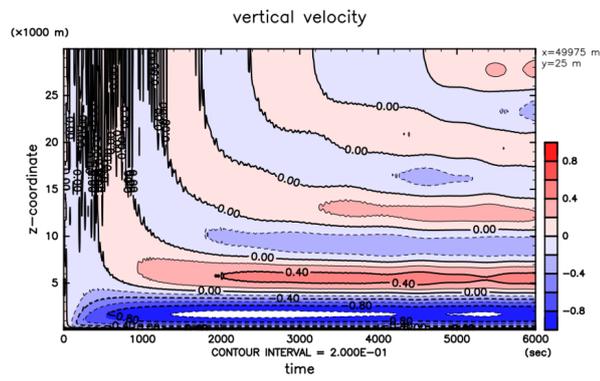
山岳波の構造

鉛直速度分布を用いて、山岳波の構造を確認する。図 4.7 に D1 の結果、図 4.8 に D2 の結果を示す。

まず、線形解析解と比較する。D1 では、風下側斜め上に伝播する波が現れており、波の構造はおおよそ一致する。また、波の振幅は解析解より $0.2\text{--}0.4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 大きい。これは非線形効果の影響であると考えられる。D2 では、伝播する波が現れており、波の構造はおおよそ一致する。高さ 10 km までにおいて、山の中心から 7 km 風上側での鉛直方向の波の数は、線形解よりも少ない。また、波の振幅は解析解より $0.5\text{--}1.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 大きく、これは非線形効果の影響であると考えられる。

次に、St-MIP に参加した 3 つのモデルの結果と比較して述べる。D1 と D2 では、波の構造と振幅は他のモデルの結果とおおよそ一致しており、非線形の効果を考慮すべき場合でも本研究で地形を導入した `deepconv` が山岳波を表現できることがわかった。D2 では風下での振幅が他のモデルよりも小さく、CReSS の結果と比べると、約 $0.5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 程度の差がある。しかしこれは他のモデル間の変動幅のうちであると考えられる。

(D1)



(D2)

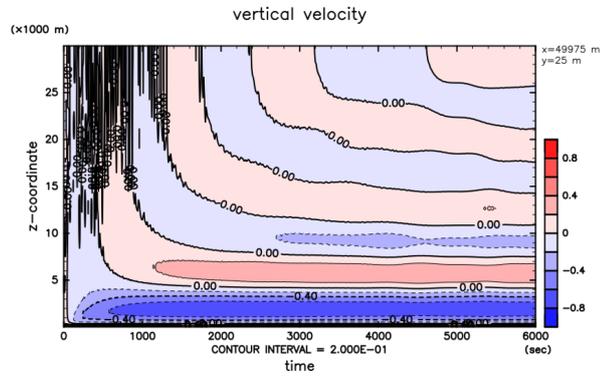


図 4.6: 実験 D で得られた, 山の中心の直上における鉛直速度の時間発展. 横軸は時間, 縦軸は z^* 座標系の高度である.

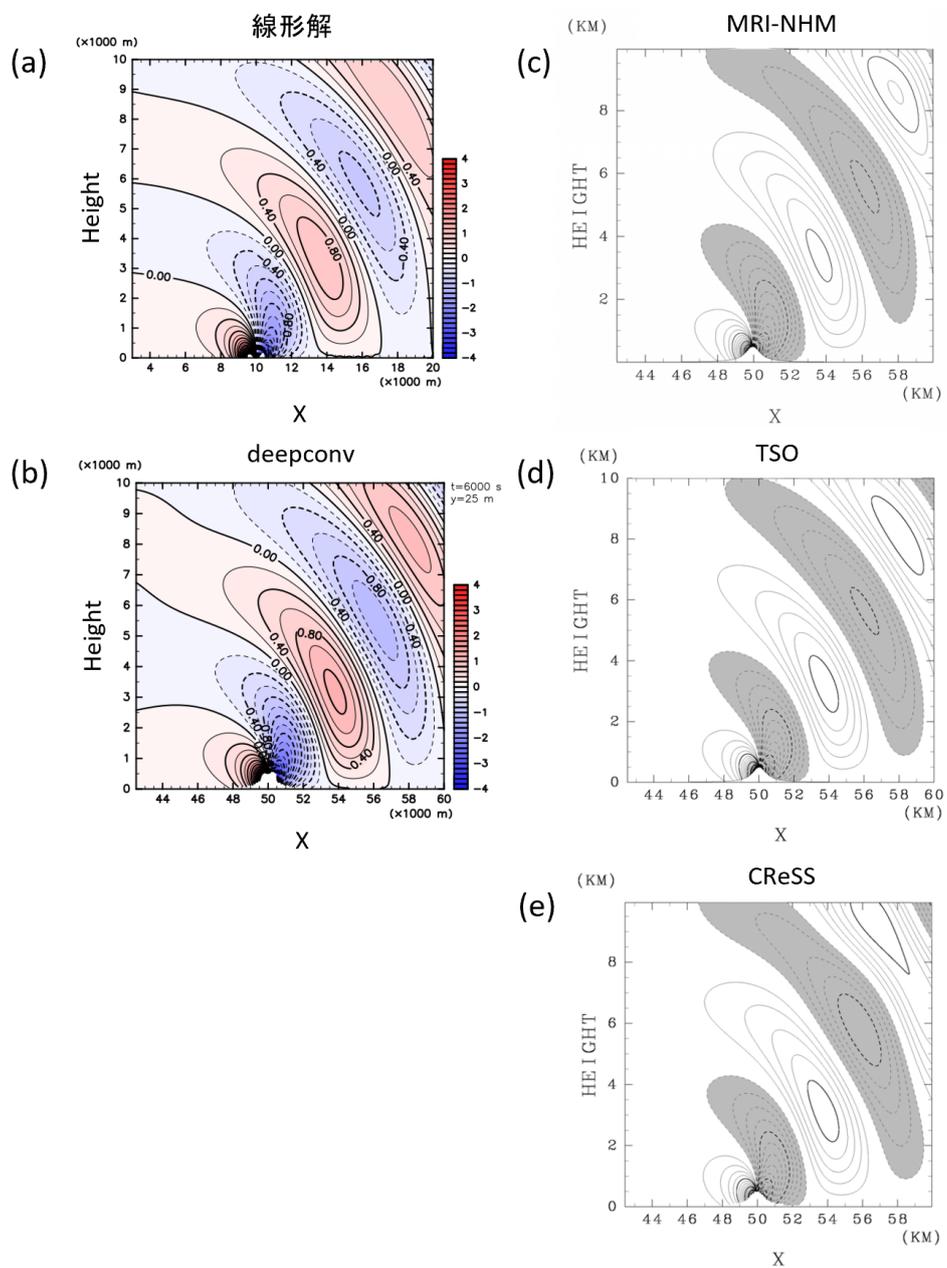


図 4.7: 実験 D1. 時刻 $t = 6000$ s, 高度 $0 \sim 10$ km における鉛直速度分布のスナップショット. (a) は解析解であり $x = 5$ km に山がある. (b) は数値実験の結果, (c)(d)(e) は St-MIP に参加したモデルの結果であり, (c) は MRI/NPD-NHM, (d) は TSO, (e) は CReSS の結果で $x = 5$ km に山がある. 等値線の間隔は $0.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

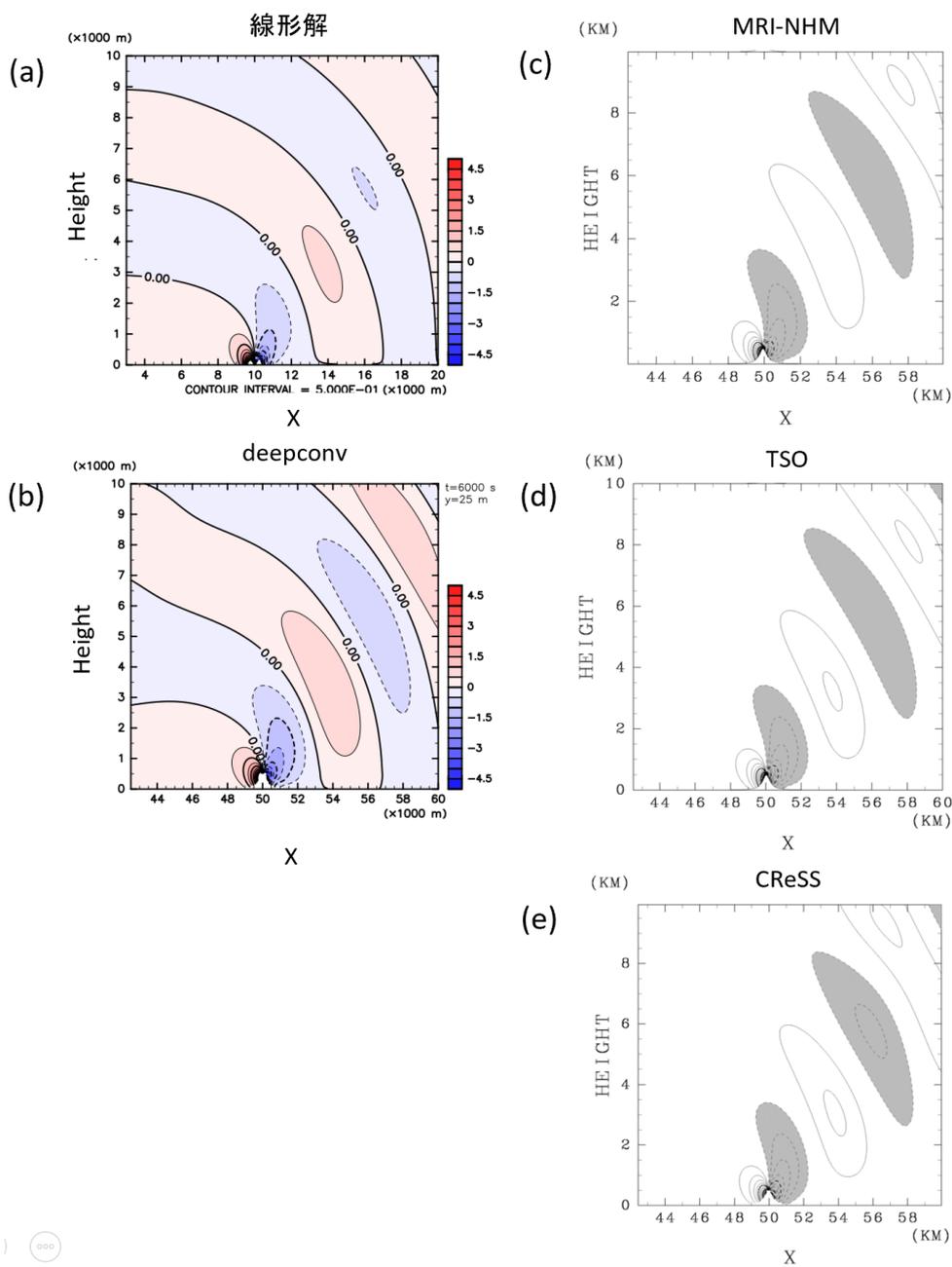


図 4.8: 実験 D2. 時刻 $t = 6000 \text{ s}$, 高度 $0 \sim 10 \text{ km}$ における鉛直速度分布のスナップショット. (a) は解析解であり $x = 5 \text{ km}$ に山がある. (b) は数値実験の結果, (c)(d)(e) は St-MIP に参加したモデルの結果であり, (c) は MRI/NPD-NHM, (d) は TSO, (e) は CReSS の結果で $x = 5 \text{ km}$ に山がある. 等値線の間隔は $0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.4 実験結果 (2): 運動量フラックス

次に, 実験から得られた運動量フラックス,

$$M = \overline{\rho u'w'} \quad (4.1)$$

を確認する. $\overline{\rho u'w'}$ [(kg · m⁻³)(m · s⁻¹)(m · s⁻¹)] は水平方向単位面積あたり単位時間あたりの, x 方向の運動量の鉛直方向への輸送である. 今回の設定では系の中心に孤立した山があるため, 系の中心で山岳波が生じ, その付近でのみ運動量が輸送される. そのため単位面積当たりの運動量フラックスは, 考える水平方向の面積に依存する. ここで示す運動量フラックスは系の広さで平均した運動量フラックスである. また, ここでは密度として基本場の値 $\rho_0(z)$ を用い, $\rho_0 \overline{u'w'}$ を計算した.

4.4.1 実験 A: 高さ 100 m の山

図 4.9-4.12 に実験 A1-A4 の結果を示す. 全ての実験で運動量フラックスは負の値をとり, ある時刻における運動量フラックスの絶対値は高さとともに減少していることがわかる (図 4.9a, 4.10a, 4.11a, 4.12a). また, 時間がたつにつれて, 各高度における運動量フラックスの絶対値は大きくなる. これは上方伝播した山岳波が時間とともに高高度に達し, 運動量を下向きに輸送するようになるからである. A2, A3, A4 の運動量フラックスの値は時間の経過とともに一定の値に近づくが, A1 では $t = 18000$ s においても運動量フラックスが高度変化している. この理由としては積分時間が十分ではなく定常状態に達していない可能性が考えられる.

A1 と A2 では, 解析解で規格化された運動量フラックスの値は時間とともに 1 に近づいており, 解析解と同様の運動量フラックスが再現されたことを示している (図 4.9b, 4.10b). この結果は St-MIP に参加した CReSS 以外のモデルの結果と同じである. CReSS では高度とともに急激に運動量フラックスの絶対値が小さくなっており, 明らかに deepconv や他のモデルとは異なっている. A3 では解析解で規格化された運動量フラックスの値は時間とともに 1.5-2.0 に近づいている (図 4.11b). この結果は MRI-NHM (図 4.11c) と TSO (図 4.11d) の中間に位置づけられる. A4 では解析解で規格化された運動量フラックスの値は時間とともに 1.5 に近づいている (図 4.12b). St-MIP に参加したモデルの結果にはばらつきがあり, deepconv の結果はそのうちのどれともあまり似ていない.

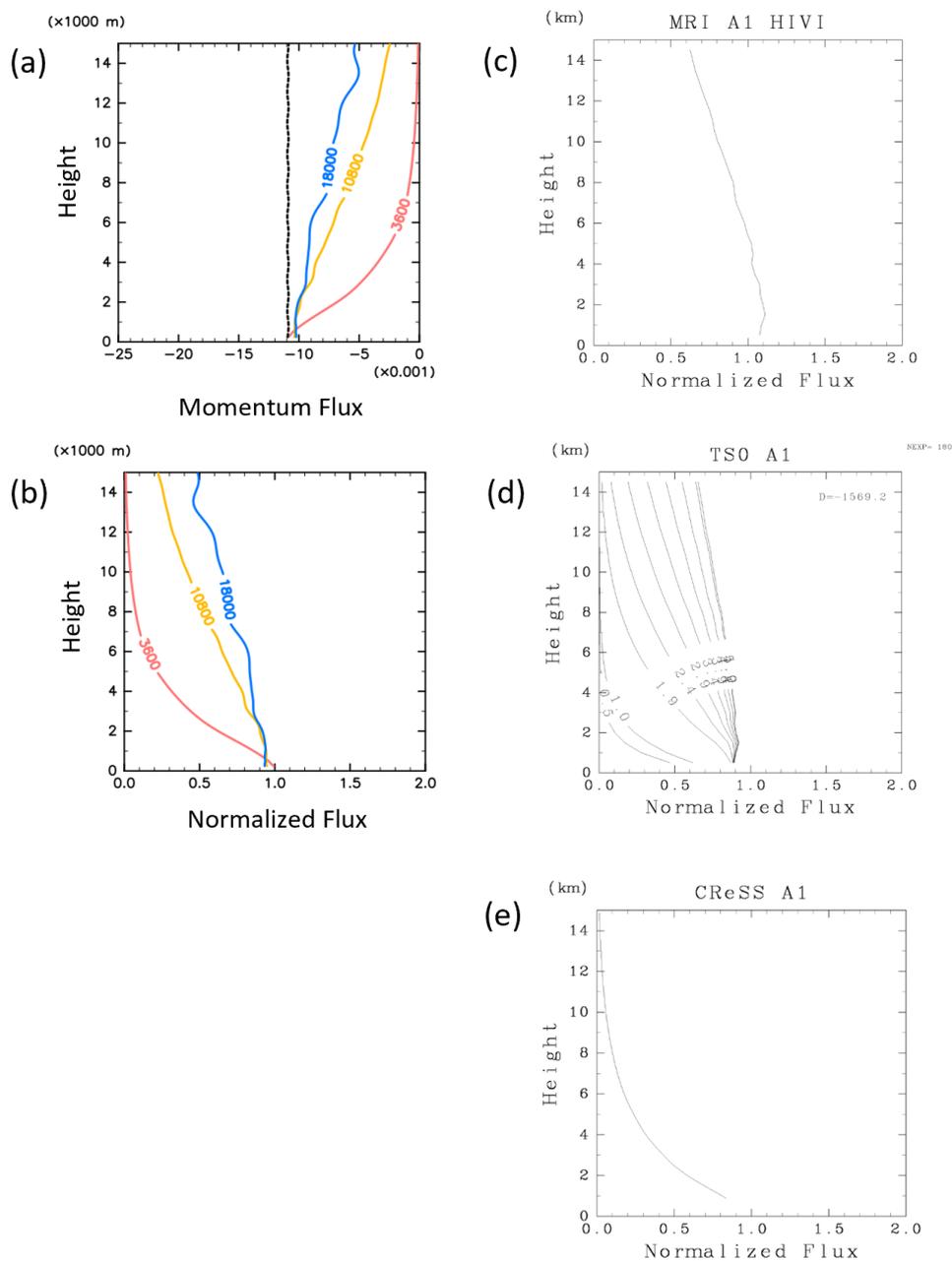


図 4.9: 実験 A1. $z = 0.1 \sim 15$ km における運動量フラックス. (a) 解析解 (点線) と $t = 3600$ s, 10800 s, 18000 s における値. (b) $t = 3600$ s, 10800 s, 18000 s における値を解析解で規格化した値. (c)(d)(e) 解析解で規格化された St-MIP に参加したモデルの結果. (c) は MRI-NHM, (d) は TSO でプロットされている数字は積分時間 [h] を表す. (e) は CReSS.

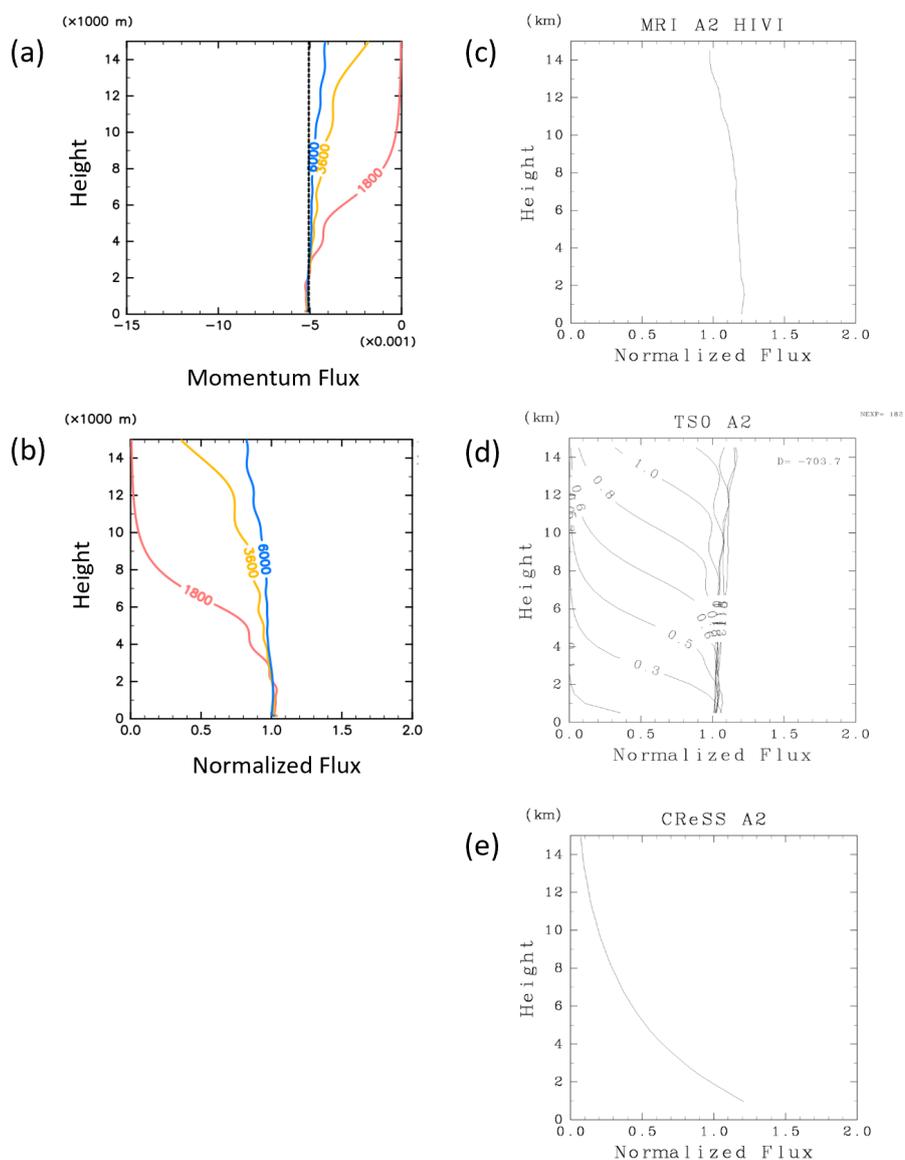


図 4.10: 実験 A2. $z = 0.1 \sim 15$ km における運動量フラックス. (a) 解析解 (点線) と $t = 1800$ s, 3600 s, 6000 s における値. (b) $t = 1800$ s, 3600 s, 6000 s における値を解析解で規格化した値. (c)(d)(e) 解析解で規格化された St-MIP の結果. (c) は MRI-NHM, (d) は TSO でプロットされている数字は積分時間 [h] を表す. (e) は CReSS.

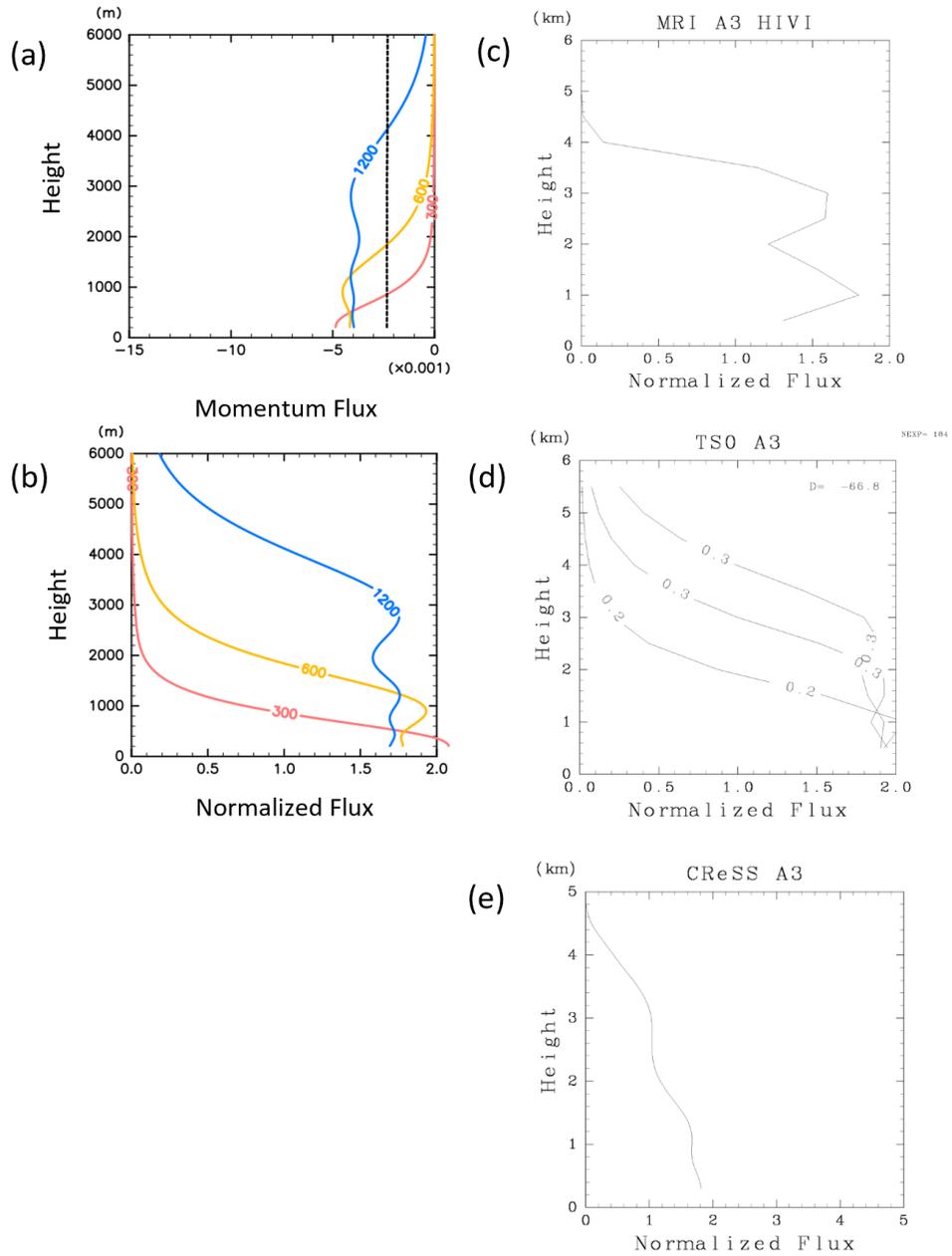


図 4.11: 実験 A3. $z=0.2 \sim 6$ km における運動量フラックス. (a) 解析解 (点線) と $t=300$ s, 600 s, 1200 s における値. (b) $t=300$ s, 600 s, 1200 s における値を解析解で規格化した値. (c)(d)(e) 解析解で規格化された St-MIP に参加したモデルの結果. (c) は MRI-NHM, (d) は TSO でプロットされている数字は積分時間 [h] を表す. (e) は CReSS.

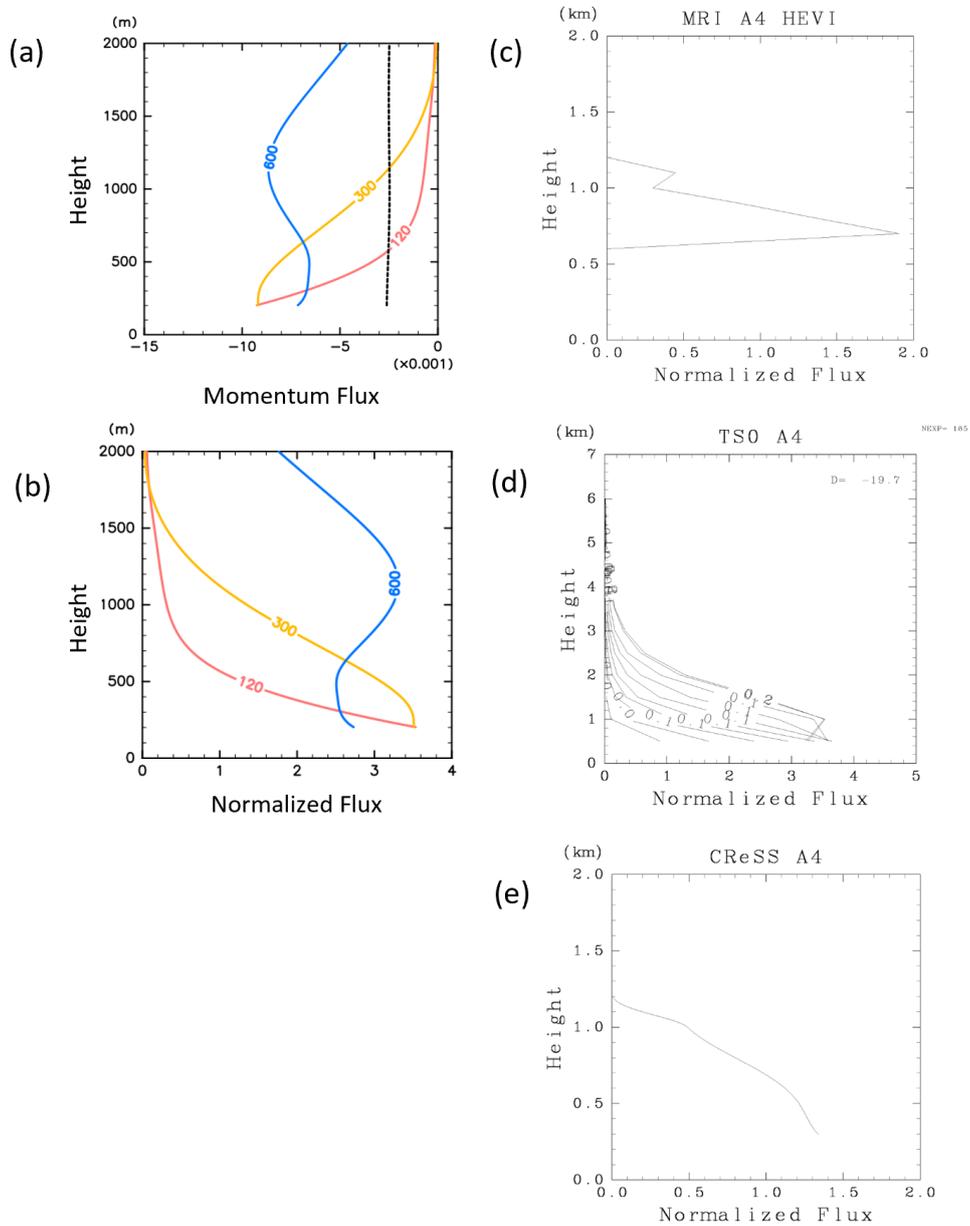


図 4.12: 実験 A4. $z=0.2 \sim 2$ km における運動量フラックス. (a) 解析解 (点線) と $t=120$ s, 300 s, 600 s における値. (b) $t=120$ s, 300 s, 600 s における値を解析解で規格化した値. (c)(d)(e) 解析解で規格化された St-MIP に参加したモデルの結果. (c) は MRI-NHM, (d) は TSO でプロットされている数字は積分時間 [h] を表す. (e) は CReSS.

4.4.2 実験 D: 高さ 500 m の山

図 4.13 に実験 D1 の結果, 図 4.14 に実験 D2 の結果を示す. 全ての実験で運動量フラックスは負の値をとり, ある時刻における運動量フラックスの絶対値は高さとともに減少していることがわかる (図 4.13a, 4.14a). また, 時間がたつにつれて, 各高度における運動量フラックスの絶対値は大きくなり, 一定の値に近づいている. これは上方伝播した山岳波が時間とともに高高度に達し, 運動量を下向きに輸送するようになるからである.

D1 では解析解で規格化された運動量フラックスの値は時間とともに 1.5 に近づいていて, D2 では 3 に近づいている. この結果は St-MIP に参加した CReSS 以外のモデルの結果と整合的である.

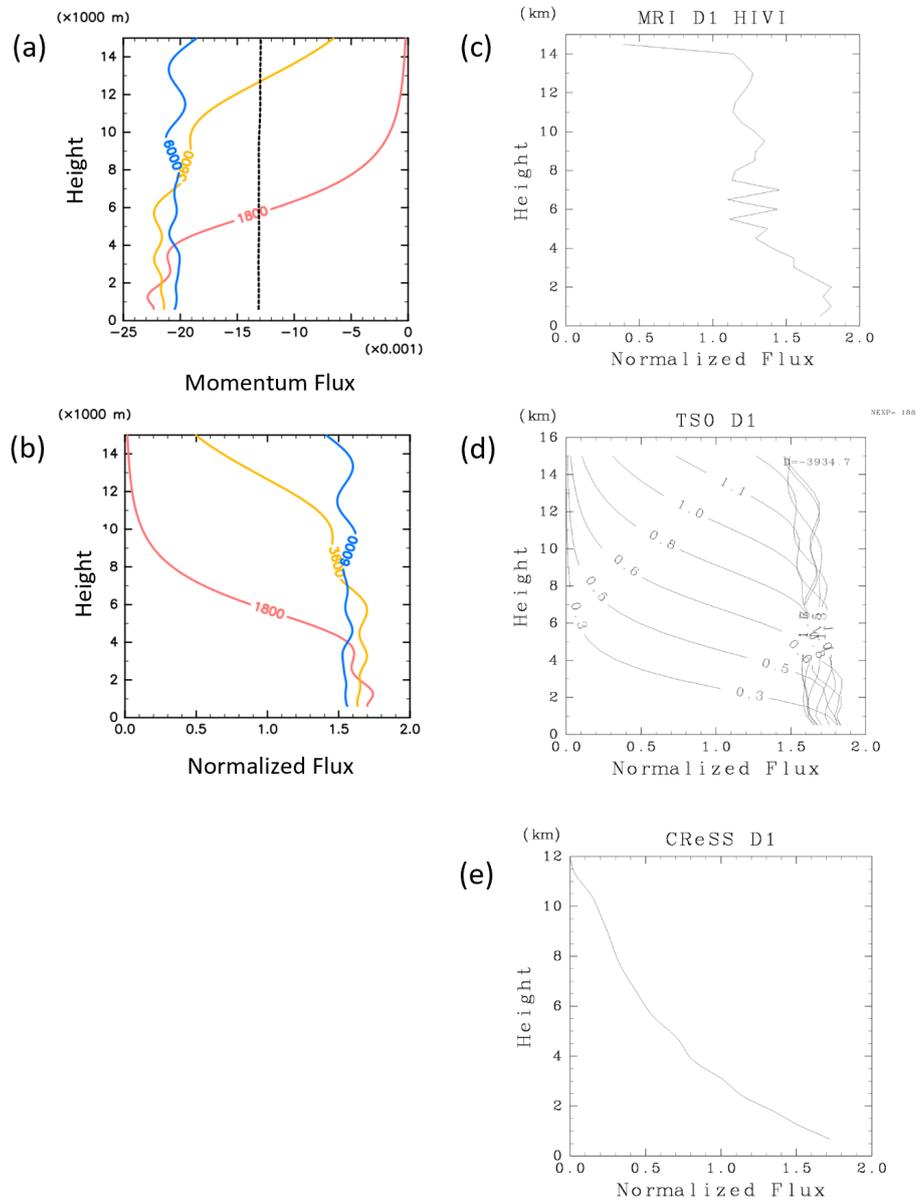


図 4.13: 実験 D1. $z=0.1 \sim 15$ km における運動量フラックス. (a) 解析解 (点線) と $t=1800$ s, 3600 s, 6000 s における値. (b) $t=1800$ s, 3600 s, 6000 s における値を解析解で規格化した値. (c)(d)(e) 解析解で規格化された St-MIP に参加したモデルの結果. (c) は MRI/NPD-NHM, (d) は TSO でプロットされている数字は積分時間 [h] を表す. (e) は CReSS.

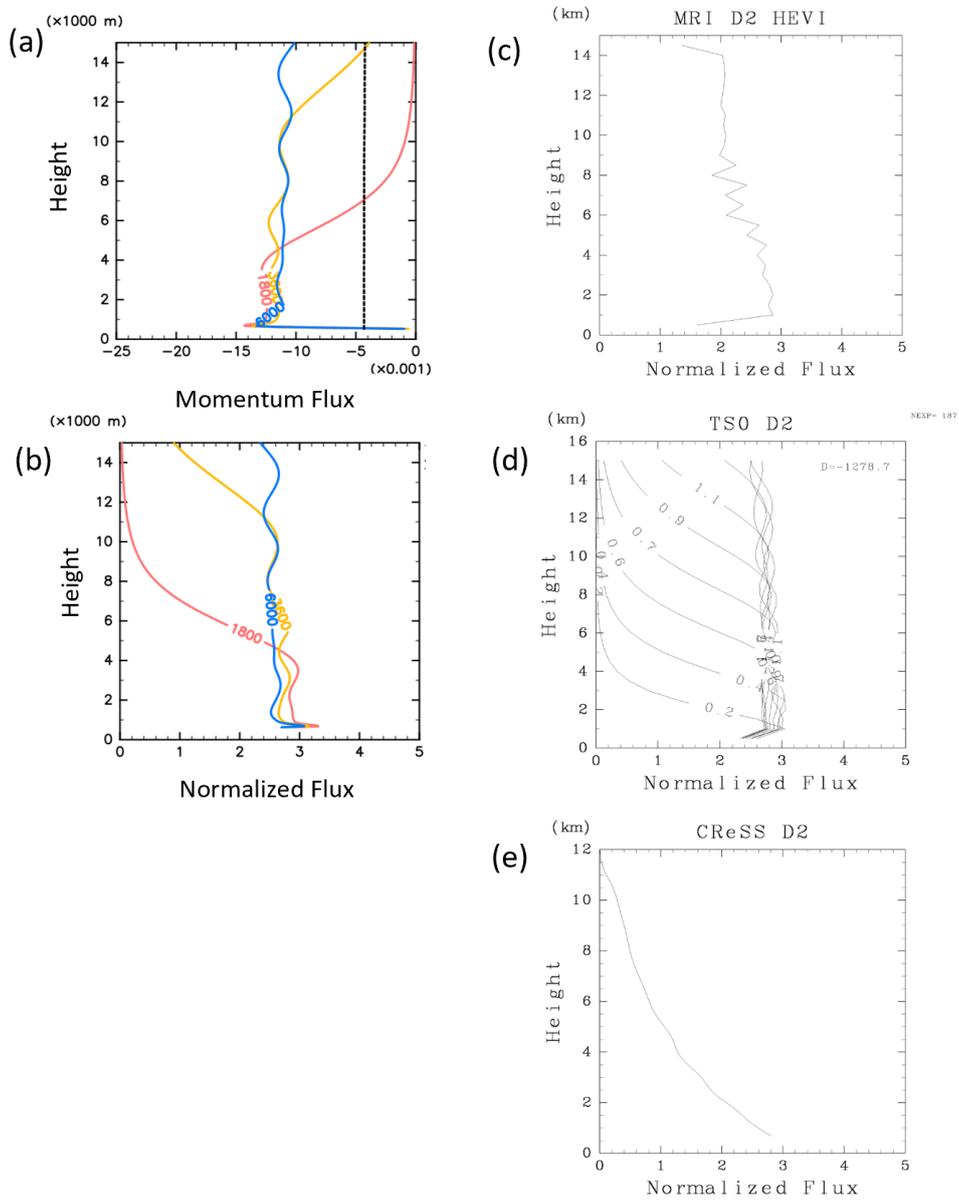


図 4.14: 実験 D2. $z=0.1 \sim 15$ km における運動量フラックス. (a) 解析解 (点線) と $t=1800$ s, 3600 s, 6000 s における値. (b) $t=1800$ s, 3600 s, 6000 s における値を解析解で規格化した値. (c)(d)(e) 解析解で規格化された St-MIP に参加したモデルの結果. (c) は MRI/NPD-NHM, (d) は TSO でプロットされている数字は積分時間 [h] を表す. (e) は CReSS.

4.5 結果のまとめと考察

本章では地形を導入した `deepconv` を用いて Satomura et al. (2003) の山岳波実験を行った。

`deepconv` による結果を線形解と比較し、`deepconv` は解析解とほぼ一致する構造の波を表現することが確認された。A1-A4 では振幅の線形解との整合性を確認した。D1, D2 では線形解より $\sim 10\%$ 程度振幅が大きいことを確認した。これは非線形効果の影響であると考えられる。また解析解で規格化した運動量フラックスの値は時間の経過とともに、A1, A2 では1に近づき、A3, A4 では1.5-2.0に近づいている。D1 では1.5, D2 では3に近づく。D1, D2 の結果は、非線形効果の影響によると思われる。

`deepconv` による結果は、St-MIP に参加したモデルのうちの CReSS 以外の結果と波の構造、運動量フラックスがおおよそ一致していた。ただし A4 の結果はモデル間の差が大きかった。本研究では一様な背景大気を仮定しているが、Doyle et al. (2011) の現実的な大気構造を与えたモデル相互比較実験でも同様にモデル間での結果の差が見られる。このことについては今後さらなる研究が必要である。

St-MIP に参加したモデルとの比較においても最も興味深いのは `deepconv` と同じ準圧縮方程式系を用いる CReSS の結果との比較である。驚くことに `deepconv` から得られた波の構造や運動量フラックスは、多くの実験において CReSS と似ておらず、解析解や St-MIP に参加した他のモデルの結果に近くなっている。2.3.1 節で述べたように、線形化された準圧縮方程式系の重力波の分散関係式は完全圧縮方程式系のもと同じであり、基礎方程式系の差で CReSS の結果の特異さを説明することはできない。そして本研究により、準圧縮方程式系を z^* 座標系に変換し、差分法で離散化して構築した数値モデルが線形解析解、および完全圧縮方程式系に基づくモデルと同等の波の構造と運動量フラックスを表現することが示された。

CReSS と `deepconv` の数値モデルとしての違いは、予報変数、時間積分方法が挙げられる。予報変数として、`deepconv` は無次元圧力を用いており、CReSS は圧力を用いている。時間積分については本研究で地形を導入した `deepconv` は HE-VE 法を用いている。一方、CReSS では HE-VI 法を用いており、音波に関連する項を水平方向には前進差分、鉛直方向にはクランク・ニコルソン法を用いている。これら2つの違いが、本研究で示したモデル間の差の原因かもしれない。

第5章 結論

地形はその熱的効果および力学的効果によって大気循環に影響を及ぼしている。例えば斜面に風がぶつかることで生じる内部重力波のひとつである山岳波は、運動量を鉛直輸送し、大気大循環にも重要な役割を果たしていると考えられる。本研究では、地形が大気循環に及ぼす力学的効果を調べることを目指して二次元版の雲解像モデル deepconv (Sugiyama et al., 2009) に地形を導入した。

はじめに deepconv が基礎方程式系に用いている準圧縮方程式系における内部重力波の性質を線形近似の下で確認し、準圧縮方程式系における波の性質が完全圧縮方程式系と完全に同じであることを確認した。次に、deepconv が基礎方程式として用いる準圧縮方程式系を幾何学的高度座標系から変換し、標高で規格化した高さの座標系における方程式系を導出した。そしてその方程式系を差分化し、deepconv に地形を導入した。地形を導入した deepconv の振る舞いを検証するためには、Satomura et al. (2003) で行われた理想化された山岳波のモデル相互比較実験を行った。線形近似が成り立つと考えられる山の高さ ($h_0 = 100$ m) の実験では、波の構造、運動量フラックスは線形解析解とよく一致することを確認できた。非線形効果が無視できない山の高さ ($h_0 = 500$ m) の実験では、波の構造、運動量フラックスが線形解析解からずれているが、相互比較実験に参加した CReSS 以外のモデルの結果と同様であることを確認した。これらのことから、本研究で deepconv に地形を取り入れることに成功したことが示された。地形の大気循環に対する影響のモデルによる表現には、条件によって未だモデル間の差が大きく、大気循環研究の課題の一つである。本研究で地形を導入した deepconv も、他のモデルとともに今後それらの研究に活用していくことができるだろう。

付録 A 地形に沿う座標系の幾何的な性質

この付録では、地形に沿う座標系を導入する際に必要な座標変換についてまとめる。デカルト座標系における方程式系から地形に沿う座標系における方程式系を導出する方法は二つ存在する。ひとつはチェーンルール(連鎖律)を用いて変換する方法で、もうひとつはテンソルを用いて一般的な座標系における方程式系を求めておき、その結果を地形に沿う座標系に適用するという方法である。ここでは後者のテンソルを用いた方法による地形に沿う座標系の方程式系の導出を示す。

A.1 数学的準備

A.1.1 一般曲線座標

直交座標系 (x, y, z) の関数として、空間のある領域で定義される 3 つの関数 $F^i(x, y, z)$ を考える。これらは (x, y, z) について何度でも微分可能であるとする。

$$\xi = F^1(x, y, z) \quad (\text{A.1a})$$

$$\eta = F^2(x, y, z) \quad (\text{A.1b})$$

$$\zeta = F^3(x, y, z) \quad (\text{A.1c})$$

とおいたとき、領域内の各点 $P(x, y, z)$ に対して、 (ξ, η, ζ) が対応する。この対応が 1 対 1 のとき、領域内に曲線座標系 (ξ, η, ζ) が設定されたという。さらに、次のことが成り立っていると仮定する。

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

座標曲線 (ξ, η, ζ) の接線ベクトルを基底ベクトル \mathbf{e}_i , 座標曲線の法線ベクトルを双対基底ベクトル \mathbf{e}^i とする. 曲線座標系における基底ベクトル \mathbf{e}_i が α^i 曲線の接線ベクトルとして得られるとき, デカルト座標系における基底ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とすると,

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial \alpha^i}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{\partial x}{\partial \alpha^i}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha^i}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha^i}\mathbf{k} \quad (\text{A.3})$$

と表すことができ,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

である. これを用いると, 任意のベクトル場 \mathbf{A} は,

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3 \quad (\text{A.5})$$

のように表される. このベクトルの成分 (A^1, A^2, A^3) を曲線座標系 (ξ, η, ζ) に関する反変成分という. また共変成分は \mathbf{A} と \mathbf{e} の内積をとることで得られる.

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \quad (\text{A.6})$$

また, 双対基底ベクトルは α^i 曲線の法線方向で α^i の変化率が最大となることに着目すると, α^i 曲線の法線ベクトルは, α^i の勾配で表現できる. すなわち,

$$\mathbf{e}^i \equiv \nabla \alpha^i \quad (\text{A.7})$$

と表すことができる.

A.1.2 計量テンソル

デカルト座標系において点 $P(x, z)$ とそこから微小距離 ds 離れた点 $Q(x+dx, z+dz)$ があるとき,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dz)^2 \quad (\text{A.8})$$

が成り立つ. $x = x^1, z = x^3$ と書くとき,

$$(ds)^2 = dx^m dx^m \quad (\text{A.9})$$

と書ける. 今, 一般座標系 α^i を考える. dx^i も α^i の関数であり,

$$\begin{aligned} dx^i &= dx^i(\alpha^1, \alpha^3) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^1} \right) d\alpha^1 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^3} \right) d\alpha^3 \\ &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} \right) d\alpha^j \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる. これを用いると,

$$(ds)^2 = \left(\frac{\partial x^m}{\partial \alpha^i} \right) \left(\frac{\partial x^m}{\partial \alpha^j} \right) d\alpha^i d\alpha^j \quad (\text{A.11})$$

となる. 係数部分を,

$$G_{ij} \equiv \left(\frac{\partial x^m}{\partial \alpha^i} \right) \left(\frac{\partial x^m}{\partial \alpha^j} \right) \quad (\text{A.12})$$

と置くと,

$$(ds)^2 = G_{ij} d\alpha^i d\alpha^j \quad (\text{A.13})$$

と表される. 微小距離の二乗を考えると, 係数 G_{ij} は座標の微小変化の各二次量がどれほど寄与しているのかを表す係数となっている. G_{ij} は二階のテンソルであり, 計量テンソルと呼ばれている.

G_{ij} は基底ベクトル \mathbf{e}_i によって表すことが出来る.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha^i} \mathbf{e}_x + \frac{\partial z}{\partial \alpha^i} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha^j} \mathbf{e}_x + \frac{\partial z}{\partial \alpha^j} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha^i} \frac{\partial z}{\partial \alpha^j} \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^j} \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x^m}{\partial \alpha^j} \\ &= G_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

すなわち,

$$G_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (\text{A.15})$$

が得られる.

A.2 地形に沿う座標系における方程式系の導出

A.2.1 地形に沿う座標系

次のような座標系,

$$\xi = x \quad (\text{A.16a})$$

$$\eta = y \quad (\text{A.16b})$$

$$\zeta = \zeta(x, y, z) \quad (\text{A.16c})$$

を用いる場合を考える. 速度ベクトルは, デカルト座標系の基底ベクトルと地形に沿う座標系における基底ベクトルを用いて, それぞれ,

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (\text{A.17a})$$

$$\mathbf{u} = U\mathbf{e}_1 + V\mathbf{e}_2 + W\mathbf{e}_3 \quad (\text{A.17b})$$

のように表される. デカルト座標系の速度成分は地形に沿う座標系における速度成分を用いて以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} \\ &= (U\mathbf{e}_1 + V\mathbf{e}_2 + W\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{i} \\ &= U \frac{\partial x}{\partial \xi} + V \frac{\partial x}{\partial \eta} + W \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (\text{A.18a})$$

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} \\ &= (U\mathbf{e}_1 + V\mathbf{e}_2 + W\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{j} \\ &= U \frac{\partial y}{\partial \xi} + V \frac{\partial y}{\partial \eta} + W \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (\text{A.18b})$$

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} \\ &= (U\mathbf{e}_1 + V\mathbf{e}_2 + W\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{k} \\ &= U \frac{\partial z}{\partial \xi} + V \frac{\partial z}{\partial \eta} + W \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (\text{A.18c})$$

今, ヤコビアンがゼロでないという仮定し, 上式を (U, V, W) について解くことで, デカルト座標系の速度成分を用いて地形に沿った座標系の速度成分を表すことができる. (A.18) は,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

のように書ける.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

を用いて書き直すと,

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

である. ここで,

$$G^{-1} = \frac{1}{|G|} \tilde{G} \quad (\text{A.22})$$

であり, 余因子行列 \tilde{G} の各成分は, $\tilde{G}_{ij} = (-1)^{i+j} |J_{ji}|$ である. すなわち,

$$G^{-1} = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} |J_{11}| & -|J_{21}| & |J_{31}| \\ -|J_{12}| & |J_{22}| & -|J_{32}| \\ |J_{13}| & -|J_{23}| & |J_{33}| \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

である.

今, 座標系を,

$$\xi = x \quad (\text{A.24a})$$

$$\eta = y \quad (\text{A.24b})$$

$$\zeta = \frac{z_{top}\{z - z_{sfc}(x, y)\}}{z_{top} - z_{sfc}(x, y)} \quad (\text{A.24c})$$

のように定義する. ここで

$$z(x, y, \zeta) = z_{sfc}(x, y) + \zeta \left\{ 1 - \frac{z_{sfc}(x, y)}{z_{top}} \right\} \quad (\text{A.25})$$

である. このとき,

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

なので,

$$\begin{aligned}
 |J_{11}| &= G_{22}G_{33} - G_{23}G_{32} \\
 &= \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\
 |J_{12}| &= G_{21}G_{33} - G_{23}G_{31} \\
 &= 0 \\
 |J_{13}| &= G_{21}G_{32} - G_{22}G_{31} \\
 &= -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\
 |J_{21}| &= G_{12}G_{33} - G_{13}G_{32} \\
 &= 0 \\
 |J_{22}| &= G_{11}G_{33} - G_{13}G_{31} \\
 &= \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\
 |J_{23}| &= G_{11}G_{32} - G_{12}G_{31} \\
 &= \frac{\partial z}{\partial \eta} \\
 |J_{31}| &= G_{12}G_{23} - G_{13}G_{22} \\
 &= 0 \\
 |J_{32}| &= G_{11}G_{23} - G_{13}G_{21} \\
 &= 0 \\
 |J_{33}| &= G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

である. また,

$$|G| = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \tag{A.27}$$

である. よって,

$$G^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \zeta}} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial z}{\partial \zeta} & 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} & -\frac{\partial z}{\partial \eta} & 1 \end{bmatrix} \tag{A.28}$$

であり, 曲線座標系の速度成分は,

$$U = u \quad (\text{A.29a})$$

$$V = v \quad (\text{A.29b})$$

$$W = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \zeta}} \left(-\frac{\partial z}{\partial \xi} u - \frac{\partial z}{\partial \eta} v + w \right) \quad (\text{A.29c})$$

である.

$$M_1 = -\frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad M_2 = -\frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad M_3 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (\text{A.30a,b,c})$$

とすると,

$$U = u \quad (\text{A.31a})$$

$$V = v \quad (\text{A.31b})$$

$$W = \frac{1}{M_3} (M_1 u + M_2 v + w) \quad (\text{A.31c})$$

と書ける. また, 任意変数 ϕ の偏微分は, $\phi(x, y, z) = \phi(\xi, \eta, \zeta)$ であることから,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{A.32a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{A.32b})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{A.32c})$$

と書ける. これを行列として書き直すと,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

である. ここで,

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

とすると,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

と書き表され, 逆行列 M^{-1} を求めると,

$$M^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \zeta}} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & 0 & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial z}{\partial \zeta} & -\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

を得る. よって,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \zeta}} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{A.37a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \zeta}} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{A.37b})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \zeta}} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad (\text{A.37c})$$

のように偏微分を変換することができる. これは, M_1, M_2, M_3 を用いると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{M_3} \left(M_3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + M_1 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{A.38a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{M_3} \left(M_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + M_2 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{A.38b})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{M_3} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad (\text{A.38c})$$

のように書ける.

付録 B 波の構造の時間変化と 運動量フラックスの時間変化

この付録には、第 4 章の山岳波のモデル相互比較実験における、波の構造と運動量フラックスの時間変化の図を掲載する。

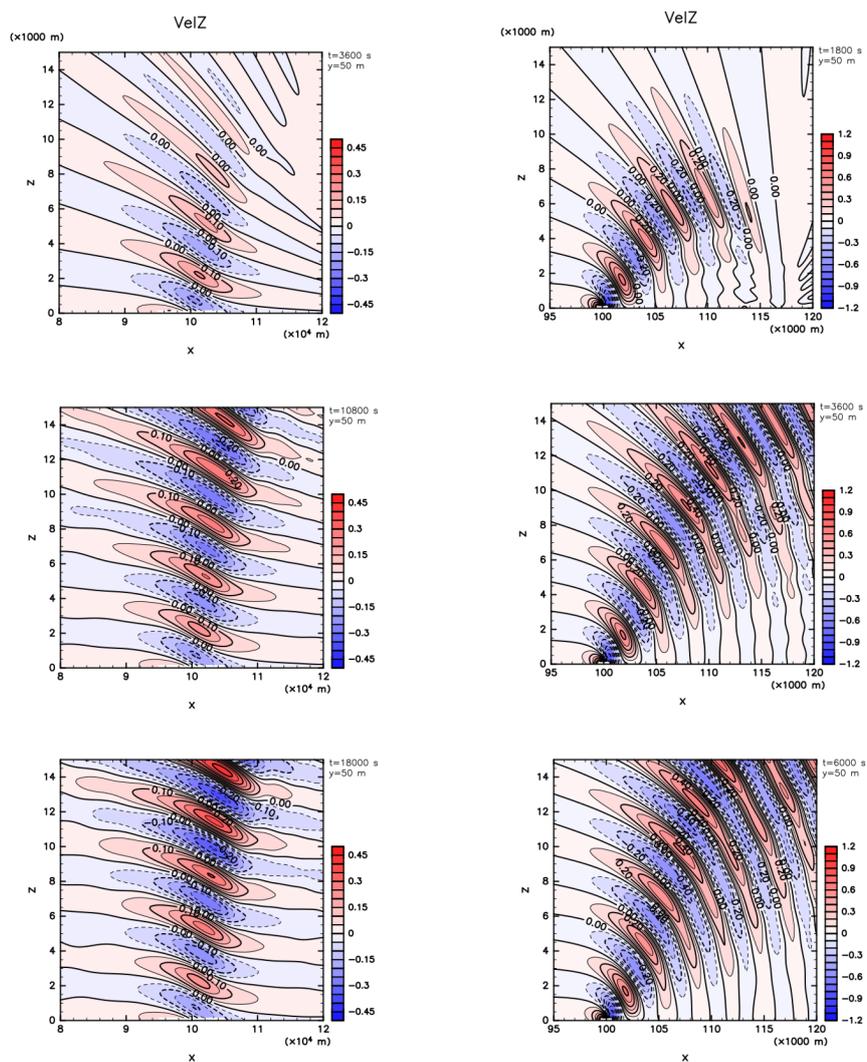


図 B.1: 実験 A1(左列) と実験 A2(右列) における鉛直速度分布の時間変化. 時間ステップは各図の右上に示している.

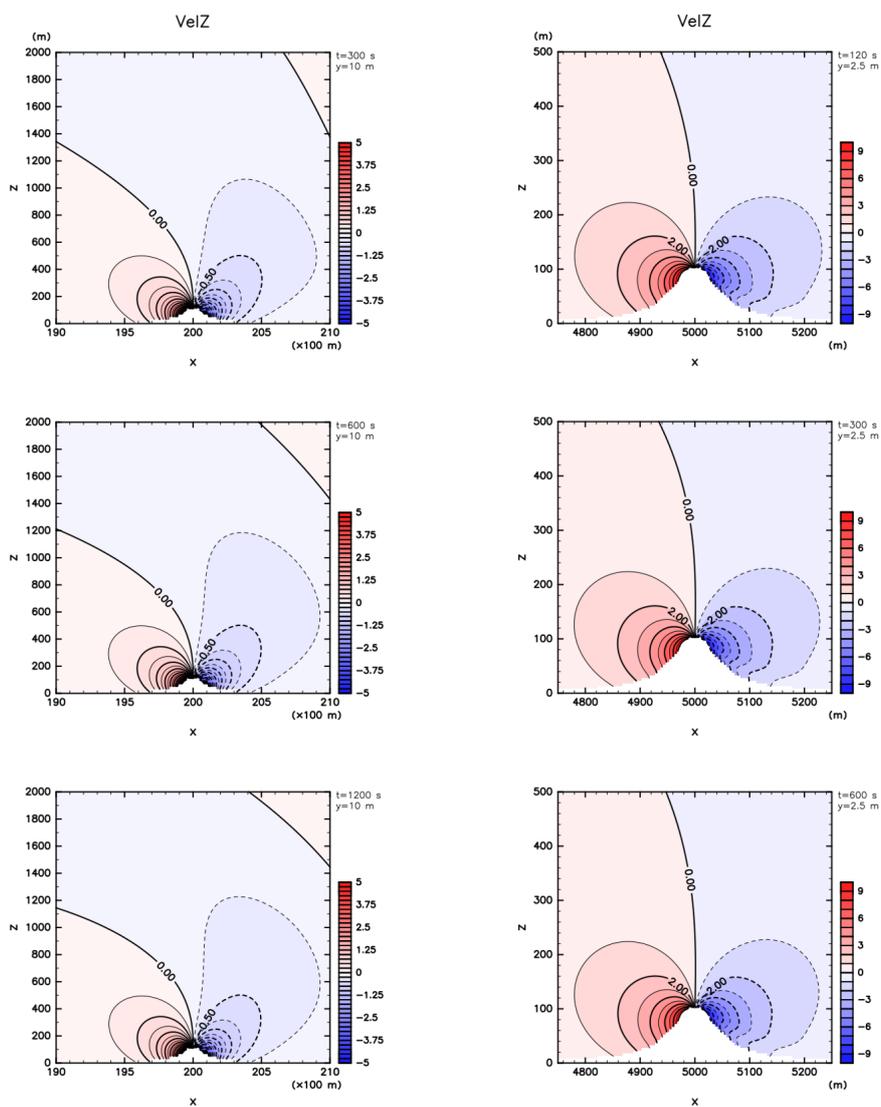


図 B.2: 実験 A3(左列) と実験 A4(右列) における鉛直速度分布の時間変化. 時間ステップは各図の右上に示している.

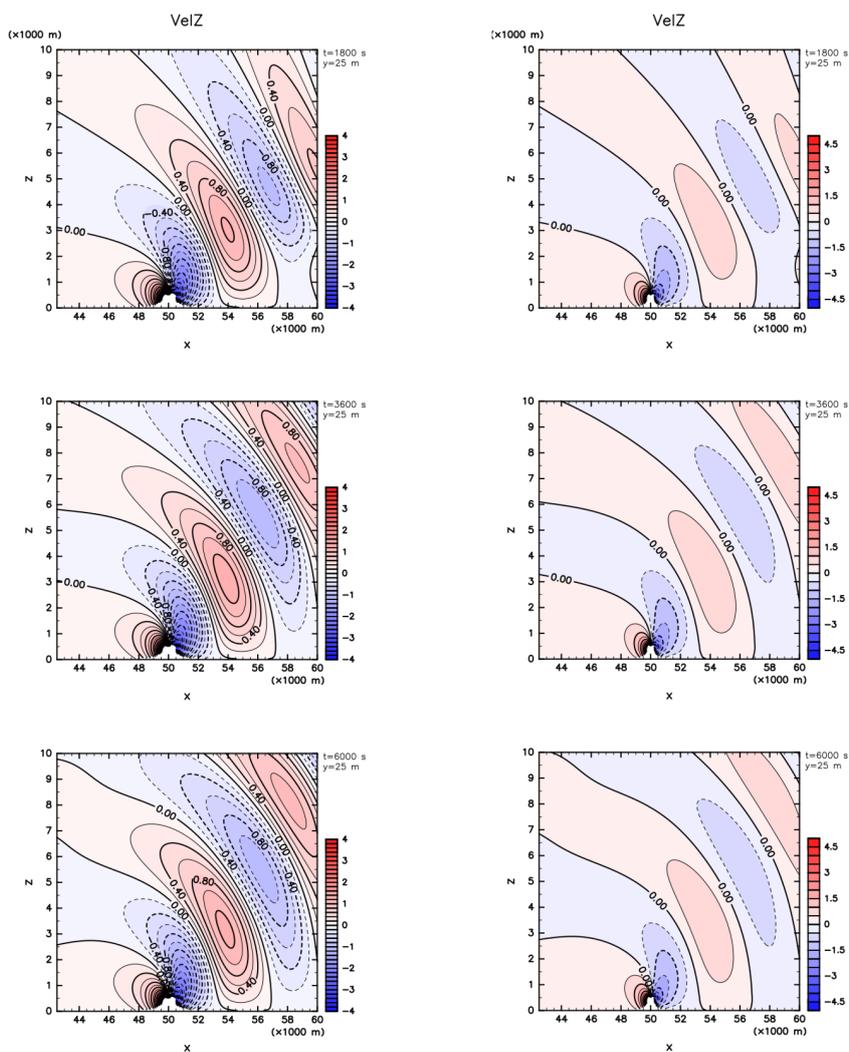


図 B.3: 実験 D1(左列) と実験 D2(右列) における鉛直速度分布の時間変化. 時間ステップは各図の右上に示している.

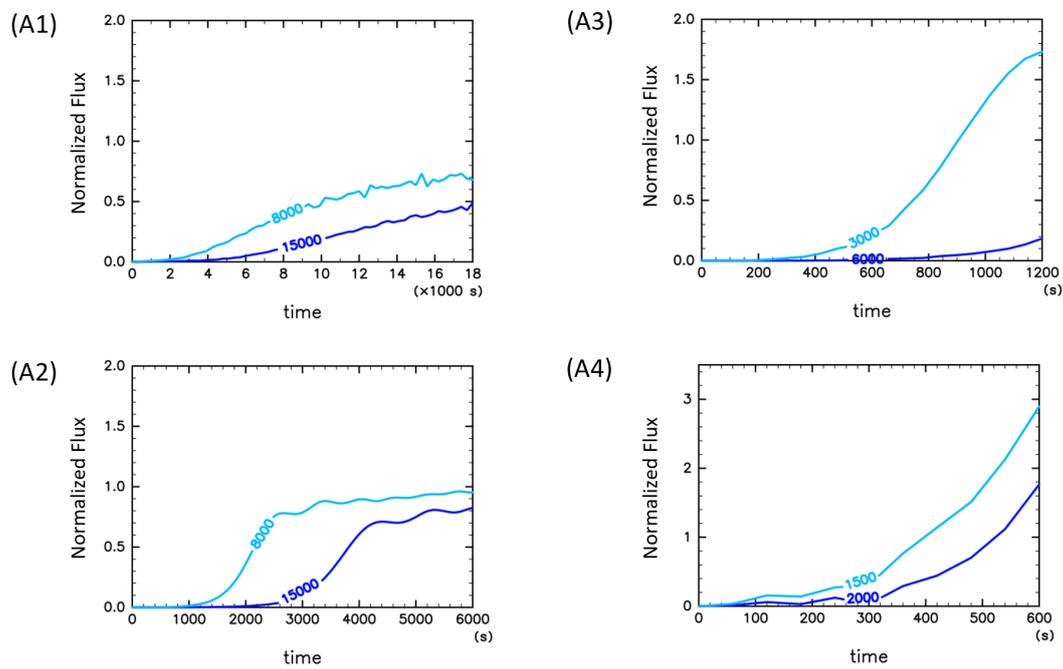


図 B.4: 実験 A における運動量フラックスの時間変化. 縦軸は規格化された運動量フラックスの値, 横軸は時間である. それぞれの実験において 2 つの高度における運動量フラックスの時間変化を示しており, 線のラベルは高度 [m] を表す.

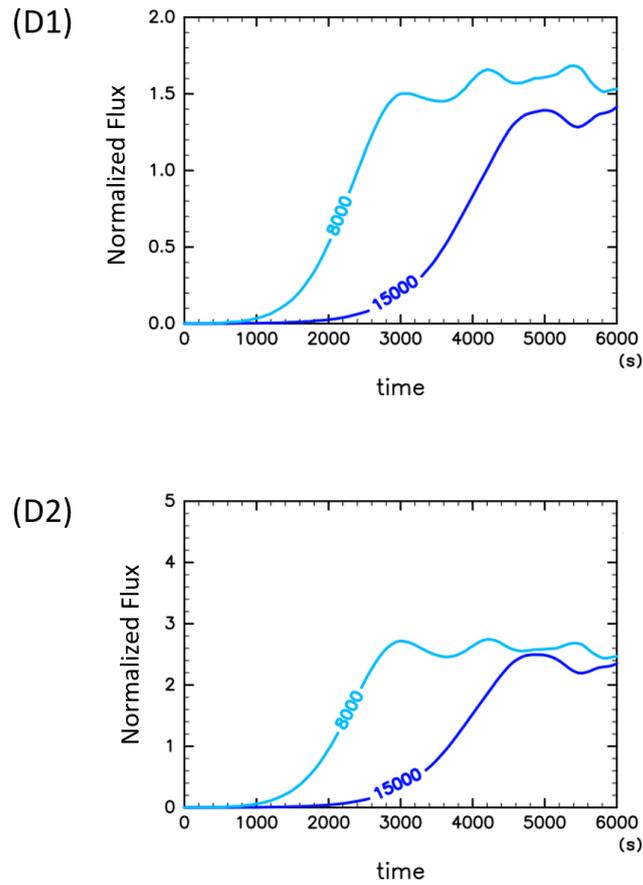


図 B.5: 実験 B における運動量フラックスの時間変化. 縦軸は規格化された運動量フラックスの値, 横軸は時間である. それぞれの実験において 2 つの高度における運動量フラックスの時間変化を示しており, 線のラベルは高度 [m] を表す.

付録 C CReSS と SCALE による 実験

Satomura et al. (2003) の相互比較実験における実験 A1 について, 辻野智紀氏から提供していただいた CReSS を用いた実験の結果, 河合佑太氏から提供していただいた SCALE (Nishizawa et al., 2015) を用いた実験の結果を掲載する.

表 C.1 と表 C.2 に実験設定を示す. 数値積分方法は SCALE の実験 S4_A1 では HE-VI 法を用いており, それ以外の CReSS と SCALE を用いた実験は HE-VE 法を用いている. 数値フィルタは四階微分のものを用いている. またモデル上端から 5 km までの範囲にスポンジ層が設置されており, 時定数は最上層で 10 秒としている.

Satomura et al. (2003) における実験 A1 の CReSS の結果が他のモデルの結果と比較して振幅が小さく, 波の構造が異なっていることの原因として, 数値計算の水平解像度と人工的な数値粘性項の粘性係数の値の設定によっている可能性が示唆された. また, 実験 S3_A1, S4_A1 より, 結果は積分方法によらないことがわかった. (図 C.4)

表 C.1: CReSS の実験の設定

	a (m)	L, H (km)	$\Delta x, \Delta z$ (m)	$\Delta t, \Delta \tau$ (s)	積分時間 (s)	数値粘性 γ
C1_A1	5000	200, 20	1000, 250	1.0, 0.05	18000	10^{-4}
C2_A1	5000	200, 20	1000, 250	1.0, 0.05	18000	10^{-3}
C3_A1	5000	200, 20	1000, 250	1.0, 0.05	18000	10^{-4}

表 C.2: SCALE の実験の設定

	a (m)	L, H (km)	$\Delta x, \Delta z$ (m)	Δt	積分時間 (s)	数値粘性 γ	数値積分法
S1_A1	5000	200, 20	1000, 250	0.6	18000	0	HE-VE
S2_A1	5000	200, 20	1000, 250	0.6	18000	10^{-3}	HE-VE
S3_A1	5000	200, 20	250, 100	0.6	18000	0	HE-VE
S4_A1	5000	200, 20	250, 100	0.6	18000	0	HE-VI

人工的な数値粘性の考え方

CReSSにおいて移流項は二次または四次の中心差分によって表現されており、計算不安定を起こさないようにするため人工的な粘性項が付加されている。その理由は以下の通りである。

一次元の線形波動方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (c > 0) \quad (\text{C.1})$$

を次のような方法で離散化する。なお、ここで半格子ずれた格子配置は考えていない。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^t}{\Delta t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+\Delta x}^t - u_{i-\Delta x}^t}{2\Delta t} \quad (\text{C.2})$$

すると、(C.1)は

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t - \frac{c}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_{i+\Delta x}^t - u_{i-\Delta x}^t) \quad (\text{C.3})$$

となり、時刻 t の値を用いて時刻 $t + \Delta t$ の値が求められる。しかし、この計算を実行するとき、CFL条件を満たすように $\Delta t, \Delta x$ の関係を決めたとしてもこの計算は破綻してしまう。

次に、他の離散化の方法として安定に計算できる一次の風上差分を考える。(C.1)に適用すると、

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i - c \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_i^t - u_{i-\Delta x}^t) \quad (\text{C.4})$$

であるが, これを (C.3) と似た形式になるように変形すると,

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i - \frac{c}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_i^t - u_{i-\Delta x}^t) + \frac{c}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (u_i^t - 2u_i^t - u_{i-\Delta x}^t) \quad (\text{C.5})$$

となる. 付加されている項は空間の二階微分 $\partial^2 u / \partial x^2$ の差分近似であり, 拡散的に働く. この理由から一次の風上差分は安定に計算できるが, 中心差分を用いる場合は, (C.5) で現れる拡散項を人工的な粘性項として移流項に付加して計算を安定化させる.

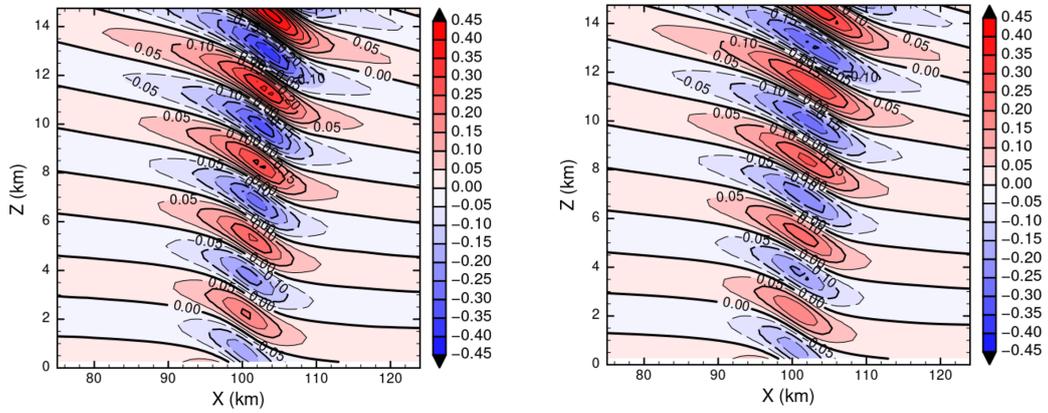


図 C.1: 実験 C1_A1(左図) と C2_A1(右図) で得られた鉛直速度分布. 数値フィルタを大きくすると振幅が $0.05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ほど小さくなっている.

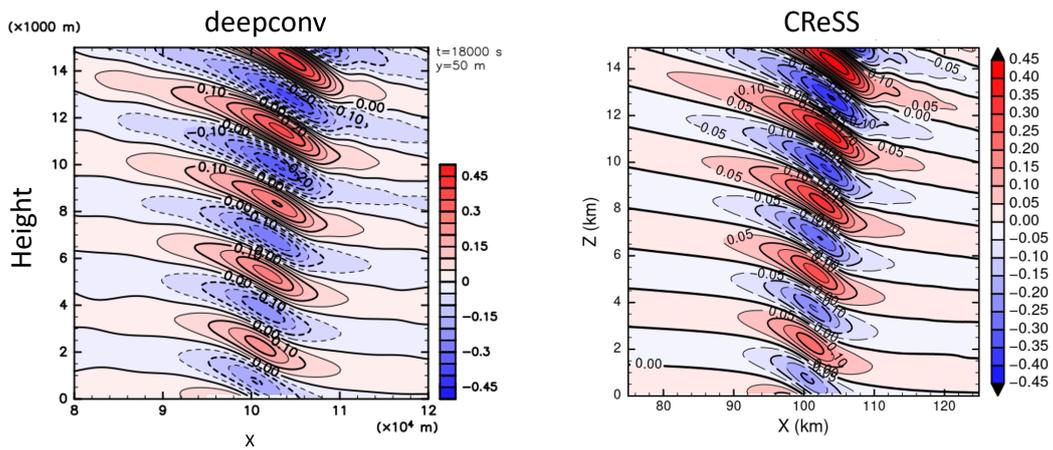


図 C.2: deepconv を用いて行った実験 A1(左図) と CReSS を用いて行った実験 C3_A1(右図) で得られた鉛直速度分布.

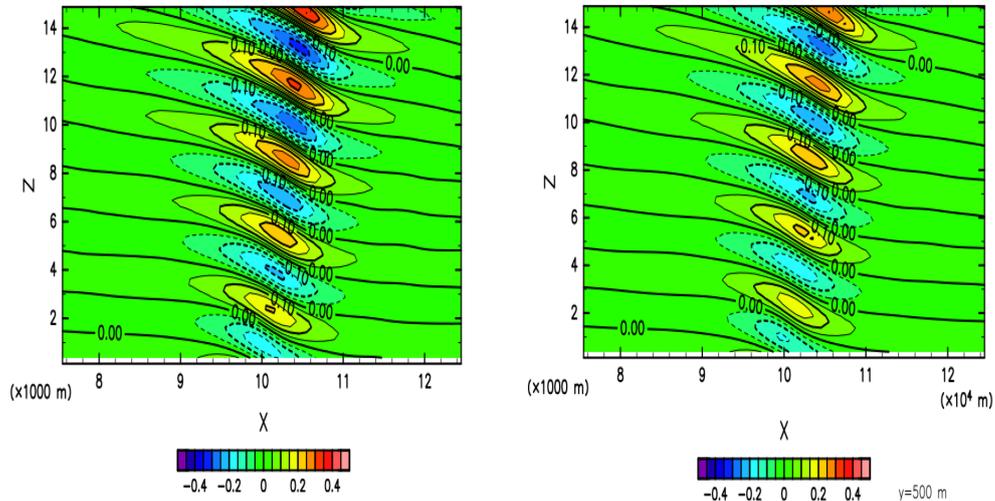


図 C.3: 実験 S1_A1(左図) と S2_A1(右図) で得られた鉛直速度分布. 数値フィルタを大きくすると振幅が $0.05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ほど小さくなっている.

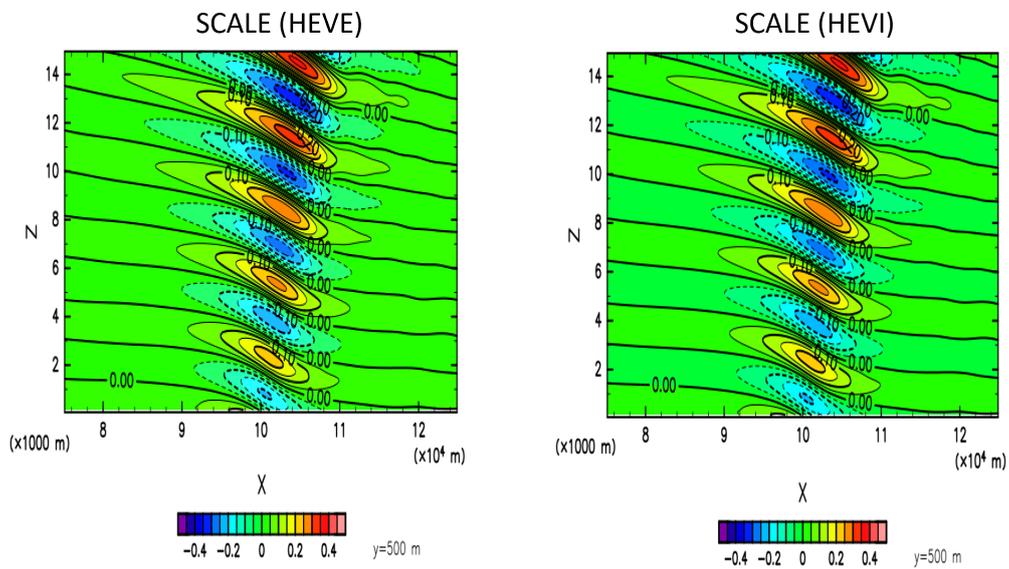


図 C.4: 実験 S3_A1(左図) と S3_A1(右図) で得られた鉛直速度分布.

付録 D 追加実験

積分時間の延長

実験 A3 と実験 A4 の積分時間を延長した実験の結果を図 D1, D2 に示す. Satomura et al., (2003) で行われた実験よりも積分時間を延長すると, 運動量フラックスの大きさは高さに対して一定の値により近づくことが確認された.

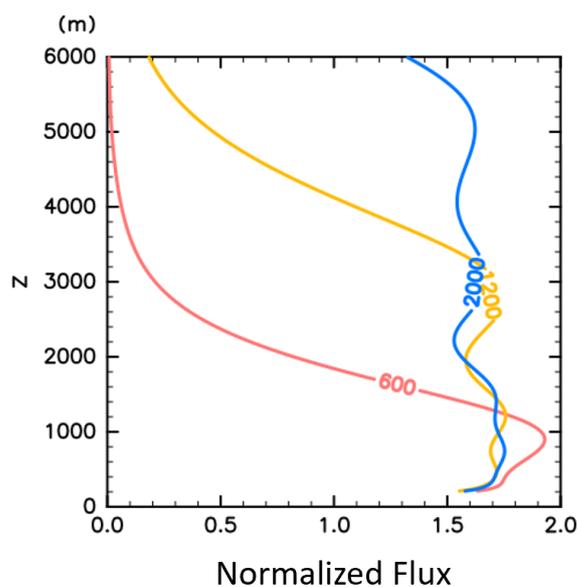


図 D.1: Satomura et al. (2003) の実験 A3 の線形解析解で規格化された運動量フラックス. 実験設定は同じで積分時間を 2000 秒まで延長した場合. 線のラベルは時刻を示す.

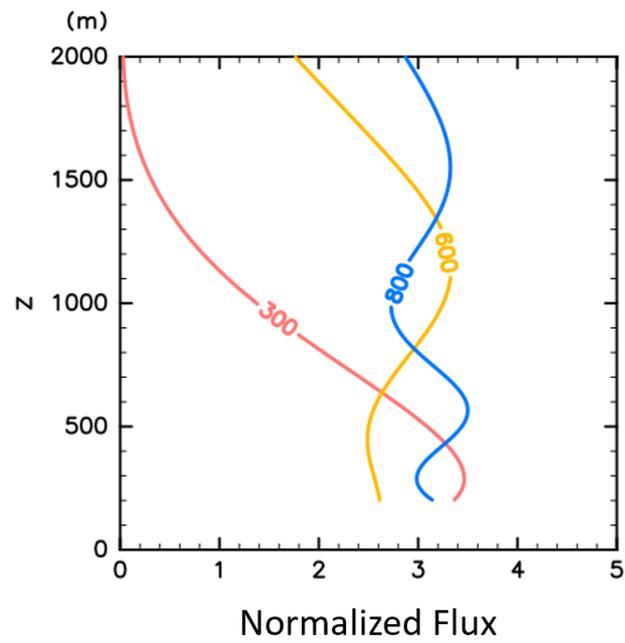


図 D.2: Satomura et al. (2003) の実験 A4 の線形解析解で規格化された運動量フラックス. 実験設定は同じで積分時間を 800 秒まで延長した場合. 線のラベルは時刻を示す.

山の高さの変更

実験 A3 と実験 A4 の山の高さを 10 m とした場合の実験の結果を図 D3, D4 に示す. 山の高さを低くすると, 線形解析解で規格化された運動量フラックスの値は 1 に近づくことが確認された.

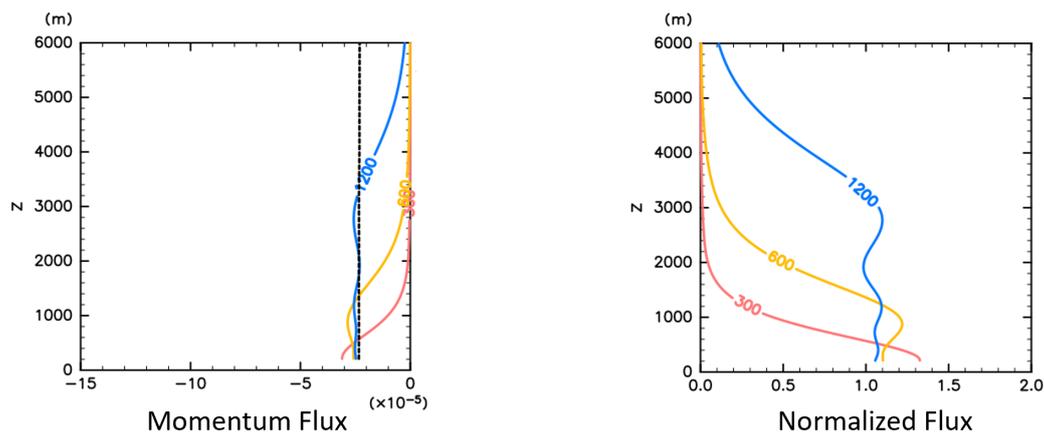


図 D.3: Satomura et al. (2003) の実験 A3 において山の高さを 10 m とし, その他の実験設定は同じとした場合. 運動量フラックスの絶対値と解析解で規格化された運動量フラックス.

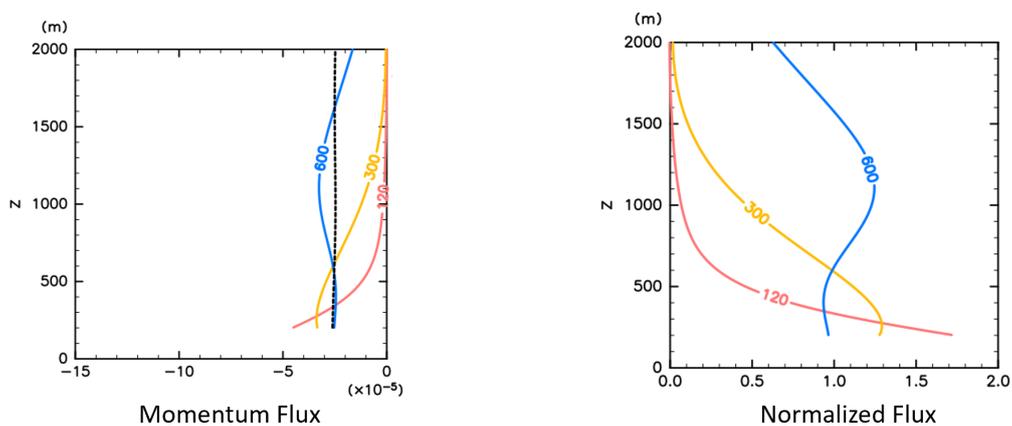


図 D.4: Satomura et al. (2003) の実験 A4 において山の高さを 10 m とし, その他の実験設定は同じとした場合. 運動量フラックスの絶対値と解析解で規格化された運動量フラックス.

付録 E 変数・定数リスト

本文中の変数・定数についてまとめる。定数については数値計算や解析で用いた値を示す。

記号	意味	値
u	: x 方向の速度	
v	: y 方向の速度	
w	: z 方向の速度	
b	: 浮力	
ϕ	: 密度で割った圧力	
π	: 無次元圧力 (エクスナー関数)	
θ	: 温位	
ρ	: 密度	
T	: 温度	
p	: 圧力	
ρ_0	: 基準密度	
T_0	: 基準温度	
p_0	: 基準気圧	965 [hPa]
c_{vd}	: 単位質量あたりの乾燥大気の定積比熱	742.8 [J · K · kg ⁻¹]
c_{pd}	: 単位質量あたりの乾燥大気の定圧比熱	1039.6 [J · K · kg ⁻¹]
R_d	: 単位質量あたりの乾燥大気の気体定数	296.7 [J · K ⁻¹ · kg ⁻¹]
g	: 重力加速度	9.8 [m · s ⁻²]
c_s	: 音速	
H	: スケールハイト	

温位 θ , 無次元圧力 π , 音速 c_s , スケールハイト H は次のように定義される。

- 温位

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_{p_d}}}$$

- 無次元圧力

$$\pi \equiv \frac{T}{\theta} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R_d/c_{p_d}}$$

- 音速

$$c_s^2 \equiv \frac{c_{p_d}}{c_{v_d}} R_d T$$

- スケールハイト

$$H \equiv \frac{R_d T}{g}$$

謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方々にご協力いただきました。指導教官である林祥介教授には研究発表の場などで、実験結果に対する考察や研究方針などに様々なコメントを頂きました。高橋芳幸准教授には、ご多忙にもかかわらず、研究の相談に多くの時間を割いていただき、モデルの概要や使い方、また計算結果の見方など基本的なことからとても丁寧に教えていただきました。樫村博基講師には、研究発表の場で実験結果の考察や発表資料の構成について貴重なコメントをいただきました。また、松江工業高等専門学校の杉山耕一郎准教授には、雲解像モデル `deepconv` を使用していく中で、行き詰ったときには助言をいただきました。2019 年度で修了された藤林凜氏には、日頃の研究室の活動をはじめとして様々な面でお世話になり、また計算機の利用や管理に関して多くの知識を教えていただきました。また、辻野智紀氏と河合佑太氏には `CReSS` と `SCALE` による実験結果を提供していただきました。地球および惑星大気研究室の関係者の皆様にも大変お世話になりました。この場で改めて感謝申し上げます。

なお、本研究を進めるにあたり、地球流体電脳倶楽部 `deepconv` プロジェクトの `arare6`, `Ruby` プロジェクトの `GPhys` を使用させて頂きました。

参考文献

- [1] Doyle, J. D., Sasa, G., Qingfang, J., Ligia, B., John, M. B., Andreas D., Elmar, F., Vanda, G., Daniel, J. K., Oswald, K., Steven, K., Juerg, S., Ivana, S., Simon, V., and Shiyuan, Z., An intercomparison of T-REX mountain-wave simulations and implications for mesoscale predictability, *Mon. Weather Rev.*, 139, 2811-2831, 2011.
- [2] Nishizawa, S., Yashiro, H., Sato, Y., Miyamoto, Y., and Tomita, H., Influence of grid aspect ratio on planetary boundary layer turbulence in large-eddy simulations, *Geosci. Model Dev.*, 8, 3393-3419.
- [3] Satomura, T., T. Iwasaki, K. Saito, C. Muroi, and K. Tsuboki, Accuracy of Terrain Following Coordinates over Isolated Mountain: Steep Mountain Model Intercomparison Project (St-MIP), *Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ.*, 46B, 337-346, 2003.
- [4] Satomura, T., Compressible flow simulations on Numerically Generated grids, *J. Meteor. Soc. Japan*, 67, 473-482, 1989.
- [5] Sugiyama, K., K. Nakajima, M. Odaka, K. Kuramoto, and Y.-Y. Hayashi, Numerical simulations of Jupiter's moist convection layer: Structure and dynamics in statistically steady states, *Icarus*, 229, 71-91, 2014.
- [6] Lindzen, R. S., Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal break down, *J. Geophys. Res.* 86, 9707-9714, 1981.
- [7] Vallis, G. K., *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* 2nd ed., Cambridge University Press, 2017.
- [8] 佐藤薫, 1999: 中層大気重力波の研究-1998年度日本気象学会賞受賞記念講演-, 天気 46, 803-818.
- [9] 杉山耕一郎, 小高正嗣, 山下達也, 中島健介, 林祥介, 2012: 非静力学モデル deepconv の定式化. https://www.gfd-dennou.org/library/deepconv/arare5/arare5_current/doc/dai1bu/pub/teishiki.pdf, 地球流体電脳倶楽部.

-
- [10] 杉山耕一郎, 小高正嗣, 山下達也, 中島健介, 林祥介, 2012: 非静力学モデル deepconv の離散化. https://www.gfd-dennou.org/library/deepconv/arare5/arare5_current/doc/dai2bu/pub/main.pdf, 地球流体電脳倶楽部.
- [11] 堀口郁夫, 小林哲夫, 塚本修, 大槻恭一 編著 2004 「局地気象学」森北出版株式会社.
- [12] 山下達也, 2008: 吉崎正憲 (1999) 地形に沿う座標系における方程式系の読書ノート.
https://www.gfd-dennou.org/GFD_Dennou_Club/dc-arch/deepconv/Clipboard/2008-02-07_yamasita_terrain-following-coordinate/pub/terrain-following-coordinate.pdf
- [13] 坪木和久, 榊原篤志, 2000: CReSS ユーザーズマニュアル第二版.
http://www.rain.hyarc.nagoya-u.ac.jp/~tsuboki/cress_html/guide_jpn/cress_guide1.4_jpn.pdf