

博 士 論 文

2次元非圧縮順圧流体中の非一様楕円渦の  
軸対称化過程に関する数値実験的研究

平成 23 年 1 月

神戸大学大学院自然科学研究科

村上 真也



# 要旨

2次元非圧縮順圧流体において、渦の中心から離れるに従い渦度が減少するような非一様な渦度分布を持つ、孤立した楕円渦の軸対称化過程の再考察を行った。このような楕円渦は回転しながらフィラメントを放出し、同時に楕円渦のアスペクト比が減少することが知られている。Melander, *et al.*(1987) は、定性的な考察によって、フィラメントが作り出す楕円渦の長軸および短軸についての鏡像非対称な渦度分布が楕円渦の軸対称化を引き起こすと主張した。しかしながら、フィラメントがどれほど軸対称化に寄与するかを定量的に検討しておらず、また、軸対称化は長軸の長さが増えるために起こるのか、短軸の長さが増えるために起こるのか、といった詳細もこれまで調べられていない。それに加えて、フィラメントのどの部分が軸対称化に効いているのかといった議論も行われていない。そこで、本研究ではフィラメントがどのくらい軸対称化に寄与しているかを数値的に調べ、Melander, *et al.*(1987) の結果を定量的に検討した。

まず、渦度場からフィラメントを含む周辺領域とコア領域を定義し、それぞれの領域が軸対称化に及ぼす影響を調べた。渦度場から周辺領域を定義する方法は、複数の方法を検討した結果、渦度のしきい値を設ける方法を用いた。軸対称化を表す物理量として、一つ目には Melander, *et al.*(1987) が導入した、楕円形をした渦度コンターとその渦度コンターの近傍の流れ関数コンターの傾きの差  $\phi_d$  を用いた。この  $\phi_d$  の符号は楕円渦を軸対称化するような速度場と反軸対称化するような速度場に一対一に対応することが、Melander, *et al.*(1987) によって指摘されている。 $\phi_d$  に対する周辺領域とコア領域の渦度の影響を調べた結果、領域の境界に位置する渦度コンターについては、コア領域の渦度は  $\phi_d$  に対してほとんど寄与しないことが分かった。一方で、コア領域の比較的 inner の渦度コンターについては、 $\phi_d$  に対してコア領域も周辺領域も同じくらいの角度差を与えていた。従って、少なくともコアの比較的 outer の渦度コンターについては、周辺領域が軸対称化に寄与したと言える。

$\phi_d$  の次に軸対称化を表す物理量として注目したのは楕円形をした渦度コンターの長半

径と短半径の時間発展である。長半径と短半径の時間変化は、楕円の曲率最大点と曲率最小点での中心方向の速度によって見積もることができる。もし楕円形をした渦度コンターが囲む面積を保存しながらアスペクト比を減らすならば、長半径の時間変化率の大きさは短半径の時間変化率の大きさより大きくなければならないが、実際の渦度コンターの時間発展は、この拘束条件をよく満たしていることが分かった。長半径と短半径の時間発展に対する周辺領域とコア領域の渦度の影響を調べた結果、特に長半径の変化量に対して、コア領域内のどの渦度コンターに注目するかに関わらず、周辺領域の渦度はコア領域に比べて軸対称化に大きく寄与したことが分かった。

これまでの方法では、フィラメントのどの部分がどのくらい軸対称化に影響するのかは分からなかった。そこで、渦度場中の一点が渦度コンターの曲率最大点と曲率最小点に誘導する速度を計算することで、渦度場のどの部分がどのくらい軸対称化に影響するかを調べた。その結果、曲率最大の点においては、曲率最大の点に近く、渦度が大きいフィラメントの根本と曲率最大点の位置関係が、渦度コンターを軸対称化するかどうかを決定していることが分かった。例えば、注目した渦度コンターとともに回転する回転系に乗って見たとき、初期に急速な軸対称化が起こることはフィラメントの根本が楕円形をした渦度コンターの長軸の、渦の中心から外側に向かって右手に存在することに対応する。一方でその急速な軸対称化が止まることは、フィラメントの根本の一部が渦度コンターの長軸の左手側に引き込まれることに対応する。このフィラメントの根本の引き込みは、楕円形をした渦度コンターとともに回転する回転系から流れ場を観察したときの淀み点の位置の時間変化によって決まっていると考えられる。また、渦度コンターの楕円の短半径の時間変化率が長半径の時間変化率に比べて小さいことは、楕円の曲率最大点は曲率最小点に比べてフィラメントの根本に近いこと、楕円の曲率最大点は2つのフィラメントの根本からの距離が大きく異なるため、一方のフィラメントの根本から大きく影響を受けるが、曲率最小点は2つのフィラメントの根本からの距離が同じくらいであるため、両方のフィラメントの根本からの影響がキャンセルすることによって説明できる。

# 目次

第1章	導入	1
第2章	過去の研究のレビュー	5
2.1	一様渦領域の振舞い	5
2.1.1	円形渦	5
2.1.2	Kirchhoff の楕円渦	6
2.2	非一様渦領域の振舞い	7
2.3	渦度場と流れ関数の関係: 軸対称化原理	7
2.3.1	軸対称化する速度場の特徴付け	8
2.3.2	$\phi_d$ の符号はどのようにして決まるか	9
2.4	淀み点とフィラメント放出の関係	11
2.5	まとめ	13
第3章	数値実験の概要と予備的な結果	15
3.1	支配方程式と初期条件, 境界条件	15
3.2	楕円へのフィッティング	17
3.3	統計量の時間変化	19

3.4	軸対称化のようす	19
3.4.1	コンパクトサポートの場合	20
3.4.2	ガウス分布の場合	24
3.4.3	不連続な渦度分布の場合	26
第4章	楕円渦の軸対称化に対するフィラメントの役割	31
4.1	渦のコア領域と周辺領域の決定方法	31
4.1.1	分類方法の候補とその定義	31
4.1.2	領域分類の結果	33
	渦度のしきい値を用いた方法	33
	Okubo-Weiss の基準を用いた方法	34
	Hua-Klein の基準を用いた方法	35
4.1.3	結論	35
4.2	渦のコア領域と周辺領域の統計量	37
4.3	軸対称化過程におけるフィラメントの役割: 角度差に対する影響	38
4.3.1	解析方法	38
4.3.2	結果	39
4.3.3	結論	42
4.4	渦度コンターの変形に対するフィラメントの影響	43
4.4.1	楕円形の変形	43
4.4.2	渦度コンターの曲率最大点および最小点における速度ベクトルの 動径成分	44

結果	45
4.4.3 渦度コンターの曲率最大点および最小点の, 初期位置からの動径変位	46
結果	46
4.5 非対称成分の速度ベクトルの内向き成分への寄与: 直接計算	50
4.6 軸対称化に対するフィラメントの影響のパラメータ依存性	54
第 5 章 まとめ	55
謝辞	57
付録 A 楕円への当てはめ	59
A.1 楕円の正準形と 2 次曲線	59
A.1.1 座標系	59
A.1.2 X 座標系から X' 座標系へ	60
A.1.3 X' 座標系から X'' 座標系へ	61
A.2 楕円へのフィッティング	62
付録 B コンターの角度差と曲率最大点および最小点での速度の動径成分の関係	65
付録 C 楕円から楕円への変形	69
付録 D 様々なパラメータでの実験結果の一覧	73
付録 E Kirchhoff の楕円渦に関する研究のレビュー	91
E.1 問題設定	91
E.2 楕円座標系を用いた解法	92

---

E.2.1	外部領域 . . . . .	92
	外部領域で課す条件 . . . . .	93
E.2.2	内部領域 . . . . .	95
	内部領域で課す条件 . . . . .	95
E.2.3	内部領域と外部領域の接続 . . . . .	97
E.3	回転角速度 . . . . .	101
E.4	線形安定性 . . . . .	101
E.4.1	速度ベクトルが連続であることを要請 . . . . .	102
E.4.2	境界における圧力の連続性 . . . . .	109
E.4.3	解と分散関係 . . . . .	114
E.4.4	分散曲線 . . . . .	115
E.5	淀み点とフィラメント形成 . . . . .	115
E.6	円形渦との関係 . . . . .	119
E.6.1	円形渦の定常解 . . . . .	119
E.6.2	円形渦の線形安定性 . . . . .	121
E.7	楕円座標系 . . . . .	125
E.7.1	基底の微分 . . . . .	127
	参考文献	129



# 目次

1.1	2次元乱流に見られる渦. 実空間における渦度場を示した. . . . .	2
2.1	渦度コンター (黒の破線) と流れ関数コンター (赤の破線) の関係. 黒い実線は, 渦度コンターの曲率最大点と最小点における速度ベクトルと, その動径方向への射影を表す. ここでは正の渦度を持つ楕円渦の場合の速度ベクトルを示している. . . . .	9
2.2	$\phi_d$ が非ゼロになる様子を表す模式図. 上の段は, 楕円形をした渦度コンターの長軸と短軸について鏡像対称な渦度分布と, それに対応する流れ関数コンターを表しており, 渦度場が鏡像対称ならば, 流れ関数場も鏡像対称になることを示している. 下の段は, 渦度分布が鏡像非対称成分を持つときに対応する流れ関数コンターを表しており, 渦度場に鏡像非対称成分が含まれていれば, 流れ関数コンターの楕円は傾く, すなわち $\phi_d \neq 0$ となることを示している. . . . .	10
2.3	楕円渦の時間発展における渦度場. Melander, <i>et al.</i> (1987) Fig.8 より抜粋.	11
2.4	楕円渦と共に回転する回転系に乗って見た流れ関数場 (実線) と渦度場 (点線) を表した模式図. $A_1, A_2$ が鞍点を, $B_1, B_2$ が回転系に乗って見ることによって生じる “ghost vortex” の中心を, $C$ が楕円渦の中心を表す. また, $i_1, i_2, o_1, o_2$ はそれぞれ内側と外側のセパトリクスを表す. Melander, <i>et al.</i> (1987) Fig.7 より. . . . .	12

3.1	フィッティングの例. 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. (左) $t = 2.0$ での $\omega = 6$ の渦度コンターのフィッティングの例. 点は渦度場から求めた点列を表し, 破線はフィッティングで得られた楕円を表す. 入力点数 $n$ は $n = 1588$ である. (右) $t = 4.0$ での $\omega = 6$ の渦度コンターのフィッティングの例. 入力点数は $n = 1600$ である. . . . .	18
3.2	楕円へのフィッティングの平均二乗残差の時系列. コンパクトサポートで初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	18
3.3	エネルギー (左上), エンストロフィー (右上), 循環 (左下), 渦領域の面積 (右下) の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	20
3.4	渦度場の時間発展. コンパクトサポートで初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	21
3.5	アスペクト比の時間発展. 実線は渦度コンターの楕円のアスペクト比の時間発展を, 破線は流れ関数コンターの楕円のアスペクト比の時間発展を示す. それぞれ, 渦度コンターと対応する近傍の流れ関数コンターは同じ色にしてある. . . . .	22
3.6	アスペクト比の時間微分と角度差の積の時間発展. $\omega = 6$ のコンターについての結果. . . . .	22
3.7	アスペクト比の時間微分と角度差の時間発展. $\omega = 6$ のコンターについての結果. . . . .	23
3.8	初期アスペクト比 $\sqrt{10}$ のコンパクトサポートの場合に, $\omega = 6$ の渦度コンターの楕円の回転角速度で回転する回転系に乗って見た流れ関数 (黒実線) と渦度 (赤実線). . . . .	24
3.9	$\omega = 6, 7, 8$ の渦度コンターの楕円の回転角速度 (実線) と流れ関数コンターの楕円の回転角速度 (破線). 初期アスペクト比 $\sqrt{10}$ のコンパクトサポートの場合. . . . .	25
3.10	渦度場の時間発展. ガウス分布で初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	25
3.11	アスペクト比の時間発展. ガウス分布で初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	26

3.12	$\omega = 6$ の渦度コンターのアスペクト比の時間微分と角度差の時間発展. ガウス分布で初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	27
3.13	渦度場の時間発展. 不連続な渦度分布で初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	28
3.14	アスペクト比の時間発展. 不連続な渦度分布で初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	28
3.15	$\omega = 8$ の渦度コンターのアスペクト比の時間微分と角度差の時間発展. 不連続な渦度分布で初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. . . . .	29
4.1	渦度のしきい値を用いて分類されたコア領域の渦度場 (左) と周辺領域の 渦度場 (右). 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 渦度のしきい値を $\omega_{\text{thr}} = 6$ とした場合. . . . .	34
4.2	Okubo-Weiss の基準を使って分類されたコア領域の渦度場 (左) と周辺 領域の渦度場 (右). . . . .	34
4.3	Hua-Klein の基準を用いて分類されたコア領域の渦度場 (左) と周辺領域 の渦度場 (右). . . . .	35
4.4	エネルギー (左上), エンストロフィー (右上), 循環 (左下), 渦領域の面積 (右下) の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 初期アスペク ト比が $\sqrt{10}$ の場合. 点線が渦領域全体での量を, 実線がコア領域での量 を, 破線が周辺領域での量を表す. . . . .	37
4.5	$\phi_d$ と $\phi'_d$ を計算する手順を表す模式図. . . . .	39
4.6	楕円の傾きの差の時系列 ( $\phi_d = \phi_\omega - \phi_\psi$ ). 初期渦度分布がコンパクトサ ポートで, 初期アスペクト比が $\sqrt{10}$ の場合. 渦度のしきい値を $\omega_{\text{thr}} = 6$ として領域を分類し, $\omega = 6$ の渦度コンターに注目した場合. . . . .	40
4.7	楕円の傾きの差の時系列 ( $\phi_d = \phi_\omega - \phi_\psi$ ). 渦度のしきい値を $\omega_{\text{thr}} = 6$ として, $\omega = 7$ の渦度コンターに注目した場合 (左) と, $\omega = 8$ の渦度コン ターに注目した場合 (右). . . . .	41

4.8	注目する渦度コンター $\omega$ (赤実線) と, 領域を分類するための渦度のしきい値 $\omega_{\text{thr}}$ (黒破線) が異なるとき, 楕円渦が差動回転することによって現れる効果を表した模式図. 赤の点線は注目する渦度コンターの軸を表す. (左) コア領域 (灰色で塗った領域) と注目する渦度コンターの位置関係. コア領域の渦度場 $\omega_c$ は, 角度差が $\phi_d > 0$ となるような鏡像非対称成分を持つことを示している. (右) 周辺領域 (灰色で塗った領域) と注目する渦度コンターの位置関係. 周辺領域の渦度場 $\omega_s$ は, 角度差が $\phi_d < 0$ となるような鏡像非対称成分を持つことを示している. . . . .	42
4.9	(左) $\omega = 6$ の楕円の曲率最大点における速度ベクトルの動径成分とその見積り. raw が実測値, est が見積もりを表す. 速度の大きさ $ \mathbf{u}(\mathbf{x}_{\text{max}}) $ で規格化している. (右) $\omega = 6$ の楕円の曲率最小点における速度ベクトルの動径成分とその見積り. 速度の大きさ $ \mathbf{u}(\mathbf{x}_{\text{min}}) $ で規格化している. . . . .	45
4.10	楕円の動径方向の変位を表す模式図. . . . .	46
4.11	長半径の初期値からの変化 (破線) と, それを速度の時間積分で見積もった場合 (実線) の時間発展 (左). . . . .	47
4.12	短半径の初期値からの変化 (破線) と, それを速度の時間積分で見積もった場合 (実線) の時間発展. . . . .	48
4.13	長半径の初期値からの時間変化に対する周辺領域とコア領域による寄与. しきい値を $\omega_{\text{thr}} = 6$ とした場合. . . . .	48
4.14	短半径の初期値からの時間変化に対する周辺領域とコア領域による寄与. しきい値を $\omega_{\text{thr}} = 6$ とした場合. . . . .	49
4.15	(左) 渦度コンター $\omega = 6$ の楕円についての渦度場の鏡像対称成分. (右) 鏡像非対称成分. . . . .	51
4.16	渦度コンター $\omega = 6$ の楕円についての渦度場の鏡像非対称成分 $\omega_{a2}(x, y)$ の曲率最大点の動径速度に対する寄与 . . . . .	52
4.17	渦度コンター $\omega = 6$ の楕円についての渦度場の鏡像非対称成分 $\omega_{a2}(x, y)$ の曲率最小点の動径速度に対する寄与 . . . . .	53
A.1	$X$ 座標系, $X'$ 座標系, $X''$ 座標系の関係. . . . .	60

D.1	渦度場の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	74
D.2	渦度場の時間発展. 初期渦度分布がガウス分布で初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	75
D.3	渦度場の時間発展. 初期渦度分布が不連続な渦度分布で初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	76
D.4	アスペクト比の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	77
D.5	アスペクト比の時間発展. 初期渦度分布がガウス分布で初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	78
D.6	アスペクト比の時間発展. 初期渦度分布が不連続な渦度分布で初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	79
D.7	コア領域 (左列) と周辺領域 (右列) の渦度場の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	80
D.8	コア領域 (左列) と周辺領域 (右列) の渦度場の時間発展. 初期渦度分布がガウス分布で初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	81
D.9	コア領域 (左列) と周辺領域 (右列) の渦度場の時間発展. 初期渦度分布が不連続な渦度分布で初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. . . . .	82
D.10	$\phi_d$ に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はコンパクトサポート, 初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. (上段) $\omega = 6$ のコンターに注目した場合. (下段) $\omega = 8$ のコンターに注目した場合. . . . .	83
D.11	$\phi_d$ に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はガウス分布, 初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. (上段) $\omega = 6$ のコンターに注目した場合. (下段) $\omega = 8$ のコンターに注目した場合. . . . .	83
D.12	$\phi_d$ に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布は不連続な渦度分布, 初期アスペクト比 $1.5, \sqrt{10}, 6$ の場合. (上段) $\omega = 7$ のコンターに注目した場合. (下段) $\omega = 9$ のコンターに注目した場合. . . . .	84

- D.13 曲率最大点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はコンパクトサポート, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合. . . . . 85
- D.14 曲率最大点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はガウス分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合. . . . . 85
- D.15 曲率最大点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布は不連続な渦度分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 7$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 9$  のコンターに注目した場合. . . . . 86
- D.16 曲率最小点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はコンパクトサポート, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合. . . . . 86
- D.17 曲率最小点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はガウス分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合. . . . . 87
- D.18 曲率最小点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布は不連続な渦度分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 7$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 9$  のコンターに注目した場合. . . . . 87

- D.19 曲率最大点と曲率最小点に誘導される動径速度に対する楕円の長軸と短軸に関して鏡像非対称な渦度場の寄与. 初期渦度分布がコンパクトサポートの場合. (左列) 曲率最大点に誘導される動径速度に対する寄与. (右列) 曲率最小点に誘導される動径速度に対する寄与. (上段) 初期アスペクト比が 1.5 で,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (中段) 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  で,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (下段) 初期アスペクト比が 6 で,  $\omega = 8$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. . . . . 88
- D.20 曲率最大点と曲率最小点に誘導される動径速度に対する楕円の長軸と短軸に関して鏡像非対称な渦度場の寄与. 初期渦度分布がガウス分布の場合. (左列) 曲率最大点に誘導される動径速度に対する寄与. (右列) 曲率最小点に誘導される動径速度に対する寄与. (上段) 初期アスペクト比が 1.5 で,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円に注目した場合.. (中段) 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  で,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (下段) 初期アスペクト比が 6 で,  $\omega = 8$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. 89
- D.21 曲率最大点と曲率最小点に誘導される動径速度に対する楕円の長軸と短軸に関して鏡像非対称な渦度場の寄与. 初期渦度分布が不連続な渦度分布の場合. (左列) 曲率最大点に誘導される動径速度に対する寄与. (右列) 曲率最小点に誘導される動径速度に対する寄与. (上段) 初期アスペクト比が 1.5 で,  $\omega = 8$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (中段) 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  で,  $\omega = 8$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (下段) 初期アスペクト比が 6 で,  $\omega = 9$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. . . . . 90
- E.1 Kirchhoff の楕円渦に与えた擾乱の分散曲線. ただし,  $m$  が整数のところでのみ値を取ることに注意. ここで渦度は  $\omega = 1.0$  とした. . . . . 116
- E.2 Kirchhoff の楕円渦に与えた擾乱の, アスペクト比ごとの成長率, 振動数. 上図で振動数を, 下図で成長率を示した. ここで渦度は  $\omega = 1.0$  とした. . 117
- E.3 楕円座標系 ( $c = \sqrt{0.75}$ ). . . . . 126





# 第 1 章

## 導入

地球の大気・海洋の大規模運動は水平二次元的であり、かつ乱流化している [26]. 水平二次元的な運動は、回転する球面上で運動しているという幾何学的制約と、概ね安定な密度成層をしていることによる。このような地球上の流体の運動の乱流的側面を調べるため、2次元乱流が活発に研究されている [3, 9, 12, 14, 16, 17, 27, 28, 32, 40].

3次元空間における一様等方乱流は、エネルギーもエンストロフィーも小さなスケールに向かって輸送される(ダウンワードカスケード)。2次元乱流は3次元乱流とは異なり、エンストロフィーは小さなスケールに向かって輸送されるが、エネルギーは大きなスケールに向かって輸送される(アップワードカスケード、逆カスケード)という特徴がある。大きなスケールに比べて小さなスケールの方が粘性散逸が効くので、アップワードカスケードによって輸送されたエネルギーによって、大規模な渦が卓越する。乱流は一般に、強制項の有無によって強制乱流と減衰性乱流に分けられ、強制2次元乱流でも減衰性2次元乱流でも、渦運動が卓越するのは同じである。減衰性乱流では特に大規模な渦が卓越し、これは秩序渦と呼ばれている [16].

減衰性2次元乱流中の渦度場は、時間発展にともない局在した多数の渦が見られるようになる(図 1.1)。多数の渦は相互に移流しあって、時おり同符号の渦が合体する。また、シアによって引き伸ばされた渦が速く回転し、円形渦に近づく(軸対称化する)様子が見られる。このような渦の運動を理解することは、2次元乱流の理解に大いに役立つことが期待される。

このうち、渦の合体については Melander, *et al.*(1988) [20], Meunier, *et al.*(2001) [21], Brandt and Nomura(2006) [2] などの研究がある。単一の非円形渦が軸対称化する現象に

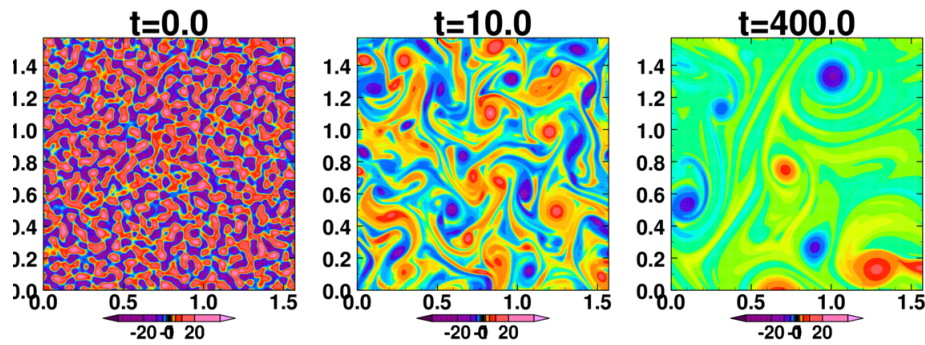


図 1.1 2次元乱流に見られる渦. 実空間における渦度場を示した.

については, Melander, *et al.*(1987) [19], Kimura and Herring(2001) [10], Dritschel(1998) [4] などによる研究がある. 本研究では, 単一の非円形渦が軸対称化する現象について調べる.

Melander, *et al.*(1987) は非一様な渦度分布を持つ楕円渦の軸対称化過程について先駆的な研究を行った. 彼らは渦のコア領域の渦度コンターとその付近の流れ関数コンターはほぼ楕円形をしており, これら二つの楕円の傾きの差  $\phi_d$  の符号が軸対称化するような速度場と非軸対称化するような速度場に対応することを指摘した. また, 回転系に乗って見た流れ関数場を用いてフィラメントの運動を議論し, フィラメントの存在によって傾きの差  $\phi_d$  がどうなるかを議論した.

その後, 渦の軸対称化の研究は, 渦 Rossby 波による研究が多数を占めるようになった [18, 24, 30, 35]. つまり, 円形渦を基本場としてそこに擾乱を加えたとき, その擾乱が渦の周囲に存在する渦度勾配によって Rossby 波として振舞うことから, そのような Rossby 波の性質を用いて渦の軸対称化, すなわち擾乱の減衰あるいは渦の外への伝播を論じるのである. 擾乱の振舞いを波として捉えるのは地球流体力学においては一般的で, 様々な基本場の下での擾乱を線形論の範囲内で統一的に扱うことができる [36]. 渦 Rossby 波は順圧系はもちろん, 浅水系や準地衡流系に対して定式化が行われ [18, 24], 台風における流れを理想化したモデルとして利用されている. しかしながら, 渦 Rossby 波が整備されているのはあくまでも線形論であって, 擾乱の振幅が大きい場合については力不足である. そこで, 本研究では Melander, *et al.*(1987) の議論と結果を定量的に調べ, 渦 Rossby 波とは異なるアプローチで楕円渦の軸対称化を理解することを目的とする.

まず, Melander, *et al.*(1987) では,  $\phi_d$  の符号はフィラメントの分布によって決まると主張しているが, フィラメントが  $\phi_d$  にどのくらい寄与するかを定量的には調べていない. また,  $\phi_d$  と実際の渦度コンター上の速度場との関連についても定量的には述べていない.

フィラメントは実際には軸対称化にどのくらい寄与するのだろうか、という疑問が自然に浮かぶ。そこで、渦度場をコアを主に含む領域とフィラメントを主に含む領域とに分割し、軸対称化に対するそれぞれの影響の大きさを調べた。軸対称化に対する影響の調べ方としては、楕円渦と流れ関数の角度差に対する寄与と、曲率最大点および曲率最小点における動径速度を調べることによって楕円渦の変形に対する寄与を調べた。また、曲率最大点および曲率最小点における動径速度を渦度の重み付き積分の被積分関数を調べることで、どの位置からの寄与が大きいかを定量的に調べた。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 章において楕円渦に関する過去の研究を概観する。第 3 章では支配方程式と数値実験の概要、そして数値実験の結果として得られた渦度場について記述する。第 4 章ではフィラメントが軸対称化に与える影響について調べた結果を述べる。第 5 章でまとめを行う。



## 第 2 章

# 過去の研究のレビュー

空間的に局在した渦度分布を渦領域 (あるいは渦斑, vortex patch), またはもっと簡単に渦と呼ぶ [33, 42, 43]. 一般にはその渦度分布は非一様であるが, 非一様な渦度分布を持つ渦の振る舞いを知る上で, 一様な渦度分布を持つ渦を考えることは非常に有益である. なぜなら, 一様な楕円渦は非一様な楕円渦を空間的に大幅に粗視化した第ゼロ近似とみなせるからである. また, 一様な渦度分布を持つ渦はいくつか解析解が知られており, その振る舞いは非一様な渦に比べてよく理解されているためである.

本論文の研究対象は楕円形をした渦度分布を持つ渦, 楕円渦である. 本章では楕円渦に関する過去の研究をレビューする. 楕円渦は, アスペクト比が小さい場合に限り円形渦に波数 2 の擾乱を加えたものとして取り扱うことが可能である. そこで, まずは一様渦領域のレビューから始めて, 渦度場と流れ関数場の関係, 淀み点とフィラメント放出の関係について順番に見ることにする.

### 2.1 一様渦領域の振る舞い

#### 2.1.1 円形渦

一様な渦度分布を持つ円形渦として, Rankine 渦が知られている. [13] <sup>\*1</sup> Rankine 渦は, 静止流体中に置かれた孤立した円形渦領域である. デカルト座標系  $Oxy$  の原点を中心と

---

<sup>\*1</sup> この節の詳しい内容については, 付録 E.6 を参照のこと.

して半径  $r_0$  の円形領域内に  $\omega_0$  の一様渦度を置いた場合、流れ関数  $\psi$  の満たすべき式は、

$$\nabla^2 \psi = \begin{cases} \omega, & \text{if } r \leq r_0, \\ 0, & \text{if } r > r_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

である。ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  である。Rankine 渦に加えられた、境界を

$$r = r_0 \left(1 + \varepsilon e^{i(m\theta - nt)}\right) \quad (2.2)$$

と変形させるような波数  $|m| \neq 0$  の微小振幅擾乱は、

$$n = \frac{\omega_0}{2} (|m| - 1) \operatorname{sgn} m \quad (2.3)$$

という分散関係を持つ。[13, 33, 43] ここで、 $\varepsilon$  は擾乱の振幅に比例する微小量、 $n$  は微小振幅擾乱の振動数である。 $n$  は常に実数なので、Rankine 渦はこの擾乱に対して線形安定である。この波は Kelvin 波と呼ばれる。分散関係から、位相速度  $\Omega = n/m$  は、

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2} \left(1 - \frac{1}{|m|}\right) \quad (2.4)$$

となる。

アスペクト比の小さい楕円渦の振る舞いは、Rankine 渦に波数 2 の微小擾乱を加えたものとして理解できる。アスペクト比の小さい楕円体の回転角速度は、波数 2 の Kelvin 波の位相速度のことであり、 $\Omega = \omega_0/4$  である。

### 2.1.2 Kirchhoff の楕円渦

一様な渦度分布を持つ楕円渦のうち、もっとも簡単なのは Kirchhoff の楕円渦である。[11, 13, 33, 43] Kirchhoff の楕円渦は静止流体中に存在する楕円形の一様渦度領域で、一定の回転角速度

$$\Omega = \omega_0 \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2} \quad (2.5)$$

で回転する定常解である\*2。ここで、 $\lambda$  は楕円のアスペクト比、 $\omega_0$  は一様渦度の大きさである。これは Kirchhoff(1876) [11] が力学の教科書の中で初めて言及した。

式 (2.5) を見て分かる通り、Kirchhoff の楕円渦の回転角速度はアスペクト比に関して単調減少し、 $\lambda = 1$  のときに最大値  $\omega_0/4$  を取り、波数 2 の Kelvin 波の位相速度と一致する。

\*2 Kirchhoff の楕円渦については付録 E を参照のこと。

Love(1893) [15] は Kirchhoff の楕円渦の境界を変位させる擾乱を加えたときの線形安定性を調べた。その結果、線形安定性はアスペクト比に依存し、アスペクト比が 3 以下のときは任意の波数の擾乱に対して線形安定であることを示した。

## 2.2 非一様渦領域の振舞い

非一様な渦度プロファイルを持つ渦 (非一様楕円渦) の解析解は見つかっていない。従って、専ら数値計算による研究が行われている。

ここでは、渦の中心で最大値を取り、渦の中心から外側に向かって単調に減少するような渦度分布についてのみ注目する。

Kirchhoff の楕円渦は擾乱を加えなければフィラメントは放出されないが、非一様な渦度分布の場合、擾乱を加えなくてもフィラメントが放出されることがある [4, 10, 19]。そのような場合、速度淀み点が渦領域の内部に含まれているためと考えられている。淀み点とフィラメントの運動の関係は、2.4 節で述べる。

渦の境界と渦の中心での渦度の値にあまり差がない場合、差がないほど軸対称化しにくいことが知られている (Dritschel, 1998 [4])。

また、Kimura and Herring(2001) [10] は渦度勾配  $|\nabla\omega|$  について、渦度勾配の非線型生成項であるパリンストロフィー生成項に注目して楕円渦の軸対称化を記述した。

表 2.1 に、過去の研究で用いられた渦度分布をまとめた。

## 2.3 渦度場と流れ関数の関係: 軸対称化原理

Melander, *et al.*(1987) は、楕円渦における、楕円形をした渦度コンターと、その付近の流れ関数コンター (これもほぼ楕円形をしている) の傾きの差  $\phi_d$  が、楕円渦の軸対称化を特徴づける量となることを指摘し、 $\phi_d$  の符号と軸対称化を関連づけた。彼らはこれを軸対称化原理と呼んだ。本節ではこのことを詳しくレビューする。





名称	論文	分布
コンパクトサポート	Melander, <i>et al.</i> (1987), Kimura and Herring(2001)	
ガウス分布	Kimura and Herring(2001)	
不連続な放物型分布	Dritschel(1998)	
べき的分布	Velasco Fuentes(2005)	

表 2.1 これまでの研究で用いられた非一様な渦度分布.

### 2.3.1 軸対称化する速度場の特徴付け

ある渦度コンターの運動を調べるには、渦度コンター上の速度ベクトルが分かれば良い。なぜなら、もし非粘性であれば渦度はラグランジュ的に保存するからである。楕円渦の場合、渦の中心に近い渦度コンターとその付近の流れ関数コンターはほぼ楕円形をしている。このとき、渦度コンター上の速度ベクトルの向きは、楕円渦の渦度コンターの傾き  $\phi_\omega$  と流れ関数コンターの傾き  $\phi_\psi$  の差  $\phi_d := \phi_\omega - \phi_\psi$  で決まる。

まず、 $\phi_d > 0$  の場合の説明を行う (図 2.1)。正の渦度を持つ楕円渦が孤立して存在する状況を考える。その楕円渦の楕円形をした渦度コンター (黒の破線) と流れ関数コンター (赤の破線) が、中心を共有して、角度差  $\phi_d$  だけずれて存在する状況を考える。このとき、渦度コンター上の速度、特に渦度コンターの曲率最大点 (長軸の先端) と曲率最小点 (短軸の先端) における速度について考えよう。速度場は流れ関数コンターの接線方向に向くので、楕円形をした渦度コンターの曲率最大の点では内向きの速度成分がある。いま、図示されている流れ関数コンターは曲率最大点を通っているが、これと相似で、曲率最小点を通る楕円形をした流れ関数コンターがあるとすれば、曲率最小の点では外向きの速度成分があることが分かる。このように、 $\phi_d > 0$  の場合は、楕円形をした渦度コンターは軸対称化するような (アスペクト比が 1 に近づくような) 速度場をしていることが分かる。赤の破線で描いた流れ関数コンターと相似な楕円形をした流れ関数コンターがその内側に無数に存在する様子を想像すると、曲率最大点と最小点以外の点でも、渦度コンターが軸対称化するようなセンスになっていることが分かる。



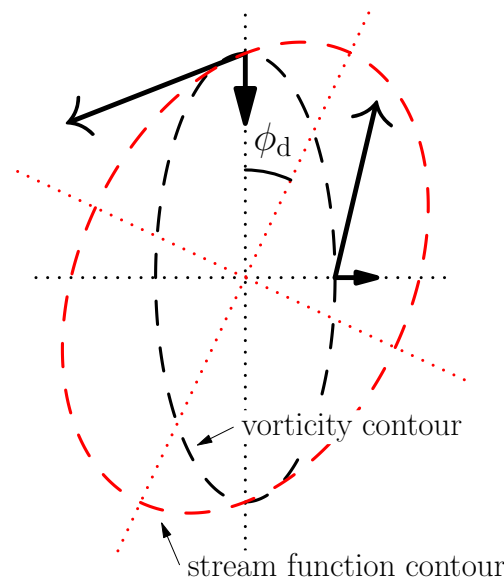


図 2.1 渦度コンター (黒の破線) と流れ関数コンター (赤の破線) の関係. 黒い実線は, 渦度コンターの曲率最大点と最小点における速度ベクトルと, その動径方向への射影を表す. ここでは正の渦度を持つ楕円渦の場合の速度ベクトルを示している.

一方で,  $\phi_d < 0$  の場合はちょうど逆, つまり, アスペクト比が増大するような速度場となることが簡単に分かる.

### 2.3.2 $\phi_d$ の符号はどのようにして決まるか

楕円渦の渦度コンターと流れ関数コンターの傾きの差  $\phi_d$  が生じる原因は何だろうか. 流れ関数は渦度とグリーン関数を用いて,

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint \omega(x', y') \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dx' dy' \quad (2.6)$$

とかける. ここで,  $\mathbf{r} = (x, y)$  である. 従って, 渦度場に正の渦度を加えると, 流れ関数場は対応して負の量が加わる. 楕円渦の渦度場は, 中心に行くほど渦度は大きくなっている. これに対応して流れ関数は負で, 中心に行くほどその絶対値が大きくなるような分布をしている. いま, 図 2.2 のような状況を考えよう. 右向き矢印の左側が渦度コンターを表し, 右向き矢印の右側が流れ関数コンターを表す. 上の段は渦度場として, 楕円形をした渦度コンターの長軸に関して鏡像非対称な成分が存在しない場合を表す.\*<sup>3</sup>このとき, 流れ関数

\*<sup>3</sup> 渦度場の鏡像対称性について詳しく説明しておく. いま,  $x, y$  軸をそれぞれ楕円の短軸と長軸に重なるように取る. このとき, 物理量  $f(x, y)$  が長軸に関して鏡像対称であるとは,  $f(x, y) = f(-x, y)$  が成り

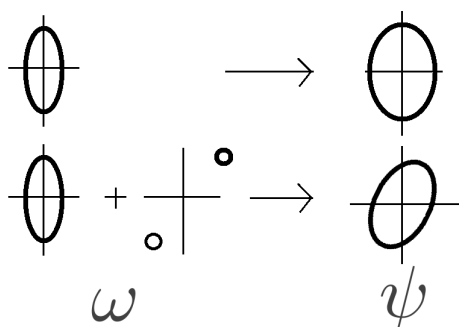


図 2.2  $\phi_d$  が非ゼロになる様子を表す模式図. 上の段は, 楕円形をした渦度コンターの長軸と短軸について鏡像対称な渦度分布と, それに対応する流れ関数コンターを表しており, 渦度場が鏡像対称ならば, 流れ関数場も鏡像対称になることを示している. 下の段は, 渦度分布が鏡像非対称成分を持つときに対応する流れ関数コンターを表しており, 渦度場に鏡像非対称成分が含まれていれば, 流れ関数コンターの楕円は傾く, すなわち  $\phi_d \neq 0$  となることを示している.

場も鏡像対称になり,  $\phi_d = 0$  である. いっぽう下の段は, 渦度場として鏡像対称成分と鏡像非対称成分の重ね合わせを選んだ場合を示している. このとき, 第一, 第三象限の渦度の鏡像非対称成分に対応して, 流れ関数場に負の量に加わっている. いま, 渦度は中心で最大値を取り, これに対応して流れ関数は中心で最小値 (負) を取っているので, 楕円形をした流れ関数のコンターは右に傾く. つまり,  $\phi_d > 0$  となる.

この例から分かるように, 位相差  $\phi_d$  は渦度の鏡像非対称成分によって生じる. 非一様な渦度分布をした楕円渦では, 渦度の鏡像非対称成分はコアとフィラメントの両方に出現する. コアでは, 渦度が大きい部分が早く回転することによる. フィラメントでは, フィラメントがコアに比べて遅れて回転することによる.

Melander, *et al.*(1987) は渦度場の鏡像非対称の度合いから, フィラメント領域の渦度場は  $\phi_d$  に対してどう寄与するかを推測した. 図 2.3 に示した時間発展のうち, (d) のあたりでは, フィラメントは強く正の寄与をする, (g) のあたりでは, あまり寄与しない, (j),(m) のあたりでは, 負の寄与をする, と述べた. これは, フィラメントの全体的な鏡像対称性に基づいたもので, 言い替えれば, フィラメントが継続的に放出されている場合, フィラメントの先端がどの象限にあるかで軸対称化するかどうかが決まることを指摘した.

立つことを言う. 同様に短軸に関して鏡像対称であるとは,  $f(x, y) = f(x, -y)$  が成り立つことを言う. いま, 渦度場の鏡像対称成分は, 長軸に関しても短軸に関しても鏡像対称であり, 鏡像非対称成分は原点に関して点対称になっている.

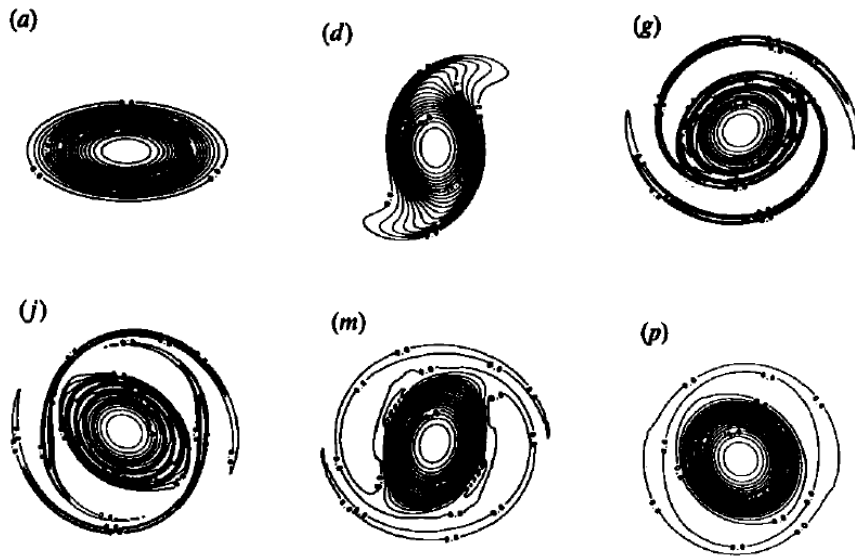


図 2.3 楕円渦の時間発展における渦度場. Melander, *et al.*(1987) Fig.8 より抜粋.

## 2.4 淀み点とフィラメント放出の関係

Melander, *et al.*(1987) は, 渦とともに回転する回転系に乗って見た流れ関数を用いて, フィラメントの運動を議論した. ここで, 回転系は渦度分布のうち, 楕円渦全体の回転を代表するような, 中ぐらいの渦度を持つ渦度コンターに伴う流れ関数コンターの回転角速度を用いて決めた.

原点を中心に回転角速度  $\Omega$  で回転する回転系に乗って見た流れ関数  $\psi_R$  は,

$$\psi_R(x, y, t) = \psi(x, y, t) + \frac{1}{2}\Omega(t)(x^2 + y^2) \quad (2.7)$$

である. これをプロットすると, 例えば図 2.4 のようになる. ここで,  $A_1, A_2, B_1, B_2, C$  が速度淀み点で,  $A_1, A_2$  は鞍点,  $B_1, B_2, C$  は回転の中心である. いま, 流れ場は定常ではないが, 楕円渦の回転角速度と  $\phi_d$  はフィラメントの放出のタイムスケールよりもゆっくりと変化すると仮定する. このとき, 図 2.4 のように  $\phi_d = 0$  として, 渦領域の内部に淀み点が存在する状況を考えると,  $A_1, A_2$  の外側に位置する流体粒子は, コアから剥離していき, フィラメントになる. このように, 淀み点が渦領域の内部に存在すればフィラメントが形成される, という描像が得られた.

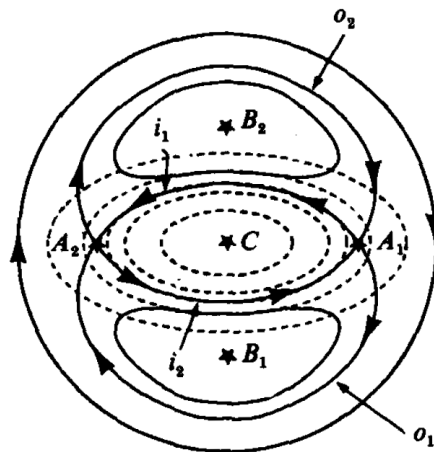


図 2.4 楕円渦と共に回転する回転系に乗って見た流れ関数場 (実線) と渦度場 (点線) を表した模式図.  $A_1, A_2$  が鞍点を,  $B_1, B_2$  が回転系に乗って見ることによって生じる “ghost vortex” の中心を,  $C$  が楕円渦の中心を表す. また,  $i_1, i_2, o_1, o_2$  はそれぞれ内側と外側のセパトリクスを表す. Melander, *et al.*(1987) Fig.7 より.

この描像を確かめるため, Polvani, *et al.*(1991) [31] は回転系から見た速度淀み点<sup>\*4</sup> と渦領域の境界が接触した時刻とほぼ同時にフィラメントの放出が起きることを, コンターダイナミクスシミュレーションによって示した. また, 線形不安定解から見積もった回転系から見た速度淀み点と渦領域の境界の接触時刻がよい見積もりであることを示した. Mizuta, *et al.*(1998) [23] は Polvani, *et al.*(1991) と同様に, 不安定な Kirchhoff の楕円渦の変形を, 回転系の流れ関数から説明した. ここでも, 速度淀み点が渦領域の内部に入り込むことでフィラメントが形成すると説明されている.

一方で, 淀み点が渦領域の内部に含まれる必要はない, という主張が存在する. Velasco Fuentes(2005) [37] は, 渦領域と淀み点が必ずしも交差する必要はないことを主張した. このことは Polvani, *et al.*(1991) の主張とは異なるが, Polvani, *et al.*(1991) の計算結果をよく見ると, 渦領域の内部に淀み点が侵入するより前に渦度コンターの曲率が負の部分が出現し, フィラメントの形成が始まっているため, Polvani らの計算結果とは矛盾していない.

<sup>\*4</sup> 回転系はコンターを楕円にフィッティングし, 楕円の回転角速度を求めて行っている.

## 2.5 まとめ

本章では、一様渦領域として一様な円形渦 (Rankine 渦) と楕円渦 (Kirchhoff の楕円渦) についてまず概観し、続いて非一様楕円渦についての過去の研究についてレビューを行った。特に軸対称化原理とフィラメントの形成・放出について詳しく述べた。これまでの研究では、軸対称化はフィラメントの形成によって起こると考えられており、そのフィラメントは淀み点付近の運動によって形成されるということが分かっている。

Melander らはフィラメントの全体的な分布が鏡像対称であるかどうか注目して軸対称化を論じていたが、この点は疑わしい。まず、フィラメントの先端は渦のコアから遠く離れているため、コアに誘導する速度は小さいと考えられる。また、フィラメントの先端はフィラメントの根本に比べて渦度が弱いため、やはりコアに誘導する速度は小さくなるだろう。従って、フィラメントの根本はフィラメントの先端に比べて軸対称化に強い影響を与えているはずで、フィラメントの「全体的な分布」が重要であるとは考えにくい。以降の章でこの予想が正しいことを示す。



## 第 3 章

# 数値実験の概要と予備的な結果

この章では、渦度場の軸対称化を調べるための数値実験の概要と、数値実験によって得られた渦度場とその軸対称化についての予備的な結果を示す。

### 3.1 支配方程式と初期条件, 境界条件

支配方程式は、2次元非圧縮順圧流体の渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = \nu \nabla^2 \omega, \quad (3.1)$$

$$\omega = \nabla^2 \psi \quad (3.2)$$

である。ここで  $\omega$  は渦度,  $\psi$  は流れ関数,  $\nu$  は粘性係数,  $J(f, g) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$  はヤコビアンである。

数値計算は擬スペクトル法を用いて行った [5, 41]。2/3 ルールでエイリアシングエラーを除去し、粘性項は積分因子の方法で評価した。格子点数は  $3072^2$ 、切断波数は 1023 である。時間積分は 3 次精度の Adams-Bashforth 法を用い、 $t = 15$  まで行った。時間刻み幅  $dt$  は、初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  未満の場合は、 $dt = 1.6 \times 10^{-4}$  で行い、それ以外の場合は  $dt = 2.5 \times 10^{-4}$  で行った。計算領域は  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  で、境界条件として二重周期境界条件を用いた。粘性係数は  $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$  で、超粘性は用いず、通常の粘性項を用いたことを注意しておく。このとき、レイノルズ数  $Re = UL/\nu$  は実験によって多少異なるが、 $L \approx \pi/2$ ,  $U \approx 0.3$  程度として、おおよそ  $Re \approx 3.0 \times 10^4$  である。表 3.1 に行った数値実験と、用いたパラメータの一覧を示す。

run	初期アスペクト比	時間刻み $dt$	データ取得間隔	$\omega_{\text{thr}}$
cs-ar1.5	1.5	$1.6 \times 10^{-4}$	0.02	4
cs-arsqrt10	$\sqrt{10}$	$2.5 \times 10^{-4}$	0.025	6
cs-ar6	6	$2.5 \times 10^{-4}$	0.025	8
ga-ar1.5	1.5	$1.6 \times 10^{-4}$	0.1	4
ga-arsqrt10	$\sqrt{10}$	$2.5 \times 10^{-4}$	0.1	6
ga-ar6	6	$2.5 \times 10^{-4}$	0.1	8
dp-ar1.5	1.5	$2.5 \times 10^{-4}$	0.025	6
dp-arsqrt10	$\sqrt{10}$	$2.5 \times 10^{-4}$	0.025	8
dp-ar6	6	$2.5 \times 10^{-4}$	0.025	9

表 3.1 数値実験のパラメータの表. run の cs, ga, dp はそれぞれ初期渦度分布がコンパクトサポート, ガウス分布, 不連続な放物線形の分布の場合を示す. 渦度のしきい値  $\omega_{\text{thr}}$  については, 4.1 節を参照のこと.

初期の渦度の最大値は  $\omega_0 = 10$  で, 渦の中心を  $(\pi, \pi)$  に置いた. 渦のアスペクト比は, Kirchhoff の楕円渦で安定領域と不安定領域の境界  $r = 3$  に近い  $r = \sqrt{10}$  を基準として, それよりアスペクト比が小さい場合として  $r = 1.5$ , それよりアスペクト比が大きい例として  $r = 6$  の 3 通りについて調べた.

初期渦度場は, なめらかな渦度分布をした場合としてコンパクトサポートを持つ渦とガウス分布をした渦, そして不連続な渦度分布の 3 種類を用いた. これらはいずれも以前の研究 [4, 10] で用いられたものである. スペクトル空間において, 高波数成分にエネルギーを集中させて位相を乱数で与えた初期値から出発する場合, 2次元乱流中の秩序渦は, ガウス分布に近いことが数値的に知られている [17, 39]. しかし, たとえば粘性が非常に小さい場合に, 不連続な渦度分布を持つ小さな渦を大量に配置した状態からスタートした 2次元乱流は, ガウス分布には発展しないことが予想される. 不連続な渦度分布やコンパクトサポートを持つ渦は, そのような状況での秩序渦に当てはまるだろう.

まず, コンパクトサポートを持つ渦は,

$$\omega(s, t = 0) = \omega_0 \left[ 1 - \exp \left\{ -C \frac{R_0}{s} \exp \left( -\frac{R_0}{R_0 - s} \right) \right\} \right], \quad 0 \leq s < R_0, \quad (3.3)$$

ここで  $s = \sqrt{a_0^2 x^2 + b_0^2 y^2}$ ,  $a_0/b_0$  は初期アスペクト比,  $R_0 = \pi/2$  とした. また, 定数  $C$  は,  $\omega(R_0/2) \approx \omega_0/2$  となるように  $C = -\frac{1}{2}e^2 \ln \frac{1}{2} \approx 2.5608517$  と定めた. これは Kimura and Herring(2001) [10] のコンパクトサポートの場合と表記は異なるが同じものである.



ガウス分布をした渦は,

$$\omega(s, t = 0) = \omega_0 \exp(-Cs^2), \quad 0 \leq s < R_0, \quad (3.4)$$

ここで  $s = \sqrt{a_0^2 x^2 + b_0^2 y^2}$ ,  $a_0/b_0$  は初期アスペクト比,  $R_0 = \pi/2$  とした. また, 定数  $C$  は,  $\omega(R_0/\sqrt{10}) \approx \omega_0/2$  となるように  $C = -\frac{10}{R_0^2} \ln \frac{1}{2} \approx 2.8092197$  と定めた. これは Kimura and Herring(2001) [10] のコンパクトサポートの場合と表記は異なるが同じものである.

3つ目は, 渦領域の内部では放物線形の渦度分布をしており, 渦の内部と外部で渦度が連続でない分布である.

$$\omega(s, t = 0) = \omega_0 \left[ 1 - (1-h) \frac{s^2}{R_0^2} \right], \quad 0 \leq s < R_0, \quad (3.5)$$

ここで,  $s = \sqrt{(qx)^2 + (y/q)^2}$ ,  $q^2$  は初期アスペクト比,  $h$  は渦の端 ( $s = R_0$ ) での渦度の大きさ  $\omega_0 h$  を調節するパラメータで,  $h = 0.6$  とした.  $R_0$  は渦の空間的な広がりを調節するパラメータで,  $R_0 = 0.5$  とした. これは, Dritschel(1998) [4] の用いた分布と同じである. \*1

## 3.2 楕円へのフィッティング

渦の中心に近い渦度場や流れ関数場の等値線はほぼ楕円形をしていることが知られている [19]. これらの楕円のパラメータ, すなわち, 楕円の中心座標  $(x_c, y_c)$ , 長軸半径  $a$ , 短軸半径  $b$ , 楕円の傾き  $\theta$  を求めるには大きく分けて二つの方法がある. 一つはモーメントを使った方法で, コンターを表す点列からコンターに沿った積分を評価する方法である. [4, 19] もう一つは, コンターを表す点列を何らかの方法で楕円に当てはめる方法である. ここでは, 実装の簡単さを理由に後者の方法を用いた. その中でも, 最小自乗フィッティング (Fitzgibbon, *et al.*, 1999 [6]) を用い, 楕円の長軸半径, 短軸半径, 傾きを求めた.\*2 コンターを代表する点列は, 隣接する格子点上の関数値を用いて線形補間によってコンターの存在する座標を計算して求めた.\*3 図 3.1 にフィッティングの例を示す.

図 3.2 に, フィッティングの誤差を表す平均二乗残差の時系列を示す. これは, 求めた

\*1  $R_0 = 1$  と設定し, 渦度場を原点を中心に 90 度回転させた場合に Dritschel(1998) と一致する.

\*2 詳細は付録 A を参照のこと.

\*3 Fitzgibbon, *et al.*(1999) の方法は, フィッティングを一般化固有値問題に帰着する. 入力する点列から作る行列の要素の大きさが誤差に影響するため, 点列の座標を楕円の中心座標からの相対座標に置き換えた.

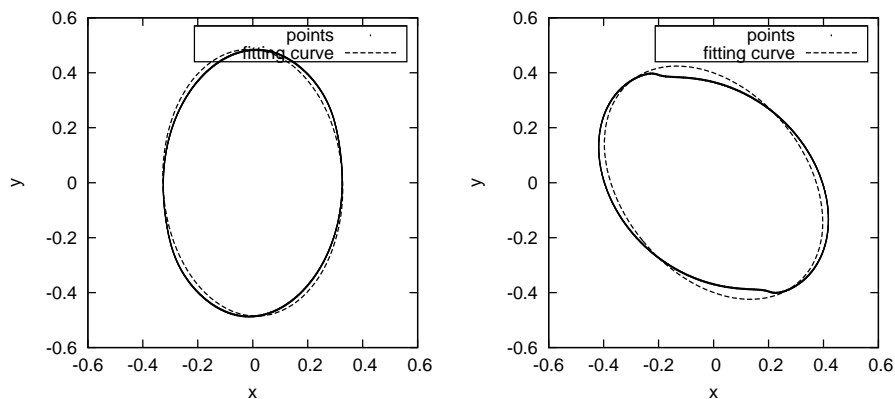


図 3.1 フィッティングの例. 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合. (左)  $t = 2.0$  での  $\omega = 6$  の渦度コンターのフィッティングの例. 点は渦度場から求めた点列を表し, 破線はフィッティングで得られた楕円を表す. 入力点数  $n$  は  $n = 1588$  である. (右)  $t = 4.0$  での  $\omega = 6$  の渦度コンターのフィッティングの例. 入力点数は  $n = 1600$  である.

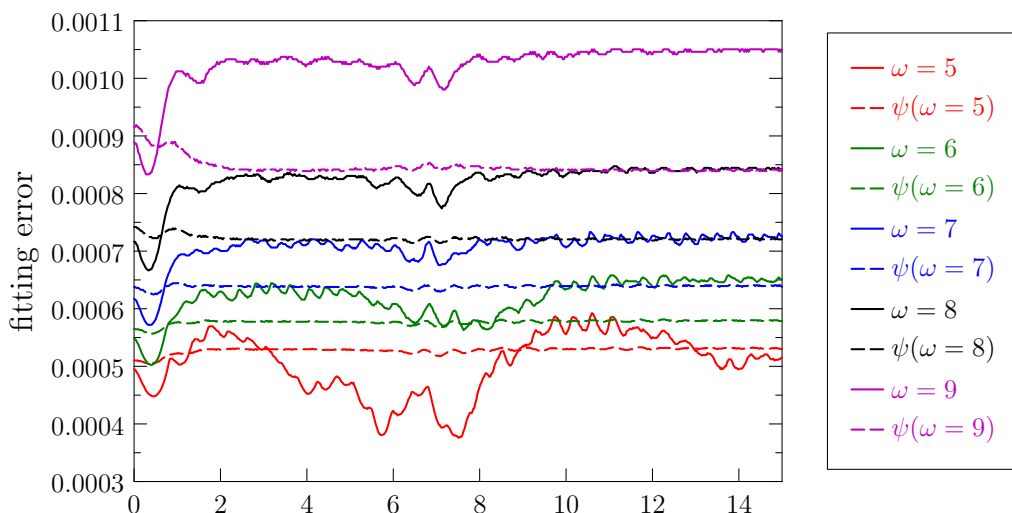


図 3.2 楕円へのフィッティングの平均二乗残差の時系列. コンパクトサポートで初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.

楕円のパラメータを用いた二次曲線の式  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  の左辺に, 点列の座標  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ここで  $N$  は点の数, を代入した時の二乗残差の和を求め, 平均残差  $R$  をプロットしたものである. 式で書けば,

$$F(\mathbf{x}) := ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad (3.6)$$

$$R := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}_i)^2 \quad (3.7)$$

である。

### 3.3 統計量の時間変化

この節では、統計量の時間変化について議論する。非粘性の場合に保存する量のうち、エネルギー  $E(t)$ 、エンストロフィー  $Z(t)$ 、循環  $\Gamma(t)$ 、渦領域の面積  $A(t)$  の時系列について調べる：

$$E(t) := -\frac{1}{2} \iint_D \psi(x, y, t) \omega(x, y, t) dx dy, \quad (3.8)$$

$$Z(t) := \frac{1}{2} \iint_D \omega(x, y, t)^2 dx dy, \quad (3.9)$$

$$\Gamma(t) := \iint_D \omega(x, y, t) dx dy, \quad (3.10)$$

$$A(t) := \iint_D dx dy. \quad (3.11)$$

ここで、 $D$  は渦領域を表し、 $D := \{ (x, y) \mid \omega(x, y) > 1.0 \times 10^{-3} \}$  である。渦領域の外側に含まれるノイズを除くため、 $\omega(x, y) > 0$  とせず、しきい値を設けた。

エネルギー  $E(t)$  は  $t = 15$  において、初期値の 0.21% だけ減少している (図 3.3 の左上)。エネルギーの時間変化のタイムスケール  $\tau_E := -E/\dot{E}$  は、およそ  $\tau_E \approx 7250$  であった。ここでドットは時間微分を表す。対して、エンストロフィー  $Z(t)$  は初期値の 6.7% 減少しており (図 3.3 の右上)、エンストロフィーの時間変化のタイムスケール  $\tau_Z := -Z/\dot{Z}$  は、初期に  $\tau_Z \approx 1700$ 、 $t > 2$  においてはおよそ  $\tau_Z \approx 200$  であった。また、最小値は  $t = 9.5$  で  $\tau_Z \approx 115$  であった。循環  $\Gamma(t)$  の時系列もほとんど一定である (図 3.3 の左下)。エネルギー、エンストロフィー、循環から系の発展を見れば、ほぼ非粘性的であると結論するだろう。渦領域の面積は、 $t = 15$  で初期の約 2.3 倍に増加している (図 3.3 の右下)。これは、放出されたフィラメントが粘性によって拡散したため、渦領域の面積が増えたと考えられる。

### 3.4 軸対称化のようす

楕円渦の軸対称化の様子を概観する。以下では初期のアスペクト比を  $\sqrt{10}$  に設定した場合について示す。

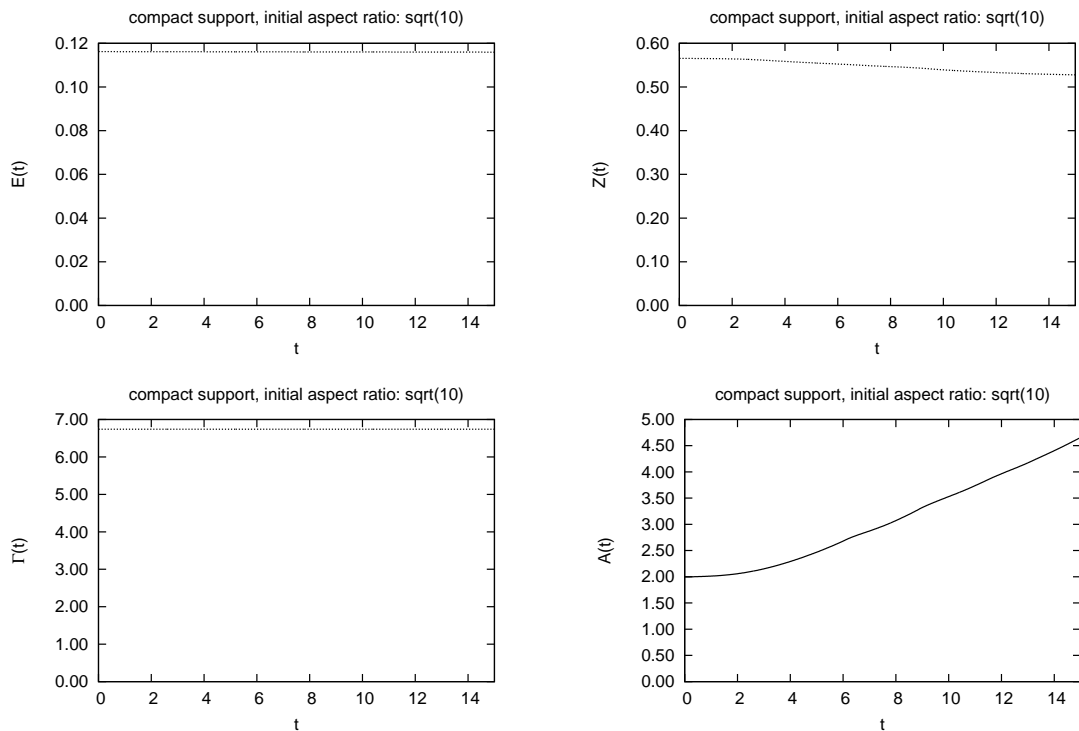


図 3.3 エネルギー (左上), エンストロフィー (右上), 循環 (左下), 渦領域の面積 (右下) の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.

### 3.4.1 コンパクトサポートの場合

まず, 初期アスペクト比  $\sqrt{10}$ , コンパクトサポートの初期条件から出発した渦度場の時間発展を図 3.4 に示す. 外側が中心よりゆっくり回転し, フィラメントが形成され, フィラメントは徐々に細くなりながら渦の周囲に巻き付いてほぼ一様にとりまくように発展する様子が見える. また, 同時に渦のアスペクト比は減少し, 軸対称化していることが分かる.

次に, アスペクト比の時間発展を図 3.5 に示す. 時間発展を通じてほぼ楕円形を保つ, 言い替えれば, フィラメントとして出て行かないような渦度コンターにのみ注目するため, ここでは  $\omega = 5, 6, 7, 8, 9$  の時間発展をプロットした. 注目する全ての渦度コンターのアスペクト比 (実線) はごく初期の  $t \leq 2$  でおおよそ 1.5 にまで減少する. その後, 時刻  $6 < t < 8$  においてアスペクト比が一時的に増加し, 再びさらに減少している. また, 渦度コンターのアスペクト比は, 時間発展を通じて細かく振動している. その周期は渦度コンターによって異なるが, おおよそ 1 から 1.8 程度まで変動している. 同じ渦度コンター

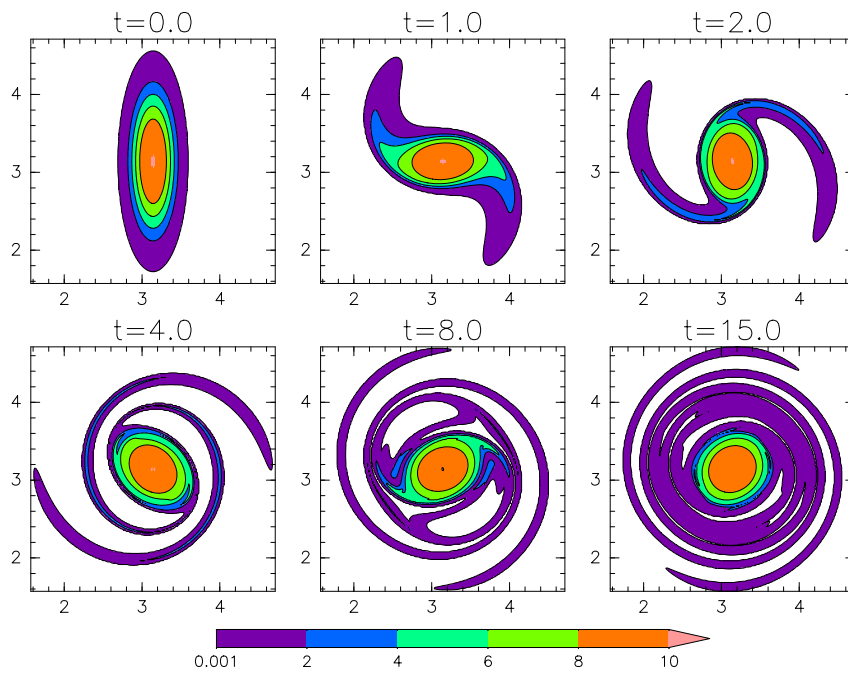


図 3.4 渦度場の時間発展. コンパクトサポートで初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.

について注目しても、周期は一定ではなく時間変化していることが分かる。渦度コンター  $\omega = 5, 6, 7, 8, 9$  に伴う流れ関数コンターは、渦度コンターと異なり、コンターのアスペクト比のばらつきが小さく、初期の  $0 < t < 1$  と、二回目のフィラメント放出が見られる  $t \approx 7$  付近を除いてはほぼ同じアスペクト比となっているという特徴がある。

Melander, *et al.*(1987) が主張した軸対称化原理  $\phi_d dr/dt < 0$  が成り立っているかどうかを見るために、 $\phi_d dr/dt$  をプロットした図を図 3.6 に示す。ここで、アスペクト比  $r := a/b$  の時間微分は、 $\dot{r} = (\dot{a} - r\dot{b})/b$  によって評価した。 $\dot{a}, \dot{b}$  には、楕円形をした渦度コンター上の曲率最大点および最小点における動径速度を用いた。図を見ると、軸対称化原理  $\phi_d dr/dt < 0$  はほぼ成り立っていることが分かる。わずかに成り立っていない時刻が見られるが、これは正確には楕円形ではないコンターを楕円と仮定しているためと考えられる。

さらに、アスペクト比の時間微分と  $\phi_d$  の量的な関係を見るために、これらを重ねてプロットした図を図 3.7 に示す。 $dr/dt$  に注目すると、 $t < 1.5$  では他の時刻に比べて大きく負になっているが、 $\phi_d$  はどの時刻でも同じくらいの大きさの振幅である。従って、 $\phi_d$  だけでは軸対称化の度合を測ることはできない。実際、Melander, *et al.*(1987) が行った  $dr/dt$

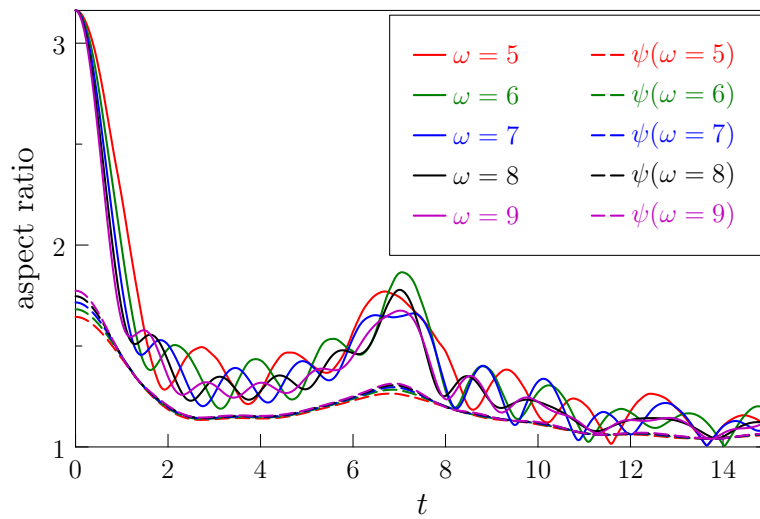


図 3.5 アスペクト比の時間発展. 実線は渦度コンターの楕円のアスペクト比の時間発展を, 破線は流れ関数コンターの楕円のアスペクト比の時間発展を示す. それぞれ, 渦度コンターと対応する近傍の流れ関数コンターは同じ色にしてある.

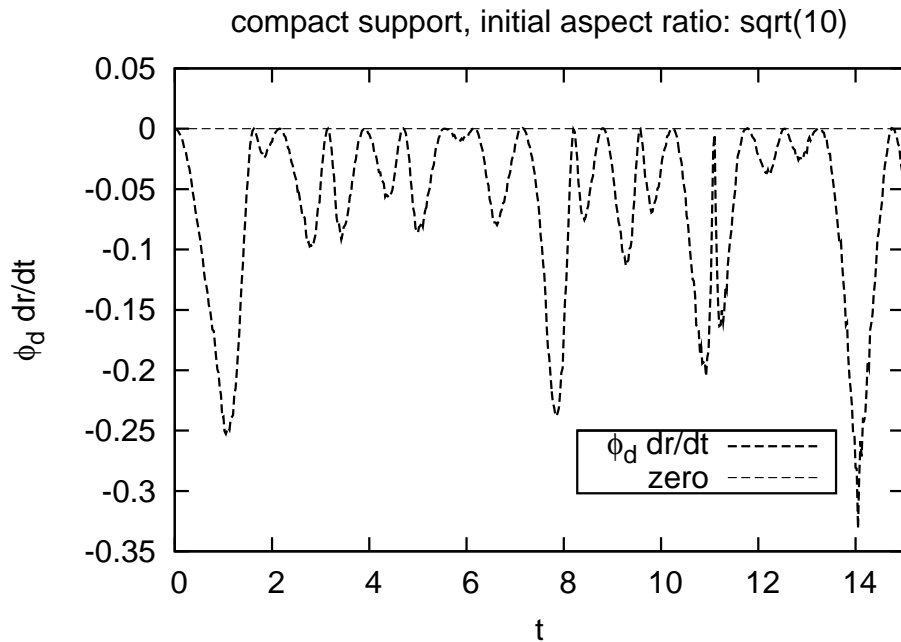


図 3.6 アスペクト比の時間微分と角度差の積の時間発展.  $\omega = 6$  のコンターについての結果.

の見積もりは,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1 - r_\psi^2}{1 + r_\psi^2} \bar{\omega} r \sin 2\phi_d \quad (3.12)$$

となっており,  $dr/dt$  は  $\phi_d$  の大きさに比例しない. ここで,  $r_\psi$  は流れ関数のアスペクト比,  $\bar{\omega}$  は注目した渦度コンターの渦度である.

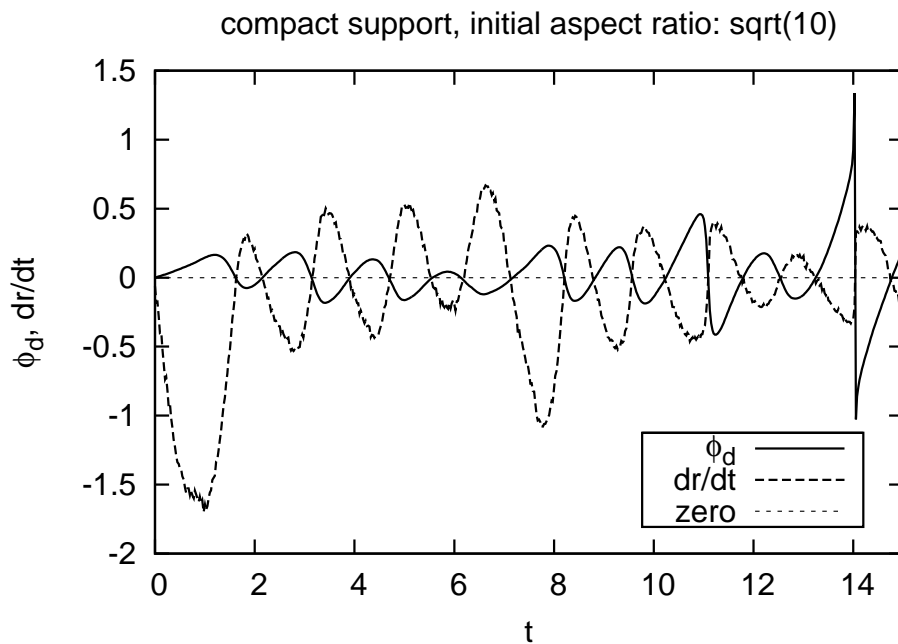


図 3.7 アスペクト比の時間微分と角度差の時間発展.  $\omega = 6$  のコンターについての結果.

渦度コンターが流れによってどのように流されるかを観察するため、回転系に乗って見た流れ関数と渦度場の関係を見る。ここでは観察する回転系として、Melander, *et al.*(1987)とは異なり、注目する渦度コンターの楕円の回転角速度で回転する回転系を選ぶことにする。図 3.8 に、 $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円の回転角速度で回転する回転系に乗ったときの流れ関数コンターと渦度コンターを示す<sup>\*4</sup>。なお、注目する渦度コンターの楕円の長軸が  $y$  軸に一致するように座標系を取っている。Melander, *et al.*(1987)の指摘する通り、二つの ghost vortex を伴う特徴的なパターンがいつの時刻でも見られる。一方で、その大きさは各時刻でまちまちである。これは、渦度コンターの楕円の回転角速度が時間変化していることに対応している。

次に、渦度コンターの楕円とそれらに対応する流れ関数コンターの楕円の回転角速度の時系列を示す(図 3.9)。回転角速度は、ある時刻の渦度場のスナップショットから次の時刻の渦度場のスナップショットの間に、渦度コンターの楕円の傾きが  $|\pi/2|$  以下しか変化しないことを仮定して計算している。また、楕円のアスペクト比が 1 に非常に近いとき、渦度コンターの傾きはノイズの影響を非常に受けやすい。従って、楕円のアスペクト比が 1 に非常に近いときには、楕円の傾きを欠損値とし、その上で楕円の回転角速度を求めるのが適切である。ここでは、楕円のアスペクト比が 1.05 未満のときに楕円の傾きを欠損値と

<sup>\*4</sup> 回転角速度は、 $t = 0$ ,  $t = 15$  はそれぞれ前進差分と後退差分で、それ以外の時刻は中央差分で楕円の傾きから求めた。

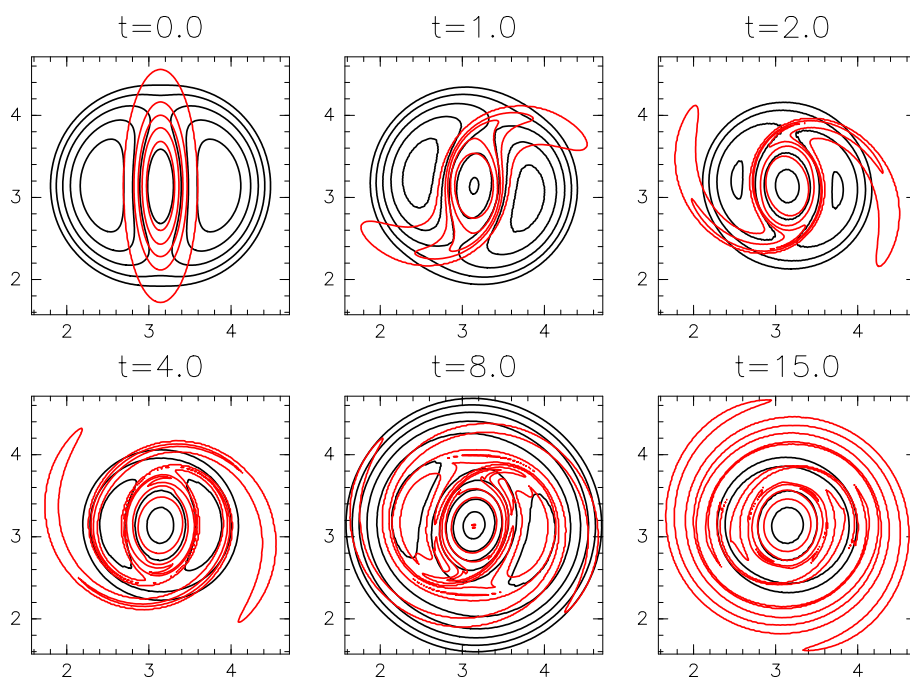


図 3.8 初期アスペクト比  $\sqrt{10}$  のコンパクトサポートの場合に,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円の回転角速度で回転する回転系に乗って見た流れ関数 (黒実線) と渦度 (赤実線).

した. 楕円の回転角速度は, 初期時刻  $t = 0$  と最終時刻  $t = 15$  はそれぞれ前進差分と後退差分で, その他の時刻は中央差分によって求めた. かなり振動的に変化しているが, おおむね回転角速度は 1 から 2.5 の範囲にあることが分かる.

もし渦度場を Kirchhoff の楕円渦とみなすと, 回転角速度の最大値はアスペクト比が 1 のときで  $\omega_0/4$  である. いま渦度の最大値が 10 であるから, Kirchhoff の楕円渦の回転角速度は 2.5 ということになる. 注目した渦度コンターの内部にある渦度の平均渦度を考えると,  $\omega = 10$  の渦度コンターに注目しない限りは, 平均渦度は小さくなるから, 回転角速度も 2.5 よりは小さくなるだろう. これは, 図 3.9 の回転角速度を時間平均したものがおよそ 1.7 程度であることと整合的である.

### 3.4.2 ガウス分布の場合

初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  で, 初期渦度分布がガウス分布の場合について見る. 渦度場の時間発展を図 3.10 に示す. コンパクトサポートの場合と同様に, 外側が中心付近よりもゆっくりと回転し, フィラメントが形成され, フィラメントがコアの周囲を一様に取り巻くように発展する. コンパクトサポートと違うのは, コンパクトサポートの場合に比べて



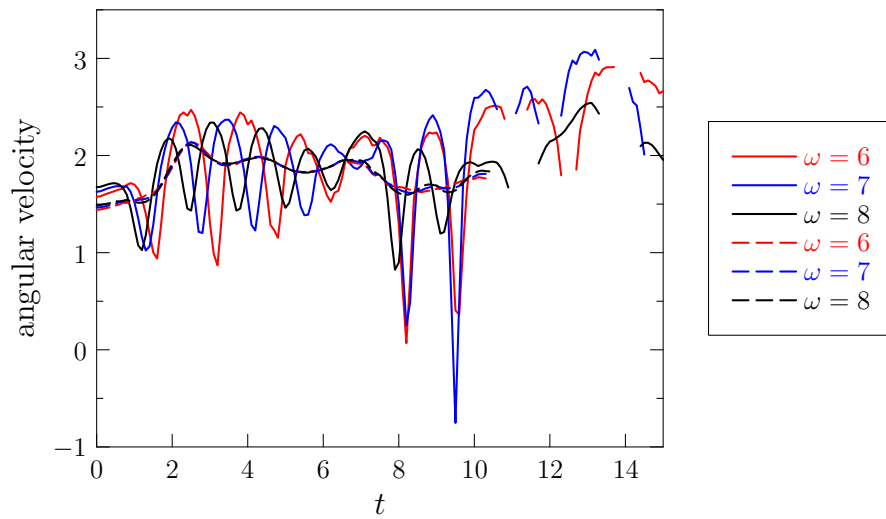


図 3.9  $\omega = 6, 7, 8$  の渦度コンターの楕円の回転角速度 (実線) と流れ関数コンターの楕円の回転角速度 (破線). 初期アスペクト比  $\sqrt{10}$  のコンパクトサポートの場合.

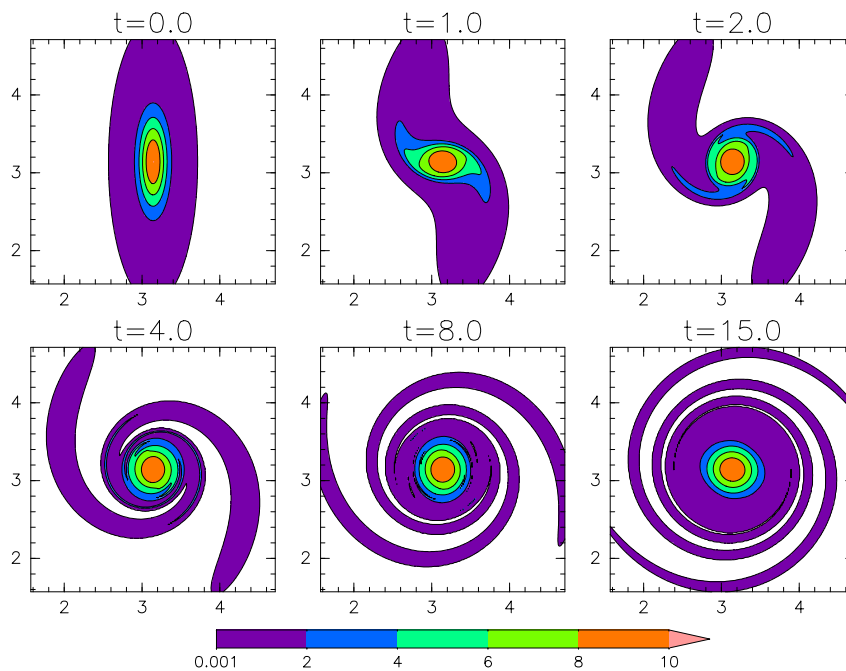


図 3.10 渦度場の時間発展. ガウス分布で初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.

太いフィラメントが放出されること, それから, フィラメントの二次放出が観察されないことである.

次に, アスペクト比の時間発展を図 3.11 に示す. コンパクトサポートと同様に, アスペクト比は初期に急激に軸対称化している様子が分かる. コンパクトサポートの場合とは異

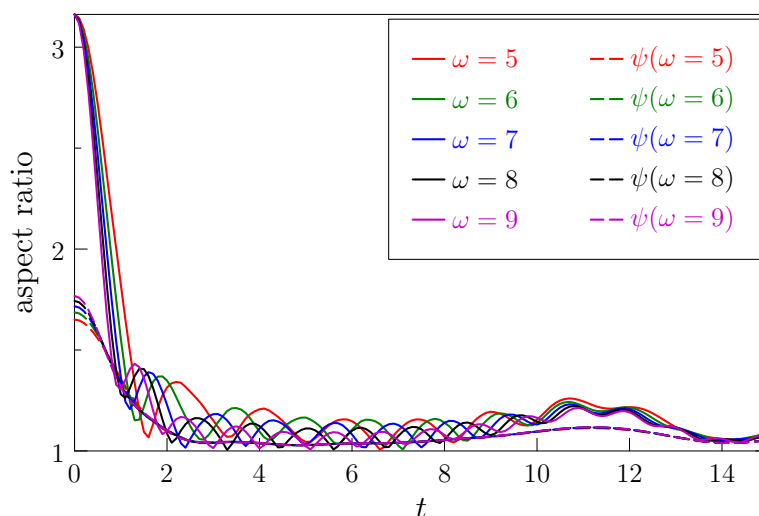


図 3.11 アスペクト比の時間発展. ガウス分布で初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.

なり, 初期の急激な軸対称化後のアスペクト比の増加は非常に緩やかで,  $10 \leq t \leq 11$  あたりにわずかに見られる. また, このときに, 各々の渦度コンターのアスペクト比の変動がほぼ同期していることも特徴である. 流れ関数コンターのアスペクト比も, コンパクトサポートの場合と同様にコンターごとのアスペクト比のばらつきが非常に小さく, わずかに初期の  $0 \leq t \leq 0.5$  において見られるのみである.

アスペクト比の時間微分と  $\phi_d$  を重ねてプロットした図を図 3.12 に示す. これもコンパクトサポートの場合と同様に, 軸対称化原理がほぼ成り立っていることが分かる. コンパクトサポートと異なり,  $\phi_d$  の振動の大きさが  $t \approx 4$  以降で単調減少している様子が見られる.

### 3.4.3 不連続な渦度分布の場合

初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  で, 初期渦度分布が不連続な渦度分布の場合について示す.

渦度場の時間発展を図 3.13 に示す. この場合も, 渦の尖った先端部分がわずかに渦のコアよりゆっくり回転し, フィラメントが放出され, コアの周囲を取り巻くように分布するように発展する. コンパクトサポートと同様に, 二回目のフィラメント放出が  $t \approx 7$  で見られる. しかし, コンパクトサポートやガウス分布の場合と異なり, 放出されるフィラメントの面積がかなり少なく, また, あまり軸対称化していないことも分かる. 他の初期値の場合と同じように  $t = 15$  まで積分した段階で, フィラメントがコアの周囲を一様に取り巻く

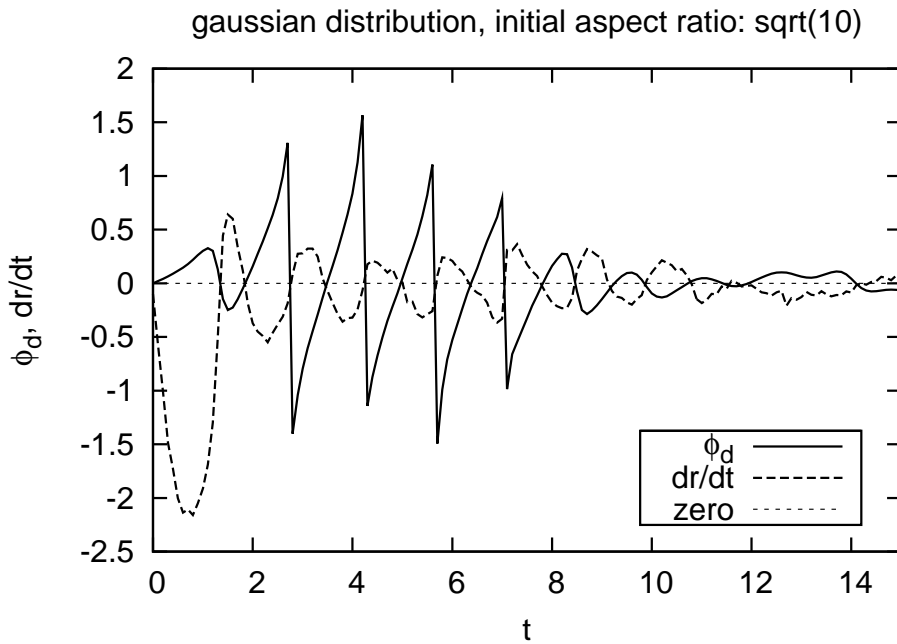


図 3.12  $\omega = 6$  の渦度コンターのアスペクト比の時間微分と角度差の時間発展. ガウス分布で初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.

には至っていない. これは, 放出されるフィラメントの面積が少ないことと関係していると思われる.

次に, アスペクト比の時間発展を図 3.14 に示す. Dritschel(1998) [4] が指摘しているように, 軸対称化が途中で止まっていることが分かる. 最終的に,  $t = 15$  ではアスペクト比は 1.8 から 2 程度に落ち着いている. アスペクト比で見ても, 二回目のフィラメント放出とその後のアスペクト比の減少が分かる. 流れ関数コンターのアスペクト比は, コンパクトサポートの場合と異なり, コンターごとにわずかつ異なる値になっている. しかしながら, その振動パターンはどの流れ関数コンターも同じである.

アスペクト比の時間微分と  $\phi_d$  を重ねてプロットした図を図 3.15 に示す. コンパクトサポートやガウス分布の場合と同様に, 軸対称化原理がほぼ成り立っていることが分かる. また, 不連続な渦度分布に特有の特徴として, 二回目のフィラメント放出以降, アスペクト比の時間微分  $dr/dt$  と  $\phi_d$  が一定の周期・振幅で振動していることが挙げられる.

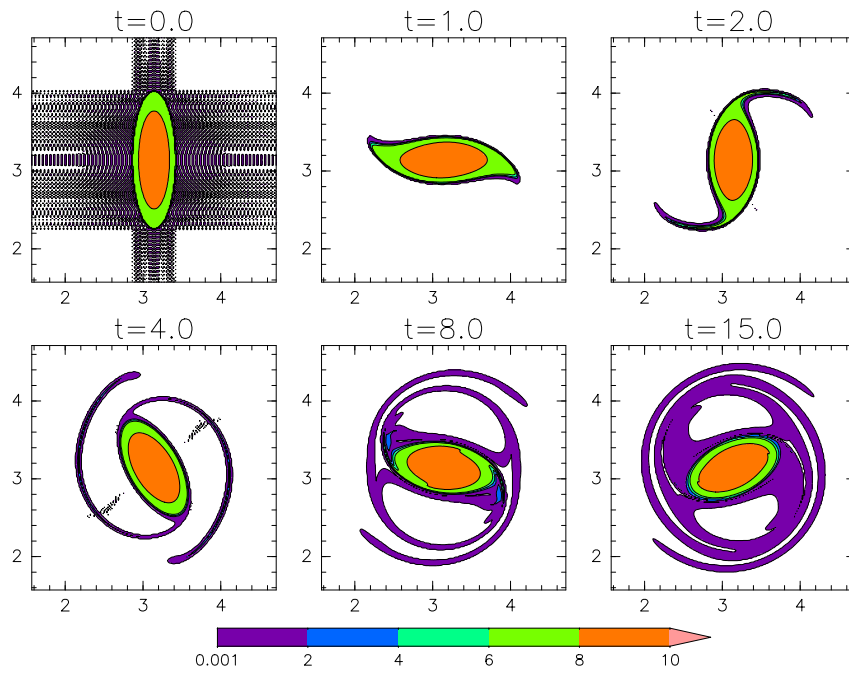


図 3.13 渦度場の時間発展. 不連続な渦度分布で初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.

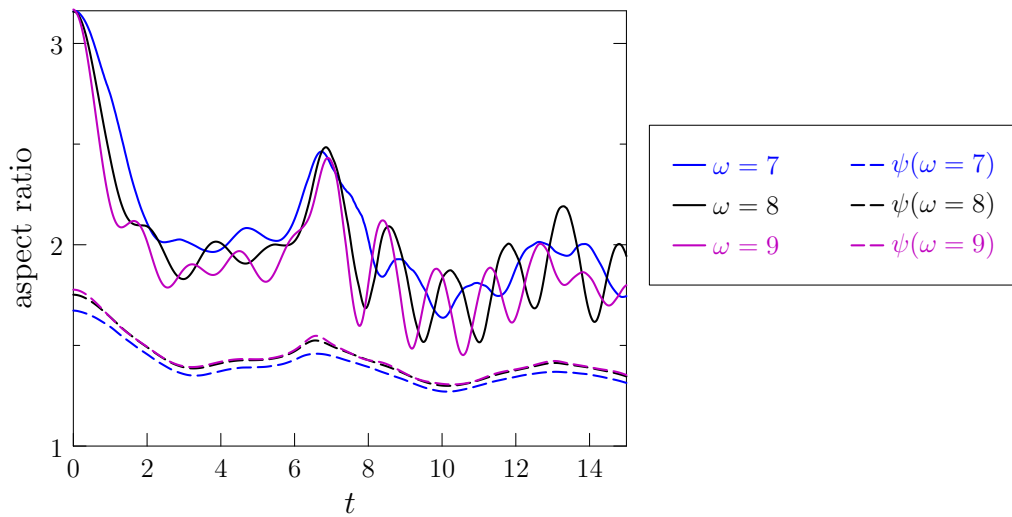


図 3.14 アスペクト比の時間発展. 不連続な渦度分布で初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.

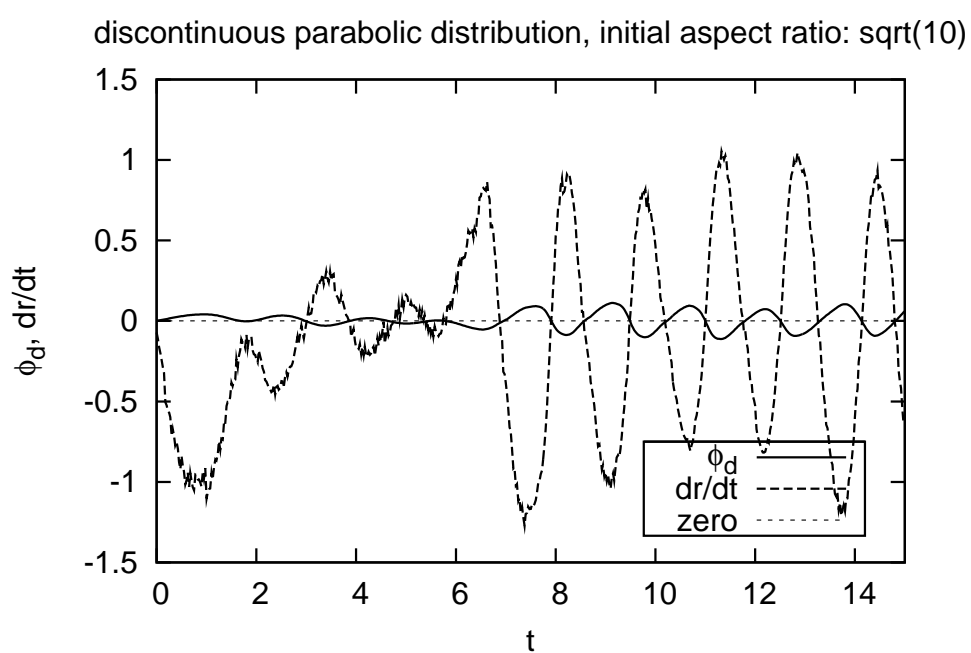


図 3.15  $\omega = 8$  の渦度コンターのアスペクト比の時間微分と角度差の時間発展. 不連続な渦度分布で初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合.



## 第 4 章

# 楕円渦の軸対称化に対するフィラメントの役割

第 3 章で、いくつかの初期渦度分布について楕円渦がどのように時間発展し軸対称化するかを概観した。この章では、そのような楕円渦の時間発展と軸対称化に対して、楕円渦のコアとフィラメント状の渦度分布がそれぞれどのような役割を果たしているかを調べた結果を示す。

楕円渦のコアとフィラメントの果たす役割を調べる方法として、渦度場をコアに対応する領域とフィラメントに対応する領域に分けて、それぞれの領域の渦度場から、何らかの軸対称化を表す物理量への影響を調べる、というものがあるだろう。これを実行するためには、まず、コアに対応する領域とフィラメントに対応する領域を分類する必要がある。そこで、まずはコアに対応する領域とフィラメントに対応する領域を決定する方法を議論することから始める。

### 4.1 渦のコア領域と周辺領域の決定方法

#### 4.1.1 分類方法の候補とその定義

一般に渦のコアといえは、周囲より大きな渦度を持つ楕円形の渦度領域を思い浮かべるだろう。また、フィラメントは渦のコアに比べて細く長い非ゼロの渦度領域を思い浮かべるだろう。

これらの主観的な渦コアとフィラメントのイメージに矛盾しない、渦のコアに対応する領域とフィラメントに対応する領域の客観的な分類法を探す。

ここで、フィラメントに対応する領域は、例えばどこまでがフィラメントがよくわからないなどというように定義が難しいので、コア領域をまず定義し、それ以外の領域をフィラメントに対応する領域と定義する手順を取ることにする。そして、次の二つを要請する：

1. [コア領域の形状に対する要請] コア領域に対しては、フィラメント状の領域を含まないことを要請する。
2. [コア領域内の渦度コンターに対する要請] コア領域内の渦度コンターのうち、領域内で閉じたコンターについては、時間発展を通じてほぼ楕円形を保つことを要請する。

フィラメントに対応する領域はコア周辺のコア以外の領域なので、以後は周辺領域と呼ぶことにする。周辺領域の渦度を  $\omega_s$ 、コア領域の渦度を  $\omega_c$  と表すことにする。

最も素朴な方法として、渦度のしきい値  $\omega_{\text{thr}}$  を決め、そのしきい値以上の渦度場をコア領域、そのしきい値以下を周辺領域と定義する方法がある。しきい値の渦度コンターは、時間発展を通じてほぼ楕円形あるいは円形であることを要請する（要請 [1,2] に対応する）。式で書けば、ある時刻  $t$  において、

$$D_c(t) := \{ (x, y) \mid \omega(x, y, t) \geq \omega_{\text{thr}} \} \quad (4.1)$$

$$D_s(t) := \{ (x, y) \mid 0 < \omega(x, y, t) < \omega_{\text{thr}} \} \quad (4.2)$$

と定義し、コア領域の渦度場  $\omega_c$  と周辺領域の渦度場  $\omega_s$  を

$$\omega_c(x, y, t) := \begin{cases} \omega(x, y, t) & \text{if } (x, y) \in D_c(t) \\ 0 & \text{if } (x, y) \notin D_c(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\omega_s(x, y, t) := \begin{cases} \omega(x, y, t) & \text{if } (x, y) \in D_s(t) \\ 0 & \text{if } (x, y) \notin D_s(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

と定義する。この方法は、渦度のしきい値をパラメータとして含むことが欠点として挙げられる。

次に、流体粒子の運動の性質によって分類する方法がある。もし渦運動が卓越しているならば、流体粒子は円状の軌跡を描くだろう。このことを逆に用いて、円状の軌跡を描く場所を探してやることで渦運動が卓越する場所を推定しようというわけである。流体粒子の運動の性質を調べる方法として Okubo-Weiss の基準 [29, 38] を用いた方法、



Hua-Klein の基準 [8] を用いた方法などがある. どちらの方法も, ある流体粒子を追いかけたとき, その周囲の流体粒子の運動が楕円的であるか双曲的であるかを判定するものである. 特に, Okubo-Weiss の基準は, 2次元乱流中の秩序渦の検出にたびたび用いられる (Benzi, *et al.*, 1988 [1]; Iwayama, *et al.*, 1996 [9]; LaCasce, 2008 [12]). この Okubo-Weiss の基準を用いて,  $Q = s^2 - \omega^2$  の符号でコア領域と周辺領域を定義する. ここで,  $s^2 = (u_x - v_y)^2 + (v_x + u_y)^2$  はストレインの大きさの二乗である. Okubo-Weiss の基準を用いた方法を式で書けば,

$$D_c(t) := \{ (x, y) \mid Q(x, y, t) \leq 0 \} \quad (4.5)$$

$$D_s(t) := \{ (x, y) \mid Q(x, y, t) > 0 \} \quad (4.6)$$

となる. また, Hua-Klein の基準では, ラグランジュ加速度勾配テンソル  $\nabla \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$  の二つの固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  の符号によって定義する. 式で書けば,

$$D_c(t) := \{ (x, y) \mid \lambda_1(x, y, t) < 0 \quad \text{かつ} \quad \lambda_2(x, y, t) < 0 \} \quad (4.7)$$

$$D_s(t) := \{ (x, y) \mid \lambda_1(x, y, t) > 0 \quad \text{または} \quad \lambda_2(x, y, t) > 0 \} \quad (4.8)$$

となる. これらの方法は渦度のしきい値を決める方法に比べ, パラメータを含まないことが利点である.

#### 4.1.2 領域分類の結果

本節では, 前節に挙げた三つの方法によって, 数値計算によって得られた渦度場をコア領域と周辺領域に分類し, 方法の適切性を議論する. テストの対象は, 初期渦度分布がコンパクトサポート, 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合である.

##### 渦度のしきい値を用いた方法

まず, 渦度のしきい値で分類する方法について見る. 渦度場の時間発展を見ると,  $\omega = 6$  より大きい渦度コンターは時間発展を通じてほぼ楕円形をしていたので, 渦度のしきい値を  $\omega_{\text{thr}} = 6$  としして領域を分類した.

このような方法で定義したコア領域は適切に定義できているように見える (図 4.1 の左). 一方で周辺領域は, フィラメントと渦のコアの回りの弱い渦度領域を足し合わせたような領域になっている (図 4.1 の右).

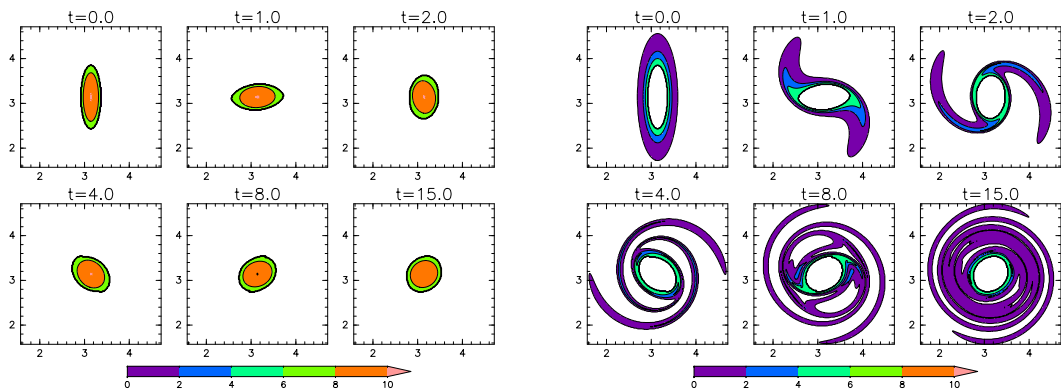


図 4.1 渦度のしきい値を用いて分類されたコア領域の渦度場 (左) と周辺領域の渦度場 (右). 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 渦度のしきい値を  $\omega_{\text{thr}} = 6$  とした場合.

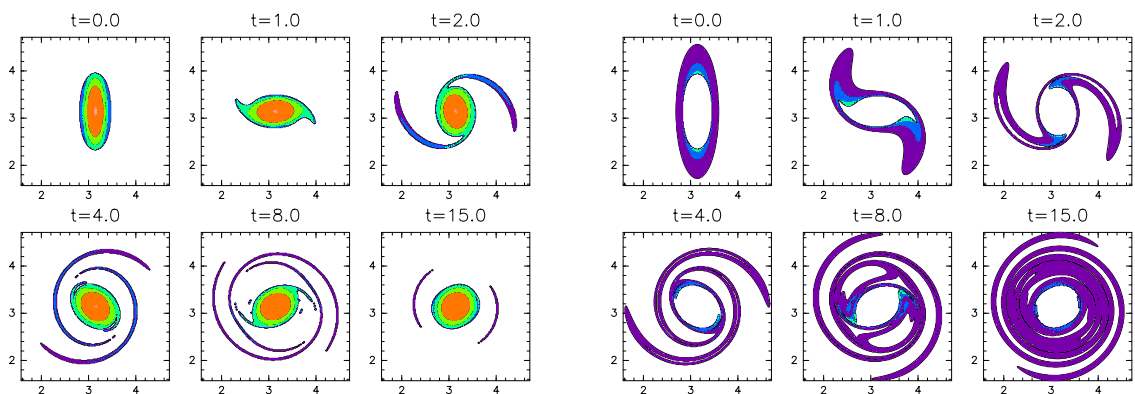


図 4.2 Okubo-Weiss の基準を使って分類されたコア領域の渦度場 (左) と周辺領域の渦度場 (右).

#### Okubo-Weiss の基準を用いた方法

次に, Okubo-Weiss の基準を用いた方法についての結果を述べる. このとき, コア領域がフィラメント状の領域を含んでしまっている様子が見て取れる (図 4.2 の左). 従って, Okubo-Weiss の基準を用いた方法は適切とは言えない.

Okubo-Weiss の基準では, フィラメントの少なくない部分がコア領域に含まれてしまうことがあるので, 適切とは言えない.

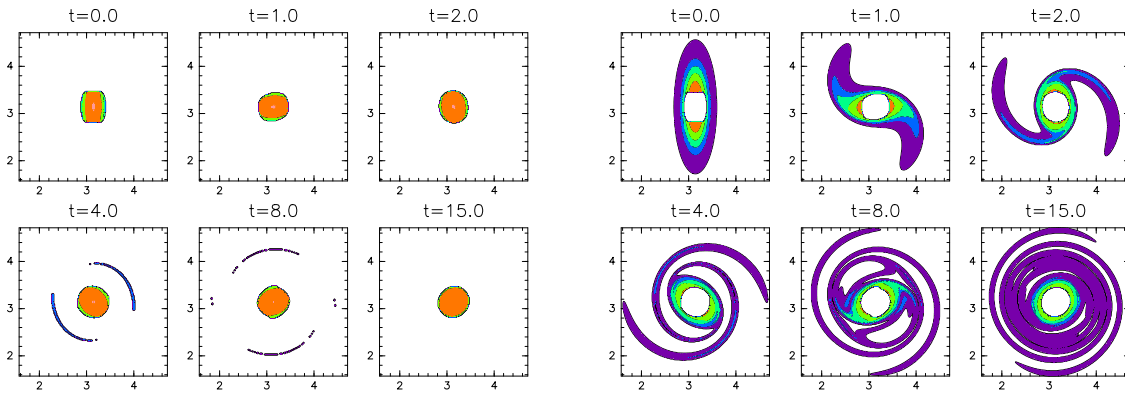


図 4.3 Hua-Klein の基準を用いて分類されたコア領域の渦度場 (左) と周辺領域の渦度場 (右).

#### Hua-Klein の基準を用いた方法

最後に, Hua-Klein の基準を用いた方法についての結果を述べる. Okubo-Weiss の基準を用いた方法と同様に, いくらかフィラメントがコア領域に含まれてしまっている (図 4.3 の左). ただし, 渦のコアとは完全に分離しているので, 渦の中心に存在する渦度と連続な領域を選ぶという条件を加えれば, 渦のコアだけを選ぶことができるだろう.

Hua-Klein の基準は, 渦のかなり中心に近い部分だけがコア領域になるという特徴が見て取れる. これは, 渦度コンターのしきい値をかなり大きい値に設定した結果に近い. しかし, あまりに渦の中心付近だけを取り出してしまうと, 本研究で調べたい周辺領域の渦度の軸対称化への影響を調べる上で適切ではないだろう. なぜなら, 周辺領域が広がるほど, コア領域の軸対称化への影響の大きさが小さく見積もられ, 周辺領域の渦度が軸対称化に強く影響を及ぼすのは自明になるからである.

#### 4.1.3 結論

渦度のしきい値を用いた方法は, 渦度のしきい値というパラメータを含むが, 方法が簡素であるにも関わらず, コア領域と周辺領域をある程度うまく分類できた. 従って, ここでは渦度のしきい値を決める方法を採用することにする.

次節以降の解析では, 表 3.1 に示した  $\omega_{\text{thr}}$  を用いた. それぞれの実験で, 注目する渦度コンターは  $\omega = 6, 7, 8$  の 3 つとした. また, 注目する渦度コンターに対応する流れ関数  $\psi$

ンターは, 初期時刻における渦度コンターの曲率最大点における流れ関数値と最小点における流れ関数値の平均値によって選んだ.

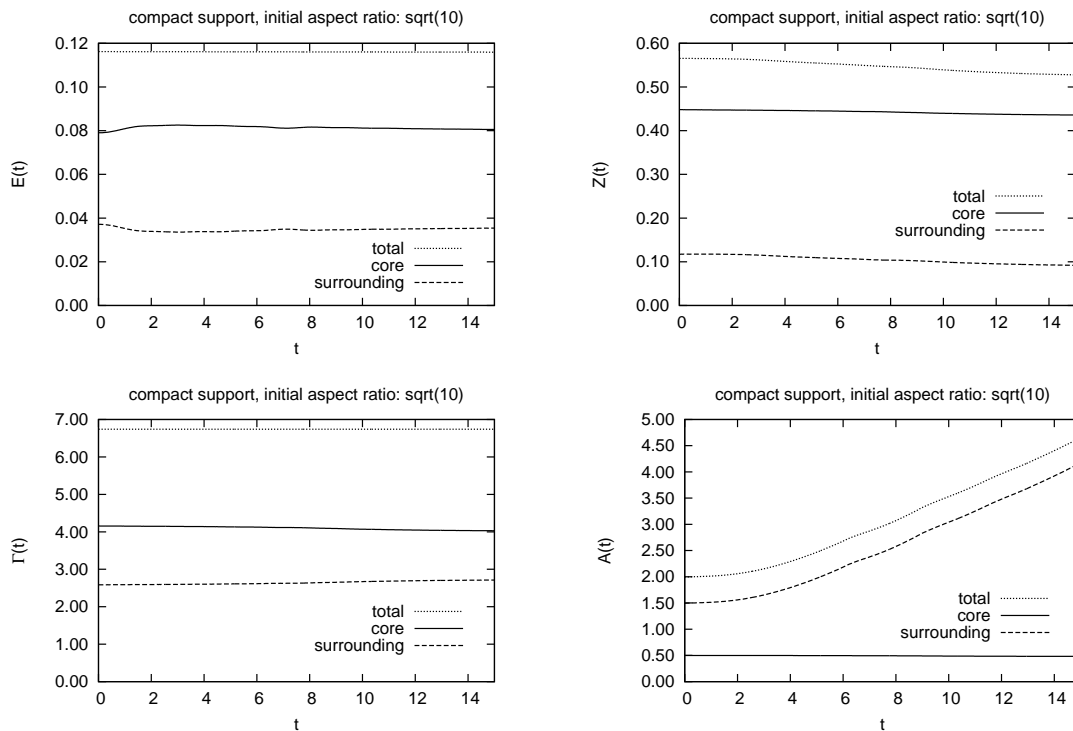


図 4.4 エネルギー (左上), エンストロフィー (右上), 循環 (左下), 渦領域の面積 (右下) の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合. 点線が渦領域全体での量を, 実線がコア領域での量を, 破線が周辺領域での量を表す.

## 4.2 渦のコア領域と周辺領域の統計量

この節では, 3.3 節で議論した統計量を, 渦のコア領域と周辺領域について個別に計算した結果について述べる.

コア領域のエネルギー  $E_c(t)$  は周辺領域のエネルギー  $E_s(t)$  に比べておよそ 2 倍程度であり, 時間発展を通じてほとんど変化しない (図 4.4 の左上). エンストロフィーについても, コア領域のエンストロフィー  $Z_c(t)$  は周辺領域のエンストロフィー  $Z_s(t)$  に比べておよそ 4 倍で, 時間発展を通じてやはりほぼ一定である (図 4.4 の右上). 循環に関しては, コア領域の循環  $\Gamma_c(t)$  は, 周辺領域の循環  $\Gamma_s(t)$  の約 1.5 倍で, やはり時間発展を通じて一定である (図 4.4 の左下). 面積については他の 3 つの量とふるまいが異なり, コア領域の面積  $A_c(t)$  は時間発展を通じてほぼ一定であるが, 周辺領域の面積  $A_s(t)$  は時間が経過するに従い徐々に増加している (図 4.4 の右下). このことは 3.3 節で行った「フィラメントが

粘性項によって拡散したため、面積が増えている」という推測と整合的である。

### 4.3 軸対称化過程におけるフィラメントの役割: 角度差に対する影響

軸対称化過程でフィラメントがコアのアスペクト比の時間発展に与える影響を論じる。Melander, *et al.*(1987) は、フィラメントは楕円の長軸と短軸に対する鏡像非対称な渦度分布に対応し、放出されたフィラメントはコアの軸対称化を促進すると述べた。しかしながら、定量的にどの程度促進されるかの議論はこれまでに行われていない。フィラメントの持つ渦度は小さいため、実際にどの程度の影響があるのかは必ずしも自明ではない。

#### 4.3.1 解析方法

この節では、 $\phi_d$  に対してフィラメントとコアがどう影響したかを調べた結果をまとめる。

フィラメントが  $\phi_d$  に与える影響を調べる手続きは次のとおりである (図 4.5)。

1. フィラメントを含んだ渦度場に対応する流れ関数  $\psi = \Delta^{-1}\omega$  を求める。
2.  $\omega$  と  $\psi$  の場から、注目する渦度コンターとそれに対応する流れ関数コンターを楕円にあてはめる。
3. コンターの角度差  $\phi_d$  を計算する。
4. コア領域の渦度場に対応する流れ関数  $\psi_c = \Delta^{-1}\omega_c$  を求める。
5. 渦度場がコア領域のみの場合のコンターの角度差  $\phi'_d$  を計算する。
6.  $\phi_d - \phi'_d$  を計算する。

$\phi'_d$  はコア領域の渦度に対応する傾きの差であり、 $\phi_d - \phi'_d$  が意味するのは、コア領域の渦度に周辺領域の渦度が加わることによって増えた傾きの差、つまり周辺領域の渦度による傾きの差への寄与である。

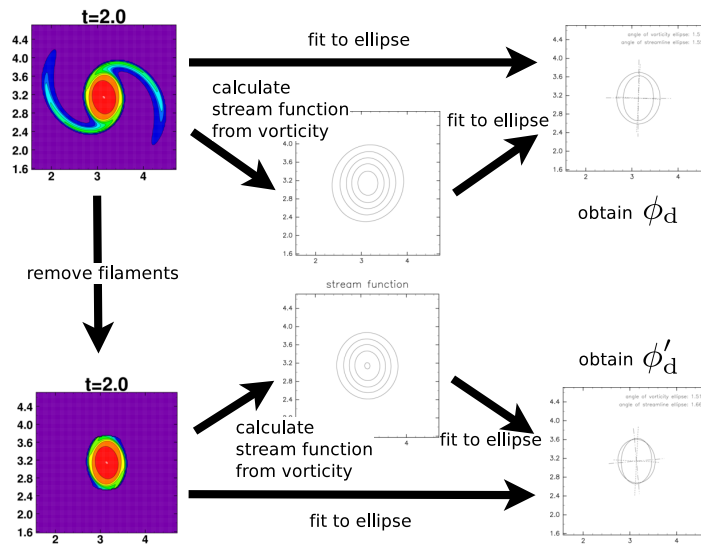


図 4.5  $\phi_d$  と  $\phi'_d$  を計算する手順を表す模式図.

### 4.3.2 結果

渦度コンター  $\omega = 6$  に注目したときの  $\phi_d$ ,  $\phi_d - \phi'_d$  の時系列を図 4.6 に示す. 周辺領域の渦度場による  $\phi_d$  への寄与は,

- 時間的に振動している.
- 初期に注目すると,  $0 \leq t \leq 3$  においては正の寄与が卓越する.
- $0 \leq t \leq 7$  においては, 時間発展するにつれ正の寄与の大きさは減少傾向にある.

これら周辺領域の寄与の正負の時系列パターンは, Melander, *et al.*(1987) のフィラメントの寄与に関する議論と整合的である.

コア領域の渦度場による  $\phi_d$  への寄与は,

- 振動的に寄与する
- コアの  $\phi_d$  に対する寄与は, 周辺領域の寄与に比べて非常に小さい

ということが言える.

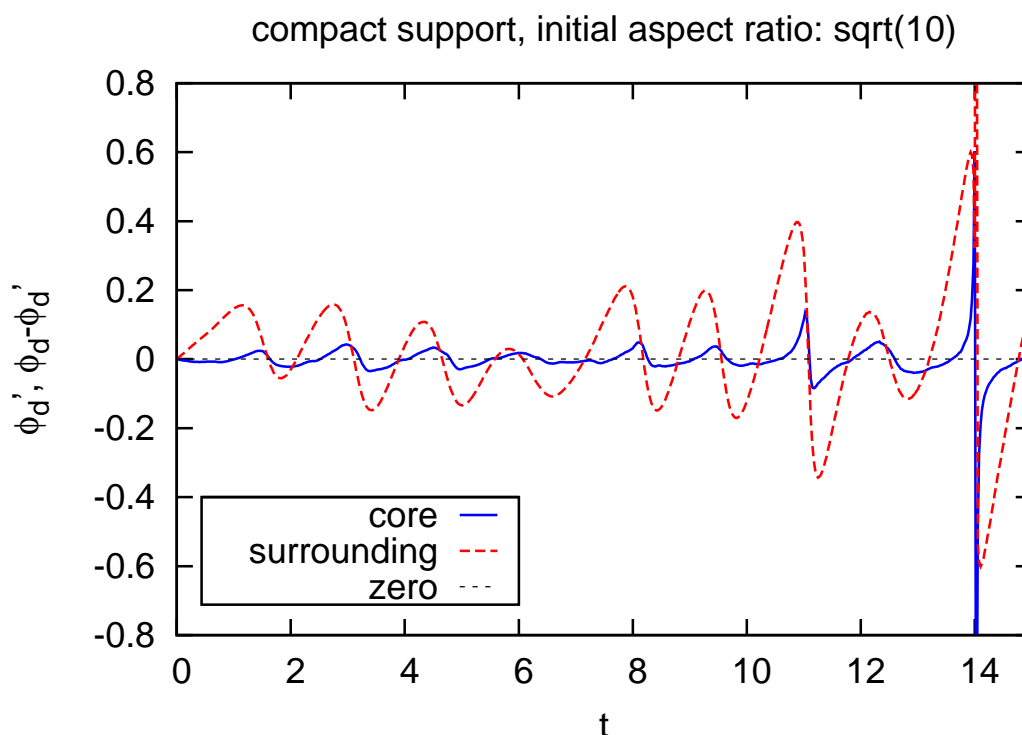


図 4.6 楕円の傾きの差の時系列 ( $\phi_d = \phi_\omega - \phi_\psi$ ). 初期渦度分布がコンパクトサポートで、初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合. 渦度のしきい値を  $\omega_{\text{thr}} = 6$  として領域を分類し、 $\omega = 6$  の渦度コンターに注目した場合.

時間発展の後半 ( $t > 10$ ) において、 $\phi_d$ ,  $\phi_d - \phi_d'$  の両方とも振幅が大きくなっているが、これはアスペクト比がほとんど 1 の時刻に対応しており、楕円の傾きがそれまでの時刻と異なり不連続に変化したことを示唆している。楕円の傾きが不連続に変化することは数値的な誤差のためと考えられる。

次に、渦度コンター  $\omega = 7, 8$  に注目したときの  $\phi_d$ ,  $\phi_d - \phi_d'$  の時系列を図 4.7 に示す。ここで特徴的なのは、コア領域の寄与の振幅が  $\omega = 6$  (図 4.6) に注目したときと異なり、コア領域の振幅が周辺領域と同じくらいに大きいこと、さらに、コア領域と周辺領域のパターンはほぼ逆相関になっていることである。これは、渦度コンターの内側の楕円ほど速く回っている (差動回転している) ことによって説明できる (図 4.8)。まず、コア領域の渦度場に対応する流れ関数コンターの楕円の主軸の傾きは、コア領域の一番外側の渦度コンターの楕円の傾きに揃う傾向があることに注意する。いま、領域を分類するための渦度のしきい値として  $\omega_{\text{thr}} = 6$  を選んでいるので、流れ関数コンターの傾きは  $\omega = 6$  の渦度コンターの傾きにほぼ等しい。注目した渦度コンターが  $\omega = 7$  のとき、楕円形をした渦度コンターの主軸の傾きは、 $\omega = 7$  の楕円に対して  $\omega = 6$  の楕円の方がわずかに遅れている。このとき、 $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円は、 $\omega = 7$  の楕円の主軸に対して右に傾いている



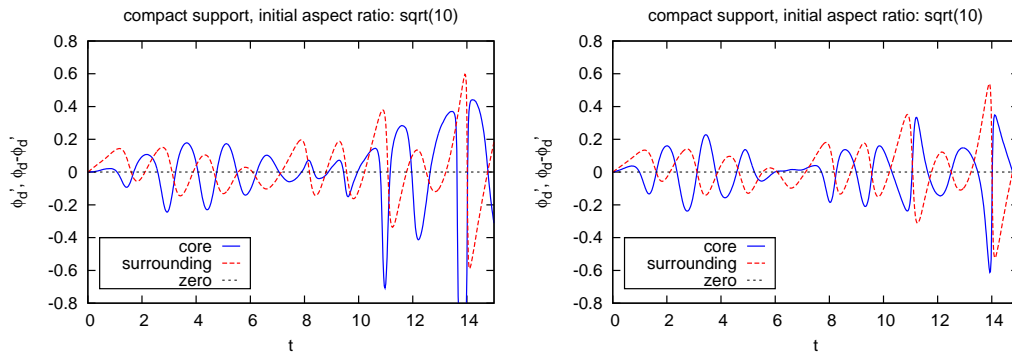


図 4.7 楕円の傾きの差の時系列 ( $\phi_d = \phi_\omega - \phi_\psi$ ). 渦度のしきい値を  $\omega_{\text{thr}} = 6$  とし、 $\omega = 7$  の渦度コンターに注目した場合 (左) と、 $\omega = 8$  の渦度コンターに注目した場合 (右).

ので、 $\phi_d' > 0$  となるような分布になっているのである。一方で、周辺領域の方はコア領域の分が全領域から差し引かれた形になっているので、第 2,4 象限の方に渦度が局在しているような寄与を与えるため、コア領域の寄与と逆相関になると説明できる。これは、 $\omega = 8$  の場合でも同様である。

また、コア領域の寄与が時間的に振動していることは、渦度コンターが差動回転していることによって説明できることを注意しておく。特に時刻  $t = 0$  ではどの渦度コンターも長軸の向きが一致しているため、コア領域のより内部の渦度コンターほど、それより外側に存在するコア領域の渦度によって初期に軸対称化が引き起こされるだろう。実際、 $0 < t < 1$  にわずかにコアが軸対称化に寄与しており、コア領域のより内側の渦度コンターである  $\omega = 8$  の渦度コンターの方が、 $\omega = 7$  の渦度コンターに比べて  $\phi_d$  に対する寄与が大きく現れている (図 4.7)。しかしながら、周辺領域と比べれば、 $\phi_d$  に対する寄与はかなり小さい。これは、コア領域の差動回転によって現れる鏡像非対称性の強さが、周辺領域の鏡像非対称性の強さに比べて弱いためと考えられる。

Melander, *et al.*(1987) では  $t \leq 0.5$  まではコアの渦度勾配強化が  $\phi_d$  に対して正の寄与をする、と指摘している。これは、コア領域について、領域の境界の渦度コンターよりも内側の渦度コンター全てについて当てはまることであると言える。また、後の時刻は複雑になってよくわからないだろう、と言っているが、上の結果はある程度の規則性をもって振動している。

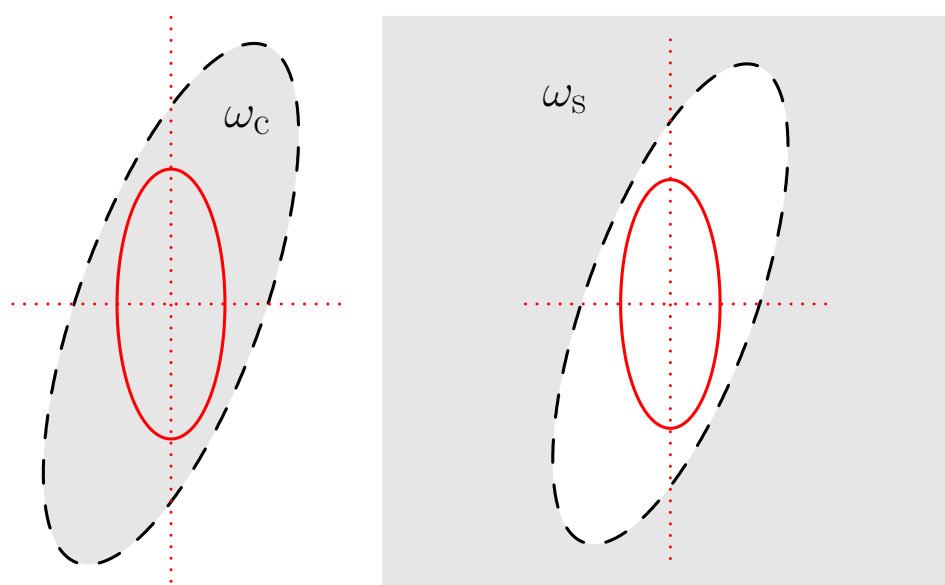


図 4.8 注目する渦度コンター  $\omega$  (赤実線) と、領域を分類するための渦度のしきい値  $\omega_{\text{thr}}$  (黒破線) が異なると、楕円渦が差動回転することによって現れる効果を表した模式図。赤の点線は注目する渦度コンターの軸を表す。(左) コア領域 (灰色で塗った領域) と注目する渦度コンターの位置関係。コア領域の渦度場  $\omega_c$  は、角度差が  $\phi_d > 0$  となるような鏡像非対称成分を持つことを示している。(右) 周辺領域 (灰色で塗った領域) と注目する渦度コンターの位置関係。周辺領域の渦度場  $\omega_s$  は、角度差が  $\phi_d < 0$  となるような鏡像非対称成分を持つことを示している。

### 4.3.3 結論

コア領域と、フィラメントを含んだ周辺領域それぞれの傾きの差  $\phi_d$  に対する寄与を定量的に調べた。その結果、コア領域と周辺領域を分ける境界にあたる  $\omega = 6$  の渦度コンターについては、コア領域はほとんど  $\phi_d$  には寄与しなかった。すなわち、コア領域内部の渦度分布の鏡像非対称性は、 $\omega = 6$  付近の流れ関数コンターの傾きに対してほとんど影響を与えないことが分かった。また、 $\omega = 6$  より内側の  $\omega = 7$  の渦度コンターについては、差動回転の効果により、 $6 \leq \omega \leq 7$  の渦度場が鏡像非対称性分を生み出し、傾きの差  $\phi_d$  に対するコア領域の寄与と周辺領域の寄与は逆相関になっていた。

領域分類の境界と注目した渦度コンターが一致する、 $\omega = 6$  の結果について注目したとき、周辺領域の傾きの差に対する寄与が小さくなっていくのは、時間が経過するにつれフィラメントがコアを囲み、鏡像対称的な分布に近づくから、という Melander らの描像と整合的である。

## 4.4 渦度コンターの変形に対するフィラメントの影響

前節で  $\phi_d$  に対するフィラメントを含む周辺領域の寄与を調べた。従って、式 (3.12) によってアスペクト比の時間微分への影響も見積もることが可能である。しかし、式 (3.12) によって求めたアスペクト比の時間微分は、計算条件によっては誤差は小さくないことが分かっている。[19]

非粘性の場合に渦度は流体に凍結されているので、渦度コンターの法線方向の運動は渦度コンター上の流体粒子の法線方向の速度で調べられる。いま、行っている数値計算では粘性項は十分に小さいので、楕円の長軸の先端と短軸の先端における動径速度を求めれば、直接に楕円形をした渦度コンターのアスペクト比の時間微分を見積もることが可能だろう。また、楕円の長軸の先端 (曲率最大点、と呼ぶ) と短軸の先端 (曲率最小点と呼ぶ) における動径速度を求めることで、楕円の長半径と短半径の時間変化を個別に論じることができるようになる。

本節では、周辺領域の渦度とコア領域の渦度がそれぞれ注目する渦度コンター上に誘起する速度によって、楕円形をした渦度コンターの変形を調べる。楕円形の渦度コンターの変形は、楕円の長半径と短半径の時間変化で代表させることにする。

### 4.4.1 楕円形の変形

いま、ほぼ非粘性であり、コア領域の面積は保存されている。同様に、コア領域内のいずれの渦度コンターに注目した場合でも、それぞれのコンターに囲まれた面積はほぼ保存しているだろう。楕円形が面積を保存しながらアスペクト比を変える場合、面積保存の条件が拘束条件となる。時刻  $t$  で長半径と短半径が  $(a, b)$  の楕円が、面積  $\pi ab$  を保存しながら時刻  $t + \Delta t$  で  $(a + \Delta a, b + \Delta b)$  の楕円となった場合を考える。ここで、 $a > b \geq 1$ 、また、 $a + \Delta a, b + \Delta b \geq 1$  と仮定する。面積が保存する条件から、

$$\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta a}{a} \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta b}{b} = 0 \quad (4.9)$$

となるので、 $\Delta a, \Delta b \ll a, b$  とすると、近似的に

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\Delta b}{b} \quad (4.10)$$

となることが導かれる。これは、楕円形が面積を保存して変形する場合、長半径が増えるならば短半径が減らなければならず、長半径が減るならば短半径が増えなければならないことを意味する。また、 $\Delta a = -r\Delta b$  と変形できることから、短半径の変形量のアスペクト比倍だけ長半径は変形することが分かる。ここで  $r = a/b$  をアスペクト比とした。アスペクト比は  $r \geq 1$  であるから、 $|\Delta a| \geq |\Delta b|$  が成り立つ。すなわち、長半径の変化量は短半径の変化量よりも大きい。

楕円が面積を保存してアスペクト比を変える場合の長半径と短半径以外の楕円の法線方向の変位については付録 C にまとめた。

#### 4.4.2 渦度コンターの曲率最大点および最小点における速度ベクトルの動径成分

まず、曲率最大点と曲率最小点の動径速度の見積もりを行い、パラメータに対する依存性を解析的に調べよう。

渦度コンターの曲率最大点における速度ベクトルの動径成分は、流れ関数コンターと渦度コンターがどちらも楕円形で中心を共有しており、流れ関数コンターはちょうど曲率最大点の真上を通る、と仮定すれば陽に書ける。<sup>\*1</sup>

渦度コンターの楕円の長軸を  $y$  軸に、短軸を  $x$  軸に沿う座標系をとると、曲率最大点における流れ関数コンターの接線の傾きは

$$\frac{(r_\psi^2 - 1) \tan \phi_d}{1 + r_\psi^2 \tan^2 \phi_d} \quad (4.11)$$

と書ける。ここで、 $r_\psi$  は流れ関数コンターの楕円形のアスペクト比である。

従って、渦度コンターの曲率最大点における速度ベクトルの外向き成分は、

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\max})| \frac{(r_\psi^2 - 1) \sin \phi_d}{\sqrt{1 + r_\psi^4 \tan^2 \phi_d}} \quad (4.12)$$

と表すことができる。

<sup>\*1</sup> 詳細な導出は付録 B を参照のこと。

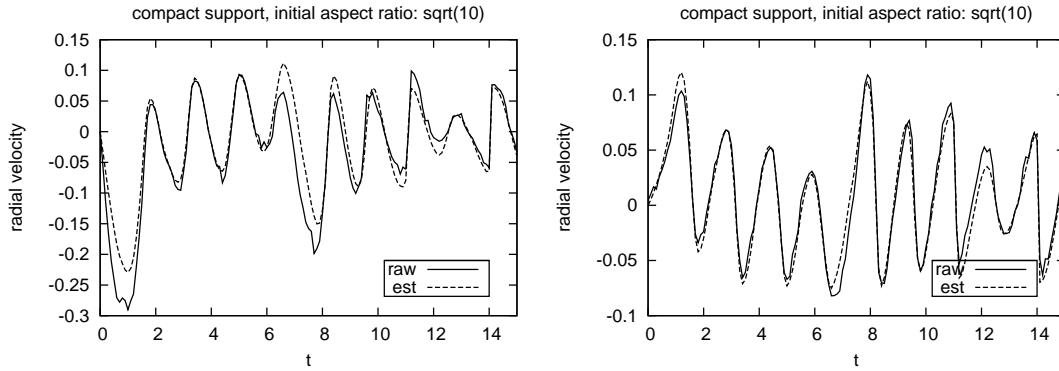


図 4.9 (左)  $\omega = 6$  の楕円の曲率最大点における速度ベクトルの動径成分とその見積り. raw が実測値, est が見積もりを表す. 速度の大きさ  $|\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\max})|$  で規格化している. (右)  $\omega = 6$  の楕円の曲率最小点における速度ベクトルの動径成分とその見積り. 速度の大きさ  $|\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\min})|$  で規格化している.

同様に曲率最小点における流れ関数コンターの接線の傾きは,

$$\frac{\tan^2 \phi_d + r_\psi^2}{(r_\psi^2 - 1) \tan \phi_d} \quad (4.13)$$

となるので, 渦度コンターの曲率最小点における速度ベクトルの外向き成分は,

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\min})| \frac{(r_\psi^2 - 1) \sin \phi_d}{\sqrt{r_\psi^4 + \tan^2 \phi_d}} \quad (4.14)$$

となる.

このようにして求めた渦度コンターの曲率最大点および曲率最小点における速度ベクトルの動径成分の見積もりを, 直接計算した場合と比較する. 直接の計算は, 渦度コンターの曲率最大点と曲率最小点の速度ベクトルを周囲の格子点における速度ベクトルから線形内挿によって求め, 渦度コンターの傾きを用いて行った.

## 結果

渦度コンターの曲率最大点および曲率最小点における速度ベクトルの動径成分を,  $\phi_d$ ,  $r_\psi$  から見積もり, 直接測定した場合と比較したものが図 4.9 である. ただし, それぞれ速度の大きさ  $|\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\max})|$ ,  $|\mathbf{u}(\mathbf{x}_{\min})|$  で規格化している. 見積もりと直接計算の違いは, 渦度コンターと流れ関数コンターを楕円に当てはめたときの誤差によると考えられる. 曲率最大点の動径速度は, フィラメントの形成タイミング ( $0 \leq t \leq 1.5$ ,  $7 \leq t \leq 8$ ) において大

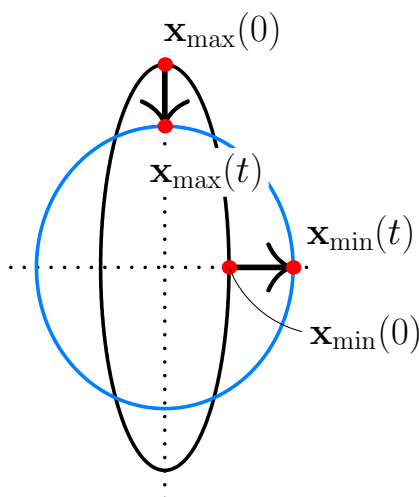


図 4.10 楕円の動径方向の変位を表す模式図.

きく負になっているが、それ以外の時刻と比べて大きさはおよそ倍程度に留まっている。曲率最小点における動径速度も、フィラメントの形成タイミングに大きく正になっており、曲率最大点と同様に軸対称化に寄与する傾向が見られる。

#### 4.4.3 渦度コンターの曲率最大点および最小点の、初期位置からの動径変位

コア領域と周辺領域の渦度が誘導する速度が、ある時刻までにどのくらい軸対称化に寄与したかを調べる。周辺領域の渦度場から計算した速度ベクトル  $\mathbf{u}_s := \mathbf{k} \times \nabla \Delta^{-1} \omega_s$  を用いて、時刻  $t$  における曲率最大点の長軸方向の、初期位置からの変位を

$$\int_0^t \mathbf{u}_s(\mathbf{x}_{\max}(t'), t') \cdot \mathbf{e}_r dt' \quad (4.15)$$

として求めた (図 4.10)。曲率最小点  $\mathbf{x}_{\min}$  においても同様にし、コア領域の寄与も同様にして調べた。なお、時間積分は台形公式を用いた。

#### 結果

コア領域と周辺領域の渦度が誘導する速度による変形量を見積もる前に、まず、速度の時間積分で楕円形をした渦度コンターの変形量をどのくらいの精度で見積もることができるかを調べる。図 4.11 に、長半径の初期値からの変化  $a(t) - a(0)$  と、これを速度の時間

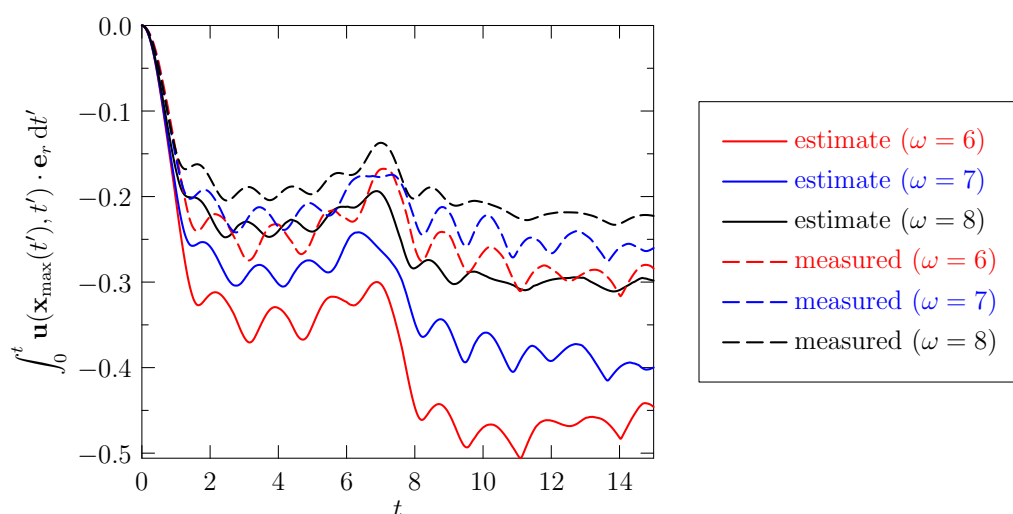


図 4.11 長半径の初期値からの変化 (破線) と、それを速度の時間積分で見積もった場合 (実線) の時間発展 (左).

積分で見積もったものを示した。ここで、 $a(t)$  は時刻  $t$  における長半径である。長半径の初期値からの変化の見積もりは、最大で 1.7 倍程度の誤差が出ている。ほとんどの誤差は、長半径が急激に変化するときにだけに積もっており、アスペクト比が急激に変化しないときのパターンはほぼ同じである。また、負の誤差が生じる傾向があることが分かる。この誤差は、時間積分に伴うものと、フィッティングの誤差に起因するものに分けられるだろう。フィッティングの誤差は、渦度コンターが楕円からずれていることによる、曲率最大点の位置の誤差と、その位置の誤差に伴う速度の誤差がある。位置の誤差は、速度の時間積分で見積もったものと、 $a(t) - a(0)$  の両方に存在する。一方、速度の誤差は、速度の時間積分で見積もったものだけに存在する。長半径の時間変化が大きいところで誤差が大きい事実は、位置の誤差に伴う速度の誤差が大きいことを示唆している。これはなぜかと言うと、接線速度と動径速度では、接線速度の方が圧倒的に大きいため、曲率最大点の位置の誤差がコンターの法線方向の見積もりの誤差になり、本来の動径速度に接線速度に比例した誤差として加わるからである。長半径の見積もりと同様に、短半径の見積もりも最大で 2 倍程度の誤差が出ているが、パターンは類似しており、短半径が急激に変化する時だけに誤差が集中して加わっていることが見て取れる (図 4.12)。長半径の見積もりと同様に、短半径の見積もりは実際よりも負に見積もる傾向があることが分かる。

これから速度場をコア領域と周辺領域によって誘導される速度場に分けて長半径と短半径の長さの時間変化に対する寄与を見積もった結果を示すが、このとき、それぞれの誤差は長さの時間変化量に比例して入ると仮定する。これは、速度に比例して誤差が入る傾向があるからである。

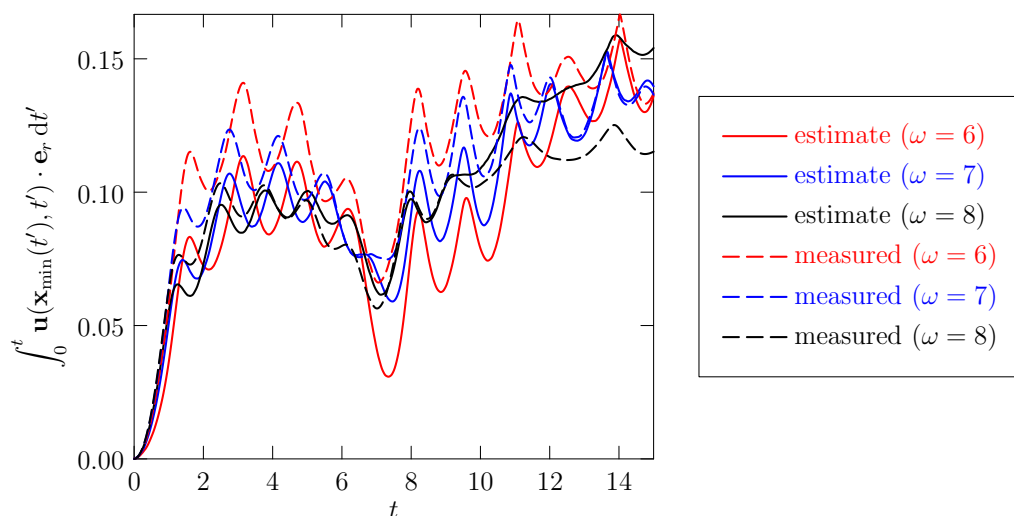


図 4.12 短半径の初期値からの変化 (破線) と、それを速度の時間積分で見積もった場合 (実線) の時間発展.

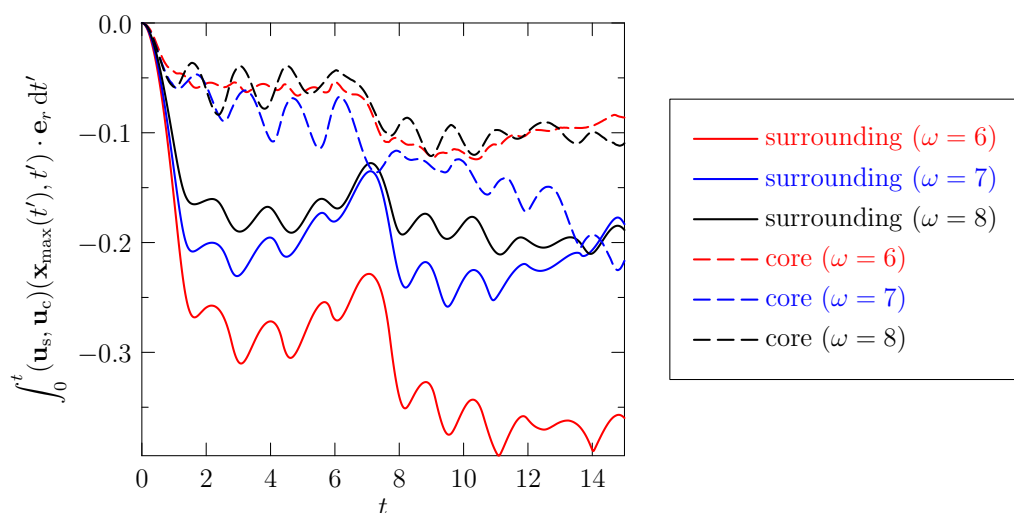


図 4.13 長半径の初期値からの時間変化に対する周辺領域とコア領域による寄与. しきい値を  $\omega_{\text{thr}} = 6$  とした場合.

ここで、長半径と短半径の時間変化量を比べると、4.4.1 節で述べたように、長半径の変化量の方が短半径の時間変化量より大きいという整合的な結果が得られたことを注意しておく。

さて、長半径と短半径の初期値からの変化に対する周辺領域とコア領域の寄与を図 4.13、図 4.14 に示す。まず、長半径の初期値からの時間変化に対する寄与を見ると、 $\omega = 6$  以上の渦度コンターはコア領域と周辺領域の両方が軸対称化に寄与しているが、周辺領域の方



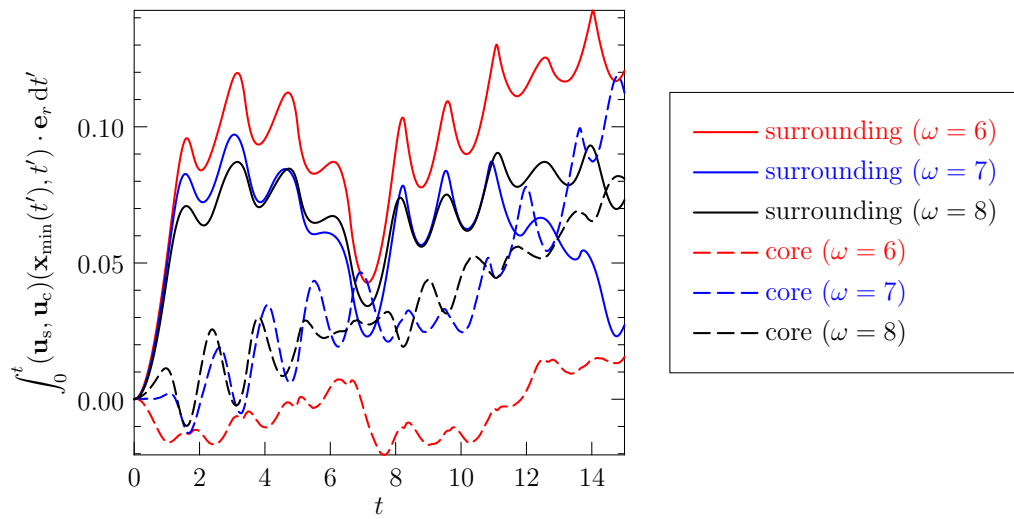


図 4.14 短半径の初期値からの時間変化に対する周辺領域とコア領域による寄与. しきい値を  $\omega_{\text{thr}} = 6$  とした場合.

がコア領域よりも寄与する傾向が強い. どの渦度コンターについても, 周辺領域は  $t < 2$  と,  $7 < t < 8$  において軸対称化に大きく寄与している. これらはフィラメントが形成・放出されるタイミングと一致している.

次に短半径の初期値からの時間変化を見る. 初期のフィラメント形成時には, 長半径の場合と同様に周辺領域は大きく軸対称化に寄与している. 二回目のフィラメント形成時の直前の反軸対称化は短半径の場合にも顕著に見られる. 全体的に長半径の時間発展に比べて,  $1/2$  から  $1/4$  倍になっている.

## 4.5 非対称成分の速度ベクトルの内向き成分への寄与: 直接計算

前節までで、フィラメントを含む周辺領域が楕円渦の軸対称化に寄与することを定量的に調べた。しかし、あくまで周辺領域が軸対称化に寄与することを示しただけであって、フィラメントが軸対称化に寄与したかどうか、したとすればフィラメントのどの部分か、という点については明らかにできなかった。そこで、本節では渦度場のどの部分がどれくらい軸対称化に寄与しているかを調べる。

具体的には、ある点の渦度が曲率最大点と最小点に誘導する動径速度を調べる。流れ関数の積分表示を経由して表された速度の式を見ると、曲率最大点と最小点に誘導する動径速度に対して渦度場の楕円の長軸および短軸に対する鏡像非対称成分だけが効く。従って、まず渦度場を楕円の長軸および短軸に対する鏡像非対称成分を求める。

素直に計算すると、 $\mathcal{M}[\ ]$  を長軸に対して反転した関数を返す演算子とすると、対称成分  $\omega_{s1}$  と非対称成分  $\omega_{a1}$  は、

$$\omega_{s1} = \frac{1}{2}(\omega + \mathcal{M}[\omega]), \quad (4.16)$$

$$\omega_{a1} = \frac{1}{2}(\omega - \mathcal{M}[\omega]) \quad (4.17)$$

となる。しかし、この定義ではもともと渦度が存在しない場所にも渦度が現れるため、解釈が難しくなってしまう。いま、もともとの渦度場は  $\omega \geq 0$  であることを用いて、正の量だけを取り出す演算子を  $\mathcal{P}[\ ]$  とすると、別の定義として、

$$\omega_{s2} = \omega - \omega_{a2}, \quad (4.18)$$

$$\omega_{a2} = 2\mathcal{P}[\omega_{a1}] \quad (4.19)$$

というものも考えられる。この定義では、渦度がもともとゼロの場所はゼロに留まる。以降ではこちらを用いることにする。

こうして求めたのが図 4.15 である。

渦度場の鏡像非対称成分の、曲率最大点および曲率最小点の動径方向の速度に対する寄

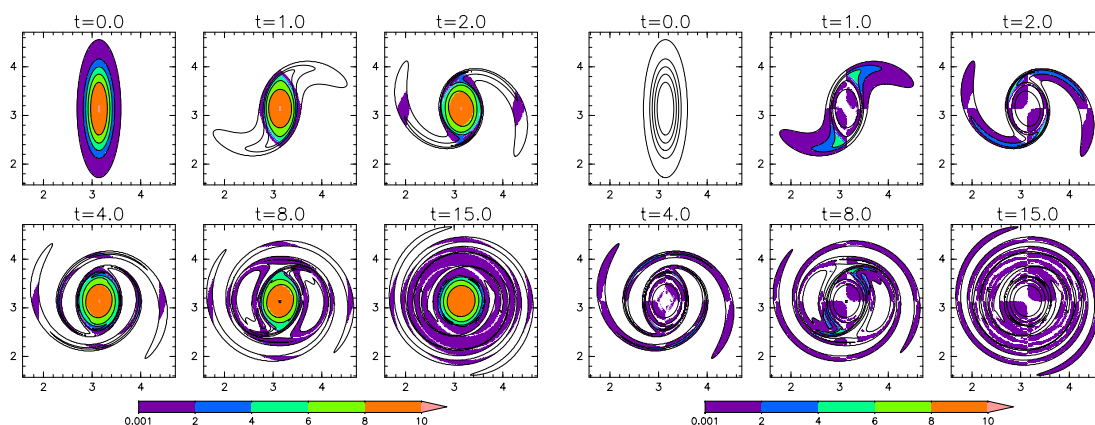


図 4.15 (左) 渦度コンター  $\omega = 6$  の楕円についての渦度場の鏡像対称成分. (右) 鏡像非対称成分.

与を直接計算する方法について述べる.  $x, y$  方向の速度ベクトルの積分表示は

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint \omega(x', y', t) \frac{y - y'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx' dy', \quad (4.20)$$

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \omega(x', y', t) \frac{x - x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx' dy' \quad (4.21)$$

となる. ここで,  $\omega = 6$  の渦度コンターとともに回転する系で,  $y > 0$  の方の曲率最大点  $\mathbf{x}_{\max}(t)$  での動径方向の速度ベクトルに対する各位置での渦度の寄与を調べるために,

$$\frac{1}{2\pi} \omega_{a2}(x, y, t) \frac{x_{\min} - x}{|\mathbf{x}_{\min} - \mathbf{x}|^2} \quad (4.22)$$

をプロットしたのが図 4.16 である. 同様に,  $x > 0$  の方の曲率最小点  $\mathbf{x}_{\min}$  での動径方向の速度ベクトルに対する各位置での渦度の寄与を調べるために,

$$-\frac{1}{2\pi} \omega_{a2}(x, y, t) \frac{y_{\max} - y}{|\mathbf{x}_{\max} - \mathbf{x}|^2} \quad (4.23)$$

をプロットしたのが図 4.17 である.

まず, 曲率最大点における動径速度に対する渦度場の鏡像非対称成分の寄与について見てみる. 渦の中心  $(\pi, \pi)$  より上側にある曲率最大点に注目する. まず, 初期  $t = 0$  では鏡像非対称成分が存在しないため, 動径速度には何の影響も及ぼさない. 外側の方が角度方向の速度がゆっくりであることから, 外側の渦度は中心より遅れて流され, フィラメントが形成される. これによってできた鏡像非対称成分は  $\omega = 6$  の楕円とともに回転する回転系から見れば,  $x > \pi$  に存在する ( $t = 1.0$ ). 従って, 曲率最大点の動径速度に対して負の寄与をする. しかし, 時間がたつにつれ, フィラメントの根本の, フィラメントの先端に比

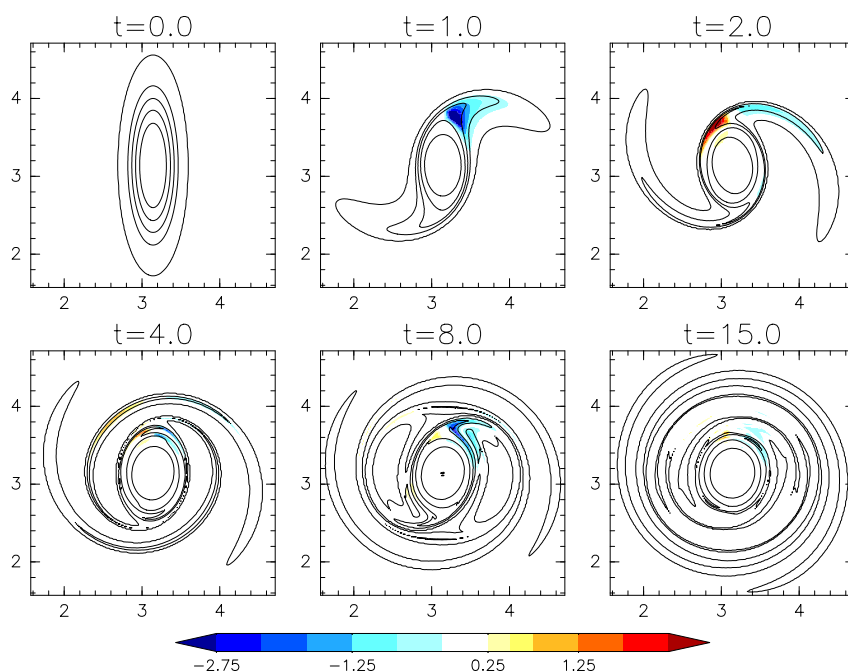


図 4.16 渦度コンター  $\omega = 6$  の楕円についての渦度場の鏡像非対称成分  $\omega_{a2}(x, y)$  の曲率最大点の動径速度に対する寄与

べて強い渦度は  $x < \pi$  に引き込まれていく。これは、フィラメントの根本の  $x < \pi$  に存在する一部分が、速度淀み点の内側あるいは内側のセパトリクスの外側にあるため、渦の周囲に巻き付くような運動をするためである (図 3.8 の  $t = 2.0$  を参照.)。これによって、曲率最大点の動径速度に対して正の寄与をする領域ができ、 $x > \pi$  に存在するフィラメントの負の寄与をキャンセルし、アスペクト比の減少をストップさせる ( $t = 2.0$ )。フィラメントにあった強い渦度は粘性によって散逸し、また、フィラメントの分布が楕円渦の長軸に対して線対称になることから、動径速度に対する寄与はキャンセルされるようになる ( $t = 4.0$ )。フィラメントは再び  $t = 8.0$  で形成され、アスペクト比の減少を促す。そして、最後にはまた楕円渦の長軸に対して線対称な分布になり、動径速度はほぼゼロに落ち着き、アスペクト比はほぼ一定になる。ここで、渦の中心より下側にある鏡像非対称成分はほとんど寄与しなかったことを注意しておく。

次に、曲率最小点における動径速度に対する渦度場の鏡像非対称成分の寄与について見てみよう。渦の中心  $(\pi, \pi)$  より右側にある曲率最小点に注目する。曲率最大点の場合と同様に、 $t = 0$  では鏡像非対称成分が存在しないため、動径速度に対する寄与はゼロである。その後、フィラメントが形成されたときは、 $y > \pi$  にある鏡像非対称成分と  $y < \pi$  にある鏡像非対称成分のうち、 $y > \pi$  にある鏡像非対称成分の方が曲率最大点に近いので、動径速度は小さい正の量になる。曲率最大点での動径速度がほぼゼロになるころ ( $t = 2.0$ ) と

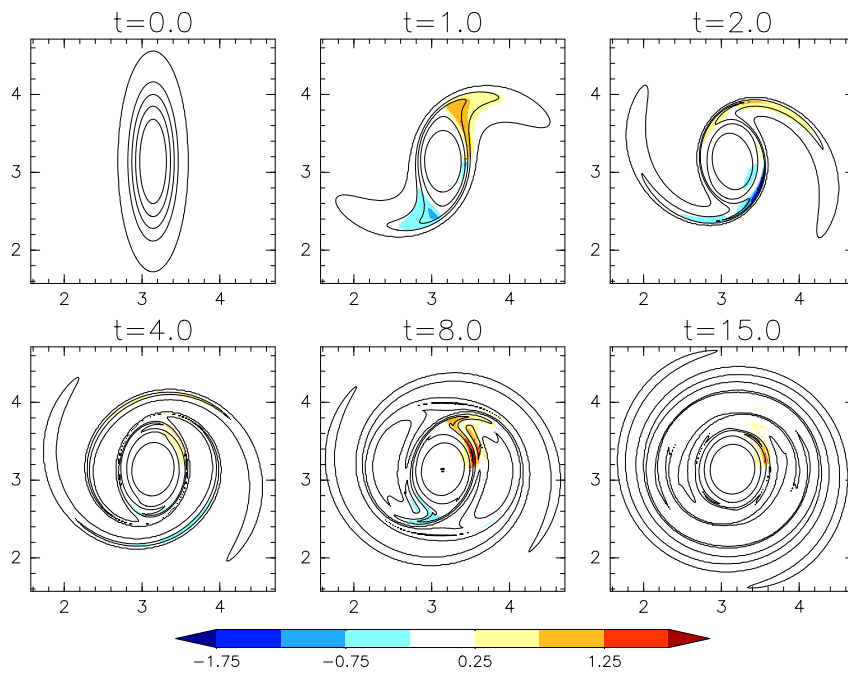


図 4.17 渦度コンター  $\omega = 6$  の楕円についての渦度場の鏡像非対称成分  $\omega_{a2}(x, y)$  の曲率最小点の動径速度に対する寄与

同時に曲率最小点でも動径速度は同じ理由でゼロになる。

曲率最小点での動径速度が小さい理由は、曲率最大点と比べて、渦度の鏡像非対称性が強い領域、すなわち、2本のフィラメントの根本からの距離にあまり差がないこと、また、距離が遠いことの2点であると言える。4.4.1節で述べたように、楕円が面積を保存して変形するには短半径の時間変化に比べて長半径の時間変化が大きくなってはいけな。このことは、フィラメントの根本と曲率最大点と曲率最小点の位置関係によって巧妙に実現されている。

## 4.6 軸対称化に対するフィラメントの影響のパラメータ依存性

これまでに、初期渦度分布がコンパクトサポートで、初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合について、軸対称化に対するフィラメントの影響を議論した。この節では、これまでに見た軸対称化に対するフィラメントの影響についての議論を、他の実験条件の場合について適用できるかどうかを述べる。全ての計算での主要な図は、付録 D に載せた。

しきい値による領域の分類は、不連続な渦度分布でアスペクト比が 6 のパラメータ以外については、概ねうまくコア領域と周辺領域を分類できている。不連続な渦度分布でアスペクト比が 6 のパラメータについては、二度目のフィラメント放出で渦の中心付近の渦度コンター（例えば  $\omega = 8$ ）について、楕円形から多少ずれている様子が見られる。これは、一つにはコア領域の渦度コンターに誘導される速度が、楕円形から楕円形への変形を引き起こすような速度でない可能性が考えられる。もう一つには、他の初期渦度分布に比べてコア領域の渦度勾配が小さいため、散逸があまり効いていないため小さなスケールの構造が残っている可能性が考えられる。4.1.1 節でコア領域と周辺領域を分類するときコア領域内の渦度コンターに対して「コア領域内の渦度コンターのうち、領域内で閉じたコンターについては時間発展を通じてほぼ楕円形を保つ」ことを要請したが、この要請は不連続な渦度分布で初期アスペクト比が 6 の場合には都合が悪い。なぜなら、渦の中心にかなり近い  $\omega = 9$  の渦度コンターでさえ、フィラメント状の細かい構造を伴うからである。要請に従えばコア領域の渦度場が非常に狭い領域にのみ限られ、領域を分類することで意味のある情報を引き出すことができなくなる。

フィラメントを含む周辺領域の軸対称化に対する影響については、軸対称化が起こる場合については初期渦度分布がコンパクトサポートで、初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合の議論が全ての実験条件について言える。初期渦度分布が不連続な渦度分布の場合で、アスペクト比が 1.5 の場合には、曲率最大点における動径変位について、コア領域の寄与が周辺領域の寄与よりも大きいことが注意を引くが、大きさが非常に小さいことも注意すべきである。はっきりとは原因は分からないが、楕円のフィッティングに伴う誤差によって生じたみかけ上のものである可能性が高いと考えられる。

曲率最大点と曲率最小点での動径速度に対する渦度場の影響についても、初期渦度分布がコンパクトサポートで、初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  の場合の議論がそのまま適用できる。

## 第5章

# まとめ

2次元乱流中の素過程としての渦について理解するという動機の下、非一様な渦度分布を持つ楕円渦の軸対称化過程におけるフィラメントの役割について数値実験を用いて調べた。

Melander, *et al.*(1987) は、運動学的な考察によってフィラメントが軸対称化を引き起こすと結論した。まず、楕円渦のコアに近い渦度コンターとその付近の流れ関数コンターの両方がほぼ楕円形であることに注目し、それらの角度差  $\phi_d$  の符号と、渦度コンター上の速度場が渦度コンターを軸対称化するかどうかとが一一に対応していることを見出した。これを彼らは「軸対称化原理」と名付けた。次に、 $\phi_d$  は渦度の鏡像非対称成分によってゼロからずれることを、流れ関数のグリーン関数表示によって定性的に説明した。最後に、回転系での流れ関数に基づき、フィラメントが輸送される様子を定性的に説明し、淀み点によってフィラメントが形成されること、そのフィラメントによって軸対称化が引き起こされると説明した。

Melander, *et al.*(1987) は、以上で登場した物理量のうち、 $\phi_d$  しか具体的に計算していない。そこで、本研究では、Melander, *et al.*(1987) らの主張を定量的に裏付けることを行った。

まず、 $\phi_d$  に対するフィラメントの影響を調べた。コア領域と周辺領域の境界にある渦度コンターについて、大きく軸対称化が起こる時間発展の初期においては  $\phi_d$  はほとんどゼロであり、フィラメントが存在することによって  $\phi_d$  がゼロから大きくずれることが分かった。特に、初期に  $\phi_d > 0$  となることは、Melander, *et al.*(1987) のアスペクト比の時間微分の見積もり (3.12) 式から、軸対称化することを示唆する。コア領域の渦度場は、領

域の境界の渦度コンターに伴う  $\phi_d$  に対してほとんど寄与しないから、軸対称化はフィラメントによって引き起こされたと言える。

次に、楕円形をした渦度コンターの長半径と短半径の時間変化に対してそれぞれの領域がどのように影響しているかを調べた。これは、フィラメントとコアが曲率最大点と最小点に誘導する速度を用いて調べた。曲率最大点と最小点に誘導される動径方向の速度は、 $\phi_d$  が時間経過に伴い正負に振動するのと同期して正負に振動する。従って、ある時刻までにどのくらい軸対称化に寄与したかを調べるために、速度を時間方向に積分して、曲率最大点と最小点の初期位置からの動径変位に対するそれぞれの領域の影響を調べた。その結果、周辺領域の渦度による変位はコア領域の渦度による変位に比べて数倍程度大きいということが分かった。

最後に、周辺領域全体からの寄与とコア領域全体からの寄与をそれぞれ求めるのではなく、渦度場のそれぞれの位置の渦度が、渦度コンターの曲率最大点と曲率最小点にどの程度の動径速度を誘導するかを調べた。その結果、曲率最大点では近い方のフィラメント一本から大きく影響を受け、一方で曲率最小点では両方のフィラメントから大きさが同じくらいで互いに逆向きの速度が誘導されるため、曲率最大点に比べて速度は小さくなることが分かった。こうして得られた速度場は、少なくとも曲率最大点と曲率最小点において、 $\phi_d > 0$  のときの速度場と整合的である。楕円が面積を保存してアスペクト比の異なる楕円に変形するには、長半径が短半径よりも大きく変移しなければならない。逆に言えば、楕円が面積を保存してアスペクト比だけを変えるように変形するのは、二本のフィラメントと曲率最大点と曲率最小点が適切な位置関係にあるからである。ここで一つの疑問がわきあがる。それは、 $\phi_d$  によって説明される速度場は、常に楕円形を保ってアスペクト比を変えるような速度場なのだろうか、ということである。もし楕円形を保ってアスペクト比を変えるような速度場となる条件が限定されるならば、それはどのようなものだろうか。この疑問の解決は将来の課題である。

将来の課題として、さらに次の二つが挙げられる。一つ目は、アスペクト比と楕円の動径速度、そして  $\phi_d$  の時間的な振動が何によって起こっているのか、ということである。 $\phi_d$  の正負と、フィラメントの根本と注目した楕円の位置関係が対応していることは分かっているが、時間について振動的なパターンを示す理由は明らかではない。二つ目は、淀み点がかもともと渦領域の内側でない場合にいつフィラメント放出が起こるか、どのくらいのフィラメントが放出されるか、という問題である。これは2次元乱流中での渦のフィラメント放出を考えるにあたって、明らかにしておくべき問題である。



# 謝辞

本研究を遂行するにあたり、指導教官である神戸大学 岩山隆寛准教授には、議論に多くの時間を費して頂き、なかなか研究が進まないときにも辛抱強くご指導して頂きました。また、研究に関わらず様々な助言と示唆を頂きました。深く感謝致します。

神戸大学 林祥介教授、岡山大学 はしもとじょーじ准教授、神戸大学 高橋芳幸博士、同大学 西澤誠也博士には、本読みゼミやセミナーにおいてはもちろん、研究室活動全般を遂行するにあたり有益な助言を頂きました。神戸大学 山中大学教授、同大学 荻野慎也准教授、気象研究所 末吉雅和博士、京都大学 東邦昭博士、情報通信研究機構 森川靖大博士、京都大学 佐々木洋平博士、神戸大学 納多哲史氏、をはじめとして、神戸大学 理学研究科 地球および惑星大気科学研究室、同研究科 連携講座大気海洋環境科学研究室、同研究科 惑星科学研究センター、および 旧大気水圏科学研究室の皆様には、日常的な研究室活動などを通じて多種多様な事柄について学ぶ機会を頂きました。ここに深く感謝の意を表す次第です。

本研究の数値実験において、データ入出力には地球流体電脳倶楽部の gtool5 Fortran 90/95 ライブラリを、データ解析には電脳 Ruby プロジェクトの成果物を利用させて頂きました。また、本論文の作成には  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$  を、図の作成には gnuplot, Asymptote, そして電脳 Ruby プロジェクトの成果物を利用させて頂きました。感謝を申し上げます。



## 付録 A

# 楕円への当てはめ

楕円にフィッティングするときに必要な知識をまとめる.

### A.1 楕円の正準形と 2 次曲線

点列を楕円にフィッティングするとき, ふつうは 2 次曲線の係数として楕円を得る. ここで, 楕円の正準形 (canonical form) と 2 次曲線の標準形との関係をまず明らかにしておく.

#### A.1.1 座標系

デカルト座標系  $X$  をとる. 座標系  $X$  を並行移動し, 楕円の中心  $(x_c, y_c)$  に原点を取った座標系  $X'$  を定義する. 次に, 座標系  $X'$  を原点を軸として楕円の主軸の傾き  $\theta$  だけ回転した座標系  $X''$  を定義する. (つまり,  $X''$  の  $x$  軸が楕円の主軸に一致.)

このとき, 点  $P$  の  $X$  座標系での座標  $(x, y)$ ,  $X'$  座標系での座標  $(x', y')$ ,  $X''$  座標系での座標  $(x'', y'')$  の関係は,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

となる.\*1

### A.1.2 X 座標系から X' 座標系へ

二次曲線の一般形は,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (\text{A.5})$$

である. これを楕円の正準形に変形していく. まず  $x'$  座標で書くと,  $x = x' + x_c$ ,  $y = y' + y_c$  なので,

$$\begin{aligned} a(x' + x_c)^2 + b(x' + x_c)(y' + y_c) + c(y' + y_c)^2 + d(x' + x_c) + e(y' + y_c) + f \\ = ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + (2ax_c + by_c + d)x' + (2cy_c + bx_c + e)y' \\ + ax_c^2 + bx_cy_c + cy_c^2 + dx_c + ey_c + f = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となる. ここで, 記述を簡単にするために  $x'$ ,  $y'$  に依存しない項を  $g$  と置く.

$(x_c, y_c)$  を楕円の中心 ( $X', X''$  座標系の原点) とするには,  $x'$ ,  $y'$  の係数をゼロとするよ

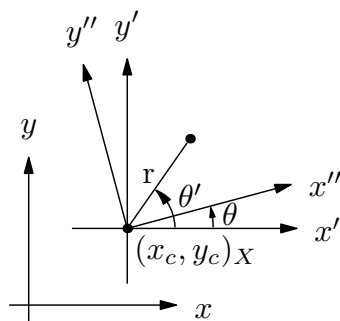


図 A.1 X 座標系,  $X'$  座標系,  $X''$  座標系の関係.

\*1 これは,  $X'$  座標系と  $X''$  座標系の関係は, 極座標系を使って,

$$(x', y') = (r \cos \theta', r \sin \theta'), \quad (\text{A.3})$$

$$(x'', y'') = (r \cos(\theta' - \theta), r \sin(\theta' - \theta)) \quad (\text{A.4})$$

と表すと簡単に示せる.

うに  $x_c, y_c$  を選ぶとよい\*2. すなわち,

$$\begin{cases} 2ax_c + by_c + d = 0, \\ 2cy_c + bx_c + e = 0, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \frac{1}{b^2 - 4ac} \begin{pmatrix} 2c & -b \\ -b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

と求められる.

### A.1.3 $X'$ 座標系から $X''$ 座標系へ

次に  $X'$  座標系から  $X''$  座標系に移ると,

$$ax'^2 + bx'y' + cy'^2 + g = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} a(x'' \cos \theta - y'' \sin \theta)^2 + b(x'' \cos \theta - y'' \sin \theta)(x'' \sin \theta + y'' \cos \theta) \\ + c(x'' \sin \theta + y'' \cos \theta)^2 + g = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} (a \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta)x''^2 + (a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta - b \cos \theta \sin \theta)y''^2 \\ + [-2a \sin \theta \cos \theta + 2c \sin \theta \cos \theta + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]x''y'' + g = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$\theta$  が ( $X'$  座標系の  $x'$  軸から測った) 楕円の長軸の傾きと一致するためには,  $x''y''$  の係数がゼロになればよい. この条件から  $\theta$  は

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a - c} \quad (\text{A.13})$$

となる. 記述を簡単にするために,  $x''^2, y''^2$  の係数をそれぞれ  $h, k$  と置く:

$$h := a \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta, \quad (\text{A.14})$$

$$k := a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta - b \cos \theta \sin \theta. \quad (\text{A.15})$$

すると, 楕円を表す式は

$$hx''^2 + ky''^2 + g = 0 \quad (\text{A.16})$$

となるので,

$$A := \sqrt{-g/h}, \quad (\text{A.17})$$

$$B := \sqrt{-g/k} \quad (\text{A.18})$$

---

\*2 これが正当であることは, 楕円の正準形を回転させたときに,  $x', y'$  の項が現れないことで確かめられる.

と置くと、楕円の正準形 (canonical form)

$$\frac{x''^2}{A^2} + \frac{y''^2}{B^2} = 1 \quad (\text{A.19})$$

が求まる。従って、二次曲線を表すパラメータ  $(a, b, c, d, e, f)$  から楕円のパラメータ

- $A$ : 長軸半径
- $B$ : 短軸半径
- $\theta$ : 長軸の傾き
- $(x_c, y_c)$ : 楕円の中心座標

を求めることができた。

逆に、 $a, b, c, d, e, f$  を  $A, B, \theta, x_c, y_c$  で表すと、

$$a = (A^2 + B^2) \cos^2 \theta, \quad (\text{A.20})$$

$$b = (B^2 - A^2) \sin 2\theta, \quad (\text{A.21})$$

$$c = (A^2 + B^2) \sin^2 \theta, \quad (\text{A.22})$$

$$d = -2x_c(A^2 + B^2) \cos^2 \theta - 2y_c(B^2 - A^2) \sin 2\theta, \quad (\text{A.23})$$

$$e = -2y_c(A^2 + B^2) \sin^2 \theta - 2x_c(B^2 - A^2) \sin 2\theta, \quad (\text{A.24})$$

$$f = (A^2 + B^2) \cos^2 \theta x_c^2 + (B^2 - A^2) \sin 2\theta x_c y_c + (A^2 + B^2) \sin^2 \theta y_c^2 - A^2 B^2 \quad (\text{A.25})$$

となる。

## A.2 楕円へのフィッティング

点列を与えたときに、その点列に近い楕円を得る方法 (Fitzgibbon, *et al.*, 1999) [6] を以下にまとめる。

まず、二次曲線を次のように表記する。

$$\vec{a} := (a, b, c, d, e, f)^T, \quad (\text{A.26})$$

$$\vec{x} := (x^2, xy, y^2, x, y, 1)^T, \quad (\text{A.27})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{D} = 0. \quad (\text{A.28})$$

これから、design matrix という行列  $D$  を次のように定義。

$$D := (\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \dots) \quad (\text{A.29})$$

さらに, design matrix から scatter matrix  $S$  を定義.

$$S := D^T D \quad (\text{A.30})$$

次に constraint matrix  $C$  を定義.

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

さて, 楕円の 2 次曲線のパラメタを得るには,

$$S\vec{u} = \lambda C\vec{u}, \quad (\text{A.32})$$

$$\vec{u}^T C\vec{u} = 0 \quad (\text{A.33})$$

の二つの式を解けばよい. 前者の一般化固有値問題を解くと, 正の固有値  $\lambda_p$  がただ一つ現れる. その正の固有値に対応した固有ベクトル  $\vec{a}$  を用いて, 規格化因子  $\mu$  を

$$\mu := \sqrt{\frac{1}{\vec{a}^T C \vec{a}}} \quad (\text{A.34})$$

と求める. そうして得た

$$\vec{u} = \mu \vec{a} \quad (\text{A.35})$$

が求める楕円の 2 次曲線のパラメタとなる.





## 付録 B

# コンターの角度差と曲率最大点および最小点での速度の動径成分の関係

ここでは、楕円形をした等渦度線と楕円形をした流れ関数コンターの角度差  $\phi_d$  と曲率最大点と最小点における速度ベクトルの動径成分の関係を導く。

等渦度線の楕円は長軸半径  $a_\omega$ 、短軸半径  $b_\omega$  として、デカルト座標系  $S$  を、 $x$  軸に短軸が、 $y$  軸に長軸が沿うように設定する。ここでアスペクト比は  $r_\omega := a_\omega/b_\omega$  とする。

流れ関数コンターの楕円も同様に、長軸半径  $a_\psi$ 、短軸半径  $b_\psi$  として、デカルト座標系  $S'$  を、 $x'$  軸に短軸が、 $y'$  軸に長軸が沿うように設定する。ここでアスペクト比は  $r_\psi := a_\psi/b_\psi$  とする。

ここで、 $S$  系と  $S'$  系は原点を共有し、 $S'$  系は  $S$  に対して反時計回りに  $\phi_d$  だけ傾いているとする。このとき  $S$  系と  $S'$  系の座標変換は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_d & -\sin \phi_d \\ \sin \phi_d & \cos \phi_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

となることを注意しておく。

このとき、等渦度線の楕円の曲率最大点および曲率最小点の上を通る流れ関数コンターの傾きを求めよう。ただし、流れ関数コンターの楕円の大きさは、曲率最大点および最小点を通るように、相似的に変形するとする。

等渦度線の楕円と流れ関数コンターの楕円が満たす式は

$$\frac{x^2}{b_\omega^2} + \frac{y^2}{a_\omega^2} = 1, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{x'^2}{b_\psi^2} + \frac{y'^2}{a_\psi^2} = 1 \quad (\text{B.3})$$

である。等渦度線の楕円の円周上の点の  $S'$  系での表現を  $(x'_\omega, y'_\omega)$  と書くと,  $(x'_\omega, y'_\omega)$  を通る流れ関数コンターの楕円は,  $(a_\psi, b_\psi) = (r_\psi t, t)$  として, (B.3) 式に代入すると,

$$t = \sqrt{x_\omega'^2 + \frac{y_\omega'^2}{r_\psi^2}} \quad (\text{B.4})$$

という  $t$  を取れば良いことが分かる。

さて,  $(x'_\omega, y'_\omega)$  における, 流れ関数コンターの楕円の接線の式は,

$$x'_\omega \frac{x'}{b_\psi^2} + y'_\omega \frac{y'}{a_\psi^2} = 1 \quad (\text{B.5})$$

である。  $y$  について解くと,

$$y' = -\frac{r_\psi^2 x'_\omega}{y'_\omega} x' + \frac{a_\psi^2}{y'_\omega} \quad (\text{B.6})$$

となる。ここで,  $S'$  系で表した座標  $(x', y')$  を  $S$  系の座標  $(x, y)$  に書き直して整理すると,

$$y = -\frac{\tan \phi_d + r_\psi^2 \frac{x'_\omega}{y'_\omega}}{1 - r_\psi^2 \frac{x'_\omega}{y'_\omega} \tan \phi_d} x + \frac{a_\psi^2}{y'_\omega} \frac{1}{\cos \phi_d \left(1 - r_\psi^2 \frac{x'_\omega}{y'_\omega} \tan \phi_d\right)} \quad (\text{B.7})$$

となる。こうして, 等渦度線の楕円上を通る流れ関数コンターの接線の傾きが求まった。

等渦度線の楕円の曲率最大点  $(x_\omega, y_\omega) = (0, a_\omega)$  での傾きは,  $(x'_\omega, y'_\omega) = (-a_\omega \sin \phi_d, a_\omega \cos \phi_d)$  となるので,  $x'_\omega/y'_\omega = -\tan \phi_d$  だから,

$$\frac{\tan \phi_d (r_\psi^2 - 1)}{1 + r_\psi^2 \tan^2 \phi_d} \quad (\text{B.8})$$

となる。いま, 速度ベクトルはこの接線に沿っているので, 速度ベクトルの動径成分を速度ベクトルの大きさを割った量は,

$$-\frac{\sin \phi_d (r_\psi^2 - 1)}{\sqrt{1 + r_\psi^4 \tan^2 \phi_d}} \quad (\text{B.9})$$

となる.\*<sup>1</sup>

同様に、曲率最小点  $(x_\omega, y_\omega) = (b_\omega, 0)$  での傾きは、 $(x'_\omega, y'_\omega) = (b_\omega \cos \phi_d, b_\omega \sin \phi_d)$  となるので、 $x'_\omega/y'_\omega = 1/\tan \phi_d$  だから、

$$\frac{\tan \phi_d^2 + r_\psi^2}{(r_\psi^2 - 1) \tan \phi_d} \quad (\text{B.10})$$

となる。速度ベクトルの動径成分を速度ベクトルの大きさを割った量は、

$$\frac{\sin \phi_d (r_\psi^2 - 1)}{\sqrt{r_\psi^4 + \tan^2 \phi_d}} \quad (\text{B.11})$$

となる。

---

\*<sup>1</sup> 導出は次のように行った。まず、傾きの式において、 $x$  軸方向に 1 進んだときに、傾きの式の  $x$  の比例係数の分だけ進むことに注意する。このとき斜辺の長さが速度ベクトルの大きさに比例するので、傾きの式の  $x$  の比例係数の形に注目して、直交する二辺の長さが  $1 + r_\psi^2 \tan^2 \phi_d$ ,  $|\tan \phi_d (r_\psi^2 - 1)|$  のような直角三角形を考えて、斜辺の大きさに対する比を計算する。最後に、 $\phi_d$  の符号と速度ベクトルの向きの対応を考慮して符号を選ばばよい。



## 付録 C

# 楕円から楕円への変形

長軸半径  $a_0$ , 短軸半径  $b_0$  の楕円 0 が, 面積を保存しながら長軸半径  $a_1$ , 短軸半径  $b_1$  の楕円 1 に変形する時の, 楕円に垂直な方向の変位を調べる.

長軸を  $y$  軸に, 短軸を  $x$  軸に沿って楕円を配置したとき, 楕円 0 の満たす式は

$$\frac{x^2}{b_0^2} + \frac{y^2}{a_0^2} = 1 \quad (\text{C.1})$$

である. この楕円 0 上の点  $(x_0, y_0)$  を通る楕円の接線の式は,

$$y = -\frac{x_0 r_0^2}{y_0} x + \frac{a_0^2}{y_0} \quad (\text{C.2})$$

である. ここで, 楕円 0 のアスペクト比  $r_0 := a_0/b_0$  を用いた. 一方, この楕円 0 上の点  $(x_0, y_0)$  から降ろした楕円の垂線の式は, 接線の式の比例係数の逆数に負号を付けたものが比例係数になることから,

$$y = \frac{y_0}{x_0 r_0^2} x + y_0 \left(1 - \frac{1}{r_0^2}\right) \quad (\text{C.3})$$

となる.

求めた楕円 0 上の点  $(x_0, y_0)$  から降ろした垂線と, 楕円 1 の交点  $(x_1, y_1)$  を求めよう. 長軸と短軸の長さがそれぞれ  $a_1, b_1$  の楕円 1 の満たす式は,

$$\frac{x^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2} = 1 \quad (\text{C.4})$$

である. 楕円 1 の式を変形すると,

$$y^2 = a_1^2 - r_1^2 x^2 \quad (\text{C.5})$$

となる. 楕円 0 から降ろした垂線の式 (C.3) は, 簡単のために,

$$y = \alpha x + \beta, \quad (\text{C.6})$$

$$\alpha = \frac{y_0}{x_0 r_0^2}, \quad (\text{C.7})$$

$$\beta = y_0 \left(1 - \frac{1}{r_0^2}\right) \quad (\text{C.8})$$

と表しておく. これを楕円 1 の式に代入して整理すると,

$$x^2 + \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + r_1^2}x + \frac{\beta^2 - a_1^2}{\alpha^2 + r_1^2} = 0 \quad (\text{C.9})$$

という  $x$  に関する 2 次方程式を得る. 二つの解  $x_{1+}, x_{1-}$  をまとめて  $x_{1\pm}$  と表すと,

$$x_{1\pm} = \frac{x_0 r_0^2}{y_0^2 + x_0^2 r_0^4 r_1^2} \left[ -y_0^2 \left(1 - \frac{1}{r_0^2}\right) \pm \sqrt{y_0^2 a_1^2 + r_1^2 a_1^2 x_0^2 r_0^4 - x_0^2 y_0^2 r_1^2 (r_0^2 - 1)^2} \right] \quad (\text{C.10})$$

となる. 根号の中が正であることは保証されない. 根号の中が負になることは交点がない場合に対応する.

楕円 0 から降ろした垂線と楕円 1 の交点のうち,  $(x_0, y_0)$  との距離が近い方の交点を求めよう.  $(x_0, y_0)$  と  $(x_{1\pm}, y_{1\pm})$  の距離  $d_{\pm}$  の自乗を求めると,

$$\begin{aligned} d_{\pm}^2 &:= (x_{1\pm} - x_0)^2 + (y_{1\pm} - y_0)^2 \\ &= \frac{y_0^2 + x_0^2 r_0^4}{(y_0^2 + x_0^2 r_0^4 r_1^2)^2} \left( y_0^2 + x_0^2 r_0^2 r_1^2 \mp \sqrt{y_0^2 a_1^2 + r_1^2 a_1^2 x_0^2 r_0^4 - r_1^2 y_0^2 x_0^2 (r_0^2 - 1)^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

となる. もし根号の中が正であるとすると,

$$d_+ < d_- \quad (\text{C.12})$$

が成り立つ. 従って,  $(x_0, y_0)$  に近い交点は  $(x_{1+}, y_{1+})$  である. 以降, 単に  $(x_1, y_1)$  と書いた場合は,  $(x_{1+}, y_{1+})$  を表すとする. 従って, 求めたい  $(x_0, y_0)$  から  $(x_1, y_1)$  への変位ベクトルは,  $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  である. これは,

$$x_1 - x_0 = \frac{x_0 r_0^2}{y_0^2 + x_0^2 r_0^4 r_1^2} \left( -y_0^2 - r_1^2 x_0^2 r_0^2 + \sqrt{y_0^2 a_1^2 + r_1^2 a_1^2 x_0^2 r_0^4 - r_1^2 x_0^2 y_0^2 (r_0^2 - 1)^2} \right), \quad (\text{C.13})$$

$$y_1 - y_0 = \frac{y_0}{y_0^2 + x_0^2 r_0^4 r_1^2} \left( -y_0^2 - r_1^2 x_0^2 r_0^2 + \sqrt{y_0^2 a_1^2 + r_1^2 a_1^2 x_0^2 r_0^4 - r_1^2 x_0^2 y_0^2 (r_0^2 - 1)^2} \right) \quad (\text{C.14})$$

と整理できる. 変位ベクトルの単位ベクトルは簡潔に

$$\frac{1}{\sqrt{y_0^2 + x_0^2 r_0^4}} (-x_0 r_0^2, -y_0) \quad (\text{C.15})$$

と表すことができる.

$(x_0, y_0)$  上の点を, パラメタ  $\eta \in [0, 2\pi)$  を用いて

$$x_0 = b_0 \cos \eta, \quad (\text{C.16})$$

$$y_0 = a_0 \sin \eta \quad (\text{C.17})$$

と表すと, 変位ベクトルの長さ  $d$  は,  $d_+$  に代入して

$$d = \frac{\sqrt{\sin^2 \eta + r_0^2 \cos^2 \eta}}{\sin^2 \eta + r_1^2 r_0^2 \cos^2 \eta} \left( a_0 \sin^2 \eta + a_0 r_1^2 \cos^2 \eta - \sqrt{a_1^2 \sin^2 \eta + a_1^2 r_1^2 r_0^2 \cos^2 \eta - r_1^2 b_0^2 \sin^2 \eta \cos^2 \eta (r_0^2 - 1)^2} \right) \quad (\text{C.18})$$

となる.

楕円 0 と楕円 1 の面積が等しいとすると, 面積はそれぞれ  $\pi a_0 b_0$ ,  $\pi a_1 b_1$  であるから, 楕円 0 の  $a_0, b_0$  を決めておけば,  $a_1 b_1 = a_0 b_0$  より,  $a_1, b_1$  のどちらか一方がパラメタになる.





## 付録 D

# 様々なパラメータでの実験結果の一覧

ここでは、本文に載せなかった計算条件の図を含めて、各々の計算での主要な図をまとめておく。

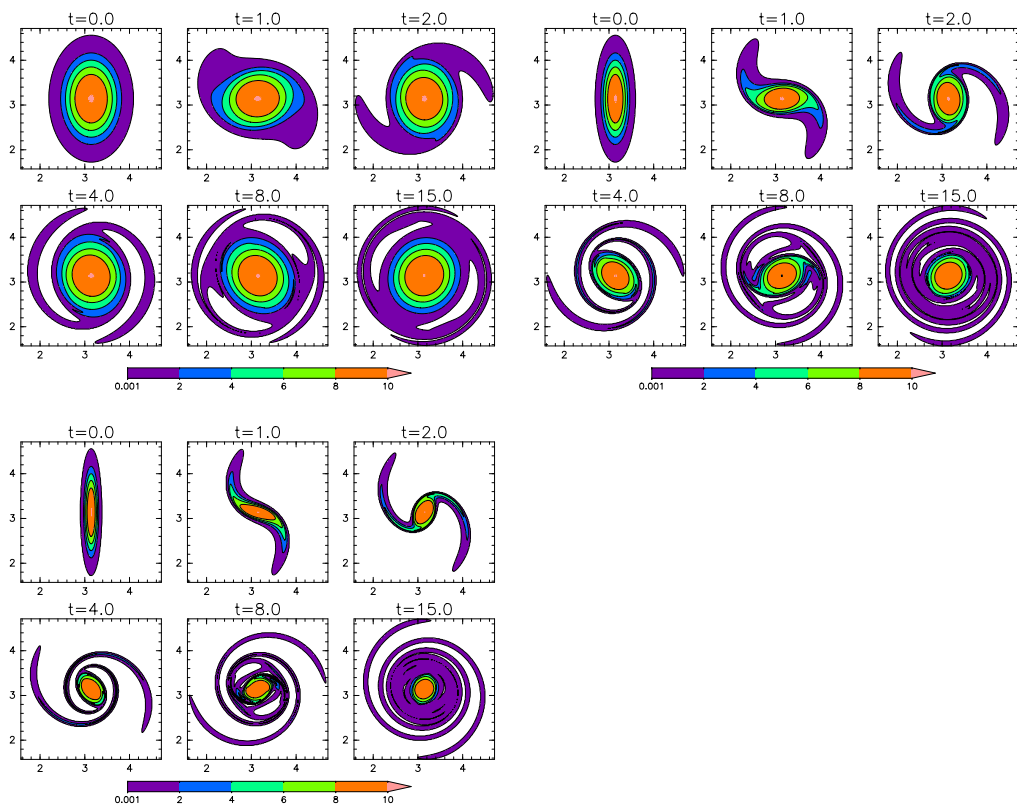


図 D.1 渦度場の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで, 初期アスペクト比  $1.5, \sqrt{10}, 6$  の場合.

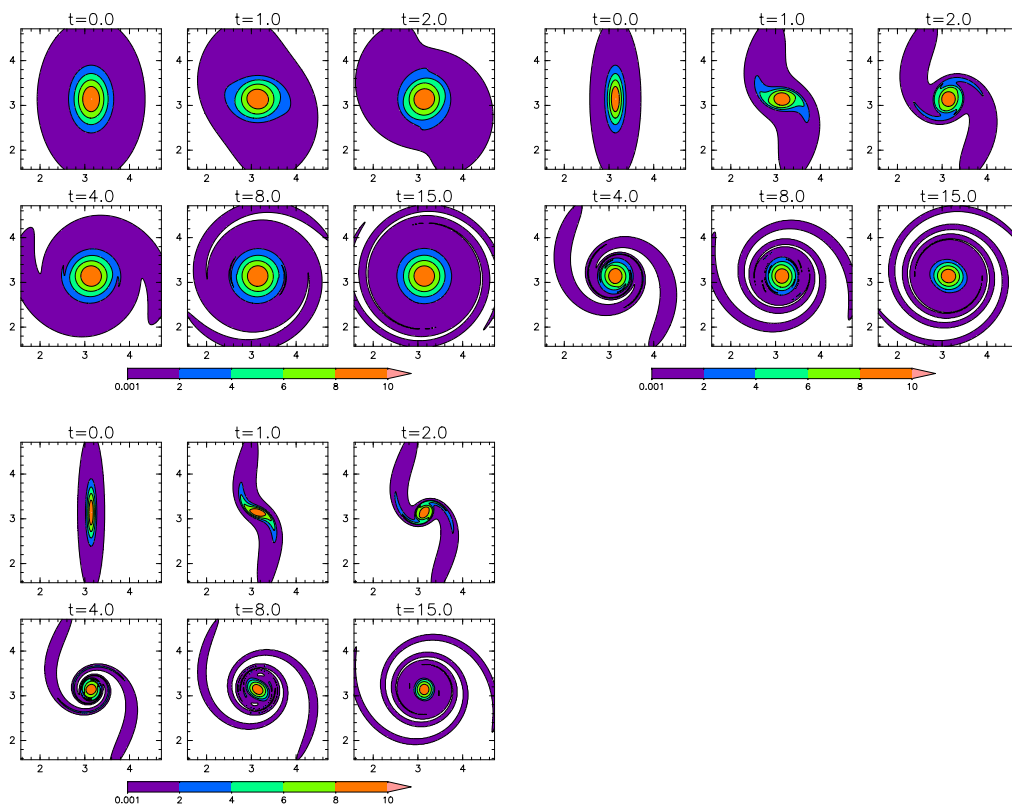


図 D.2 渦度場の時間発展. 初期渦度分布がガウス分布で初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合.

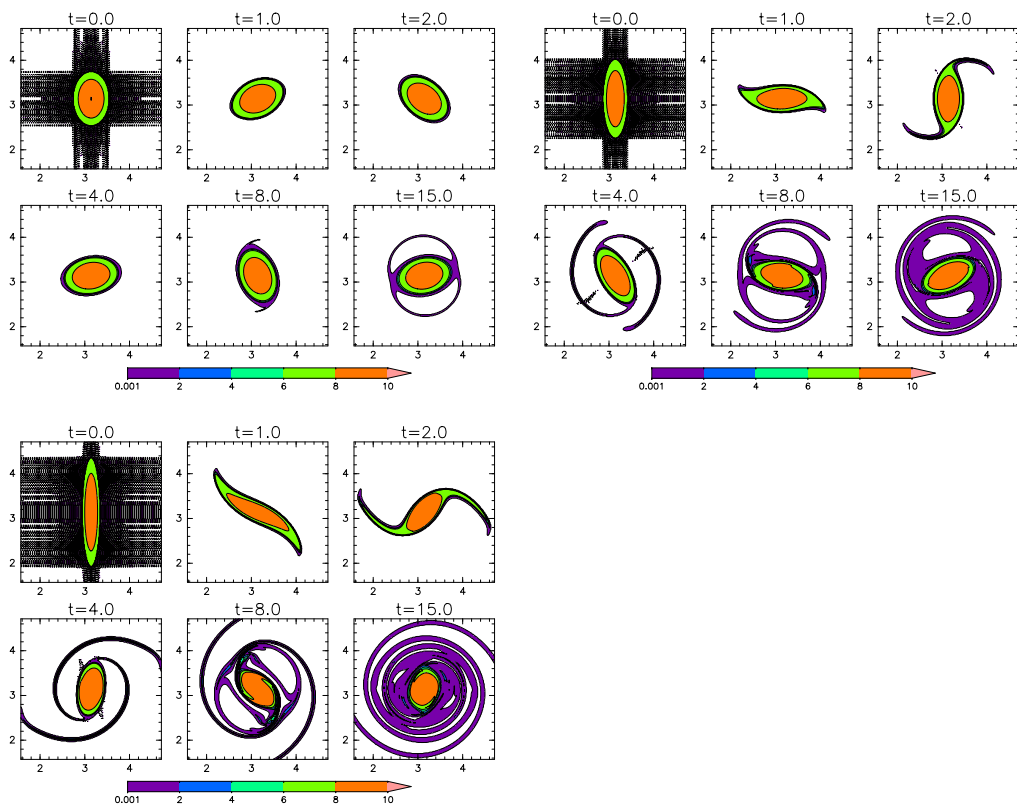


図 D.3 渦度場の時間発展. 初期渦度分布が不連続な渦度分布で初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合.

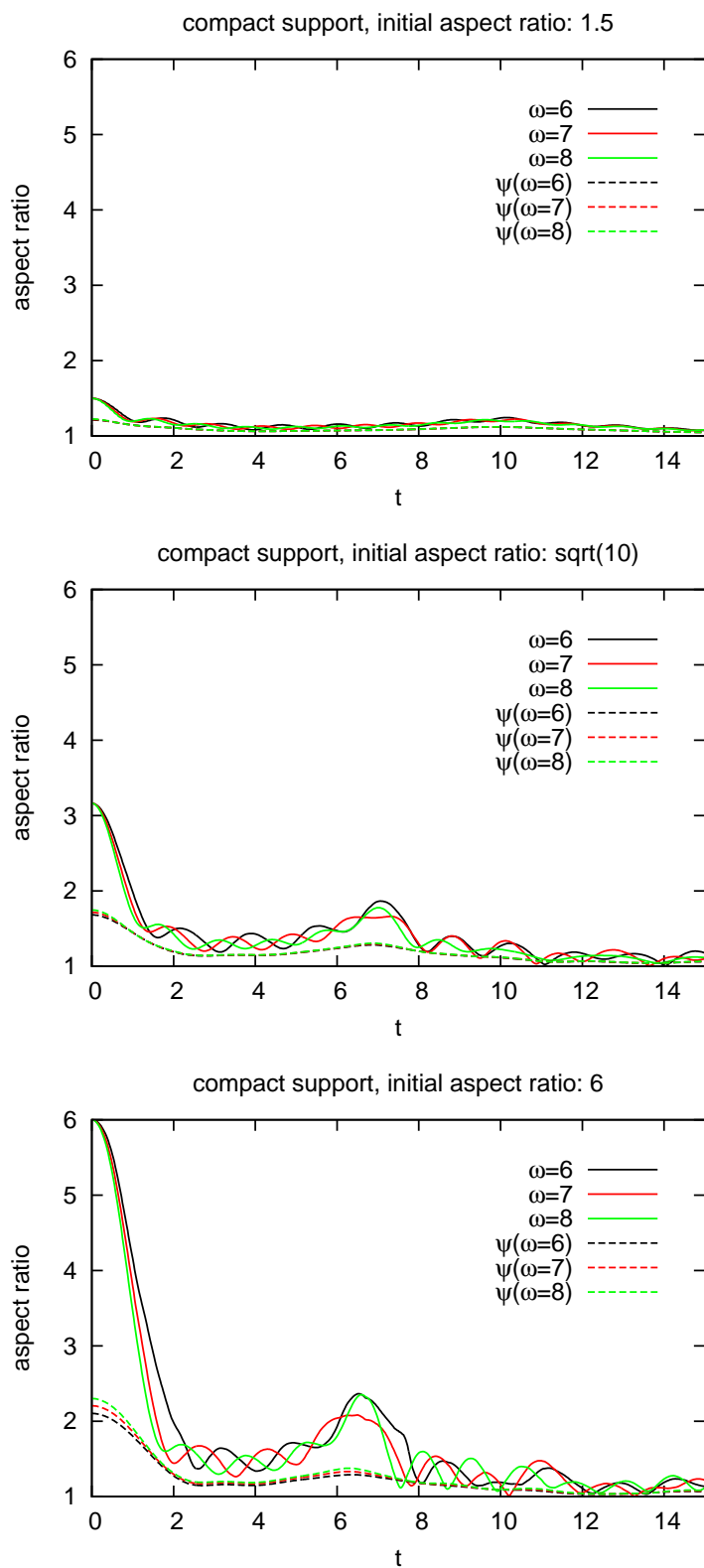


図 D.4 アスペクト比の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合.

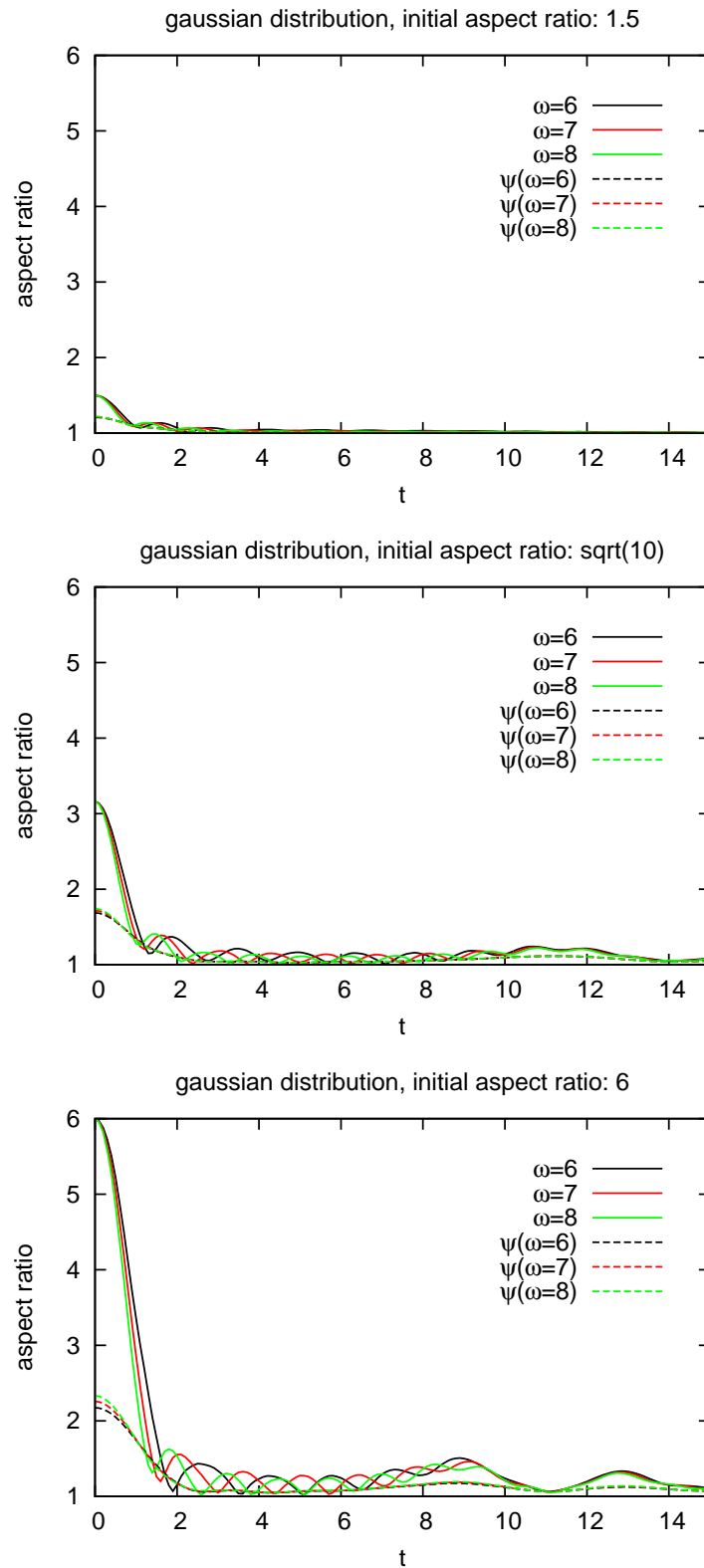


図 D.5 アスペクト比の時間発展. 初期渦度分布がガウス分布で初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合.

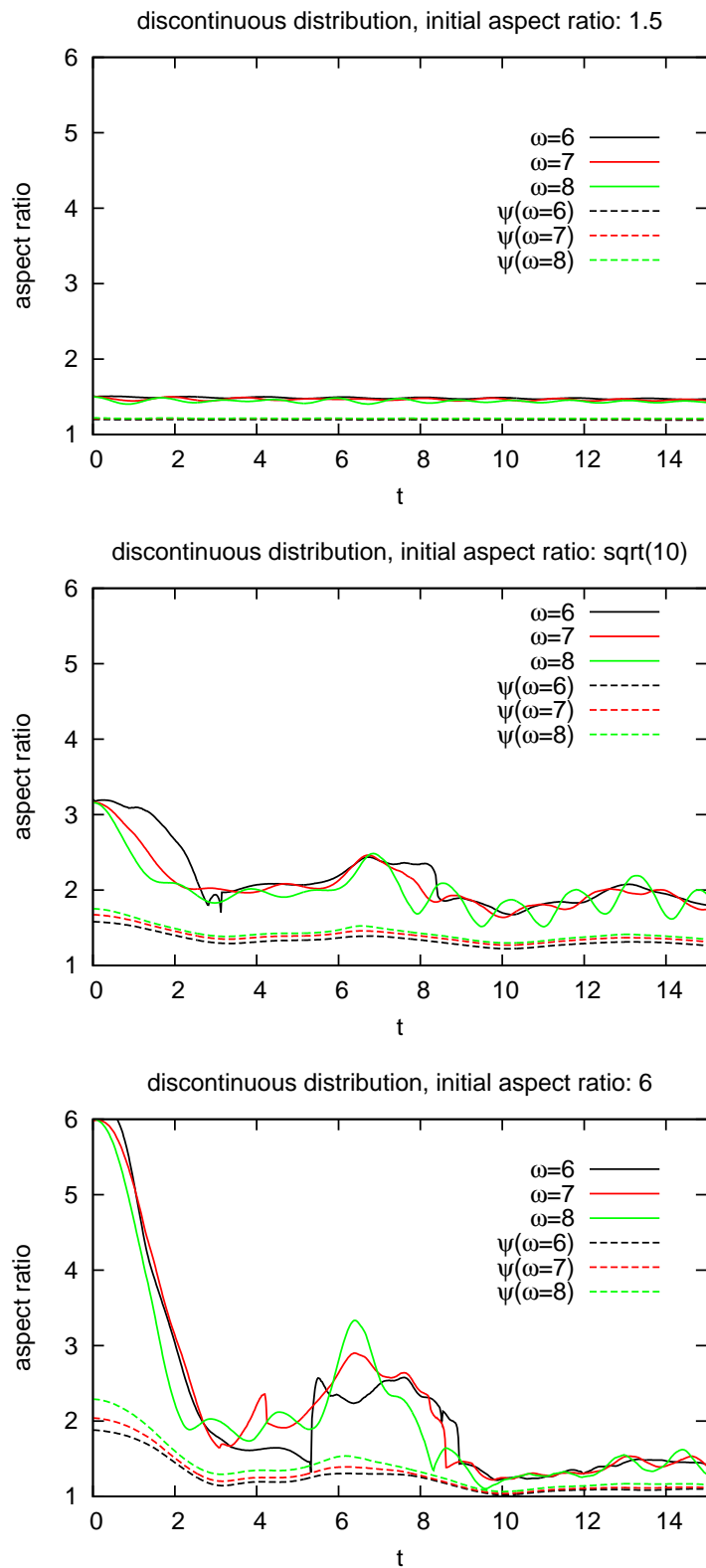


図 D.6 アスペクト比の時間発展. 初期渦度分布が不連続な渦度分布で初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合.

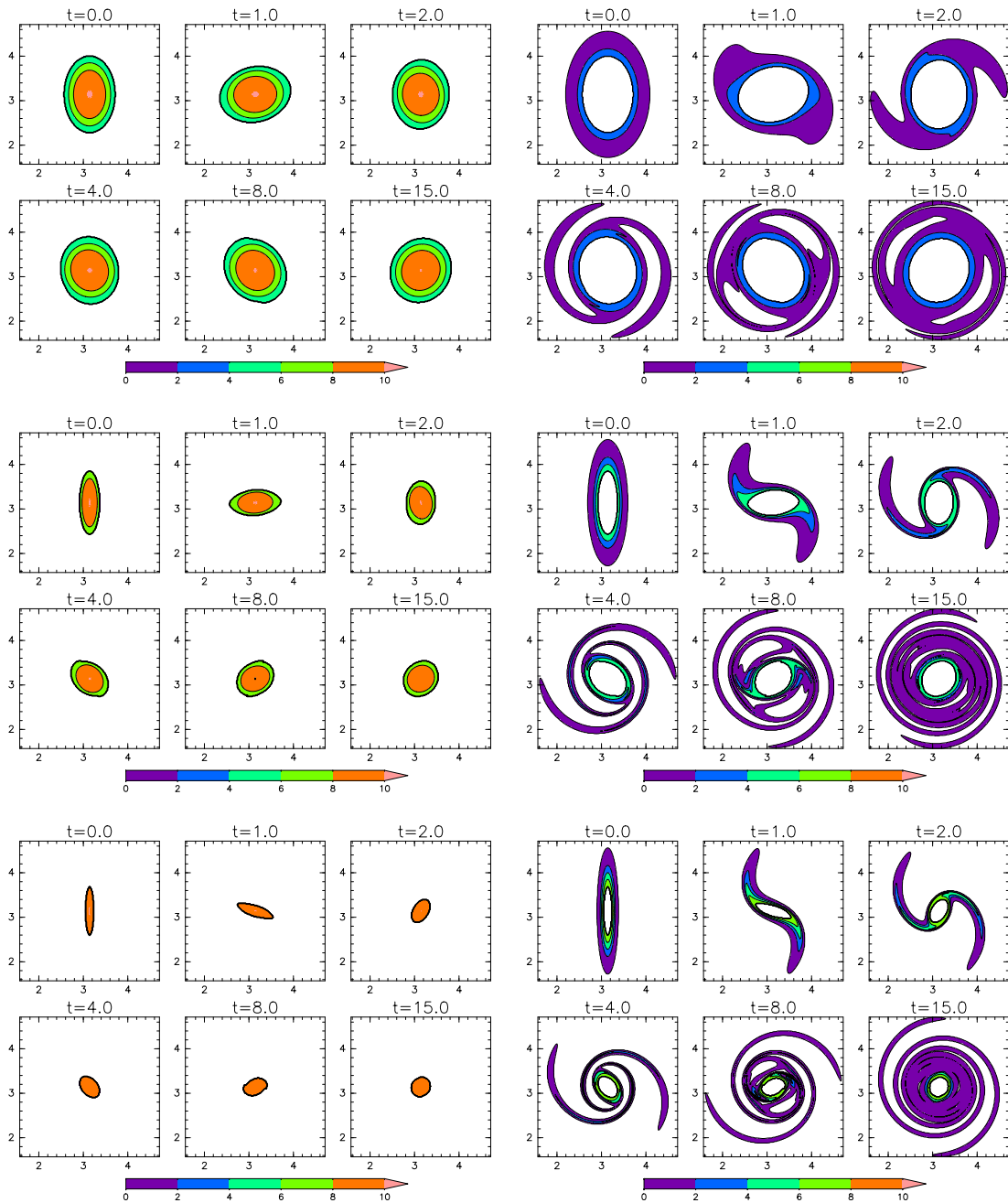


図 D.7 コア領域 (左列) と周辺領域 (右列) の渦度場の時間発展. 初期渦度分布がコンパクトサポートで初期アスペクト比  $1.5$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $6$  の場合.



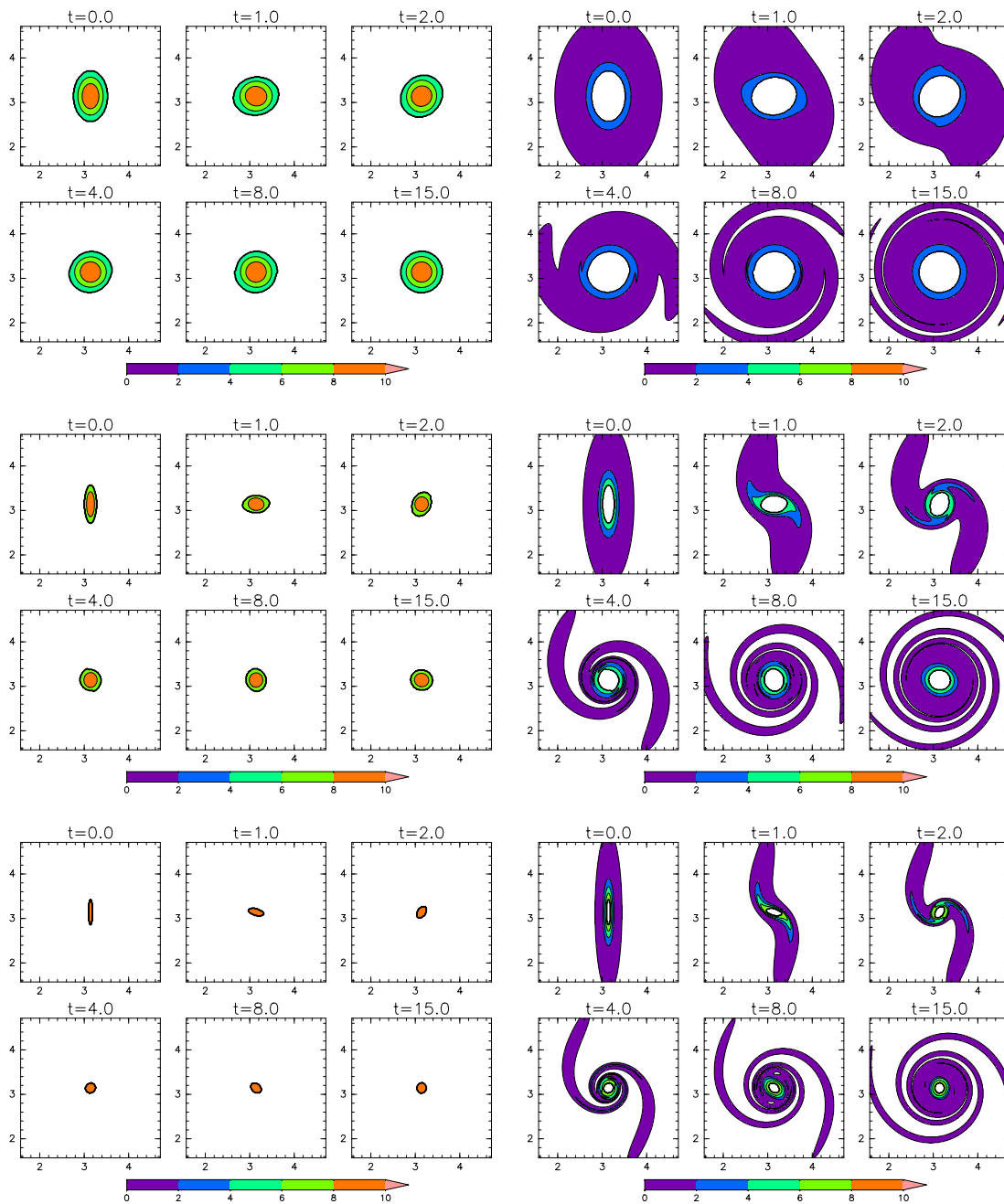


図 D.8 コア領域 (左列) と周辺領域 (右列) の渦度場の時間発展. 初期渦度分布がガウス分布で初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合.

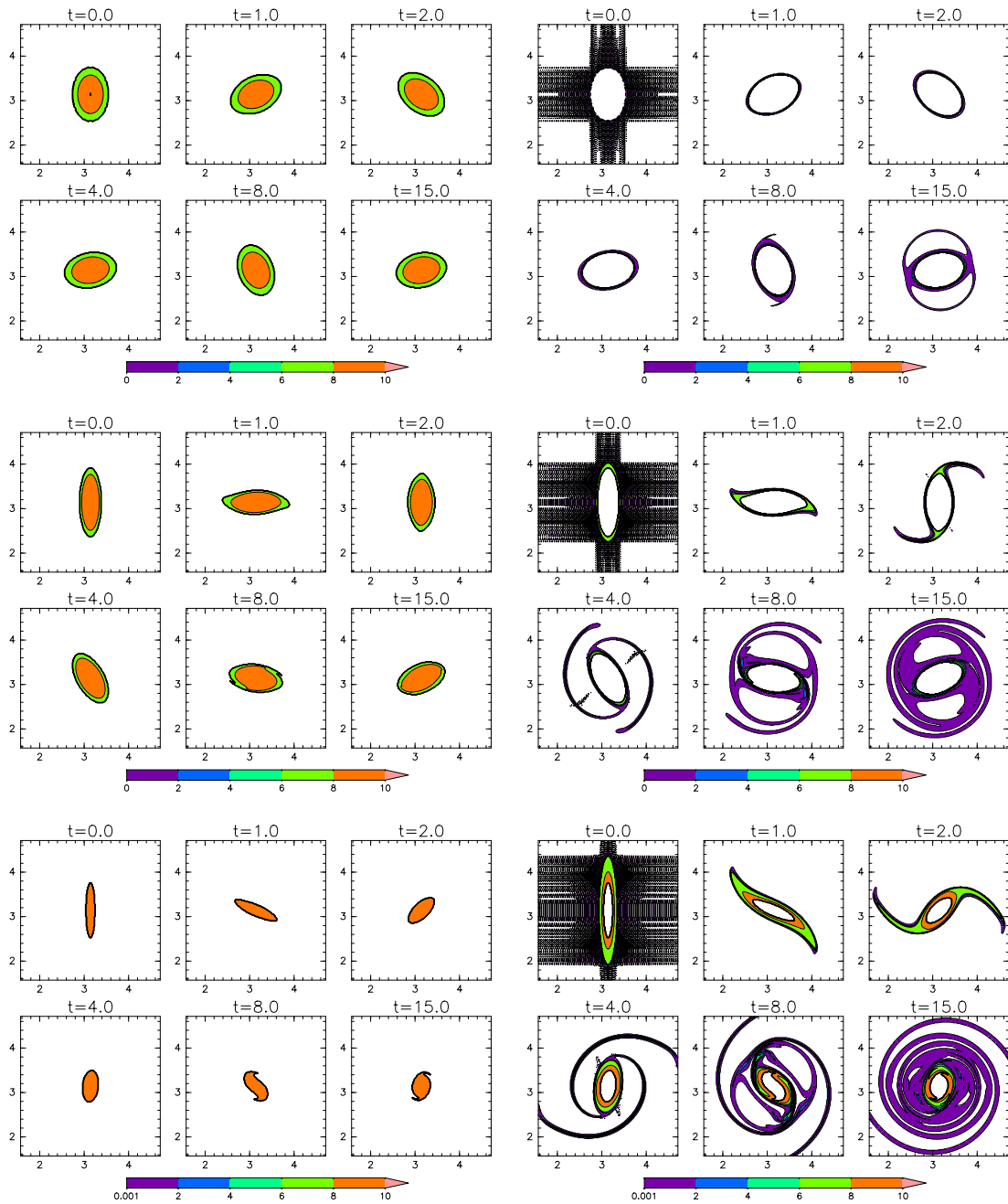


図 D.9 コア領域 (左列) と周辺領域 (右列) の渦度場の時間発展. 初期渦度分布が不連続な渦度分布で初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合.

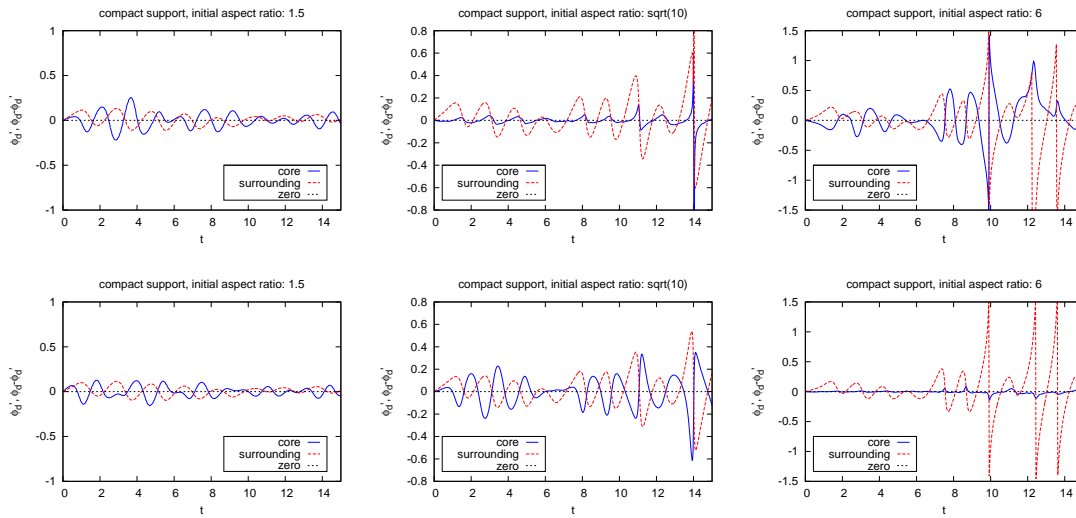


図 D.10  $\phi_d$  に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はコンパクトサポート, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合.

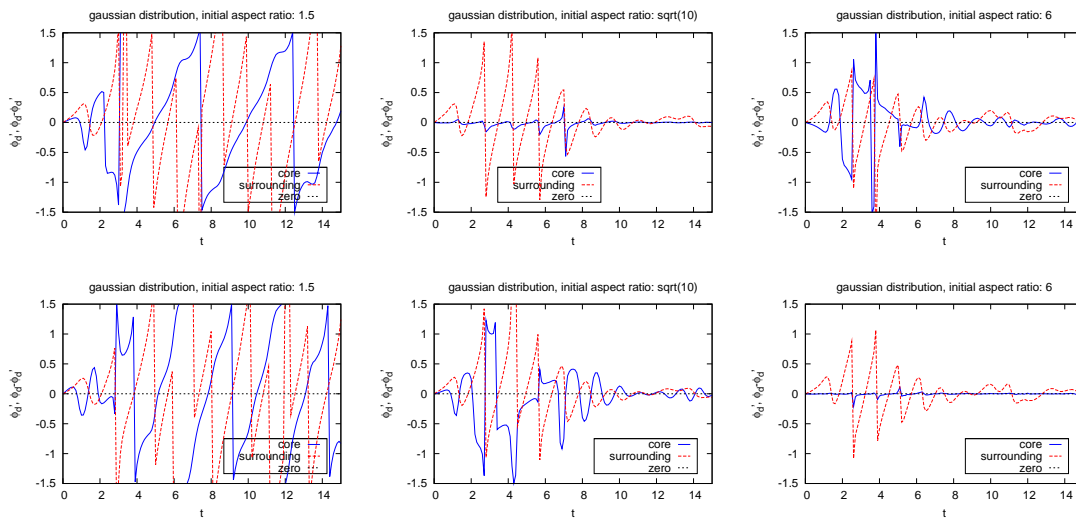


図 D.11  $\phi_d$  に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はガウス分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合.

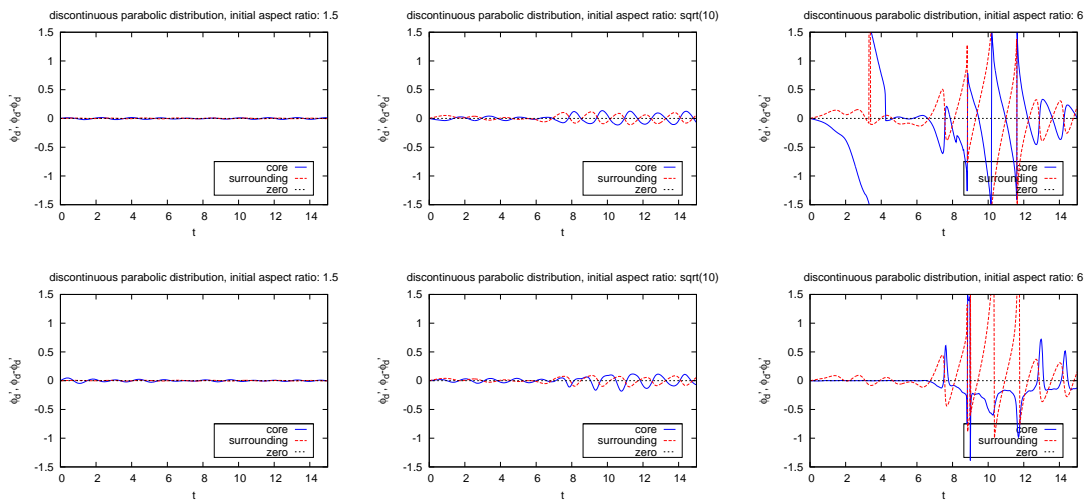


図 D.12  $\phi_d$  に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布は不連続な渦度分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 7$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 9$  のコンターに注目した場合.

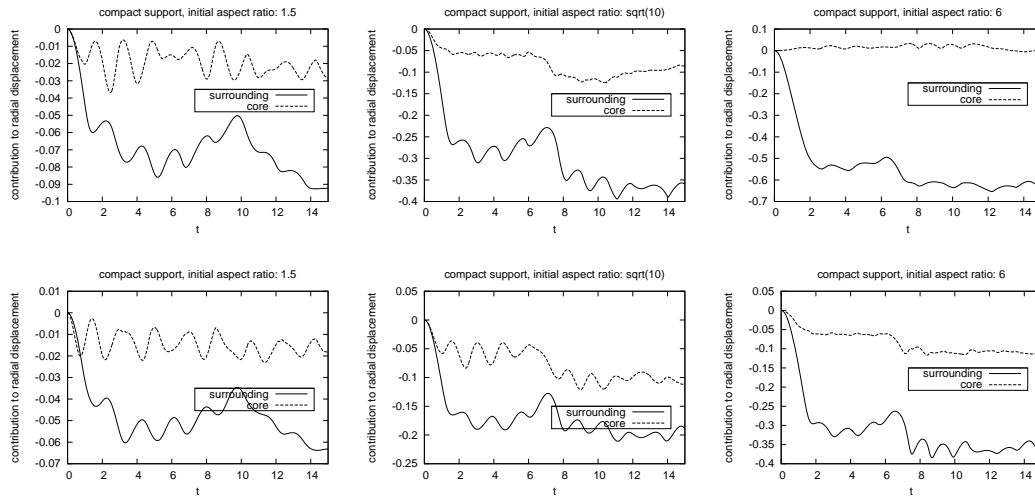


図 D.13 曲率最大点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はコンパクトサポート, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合.

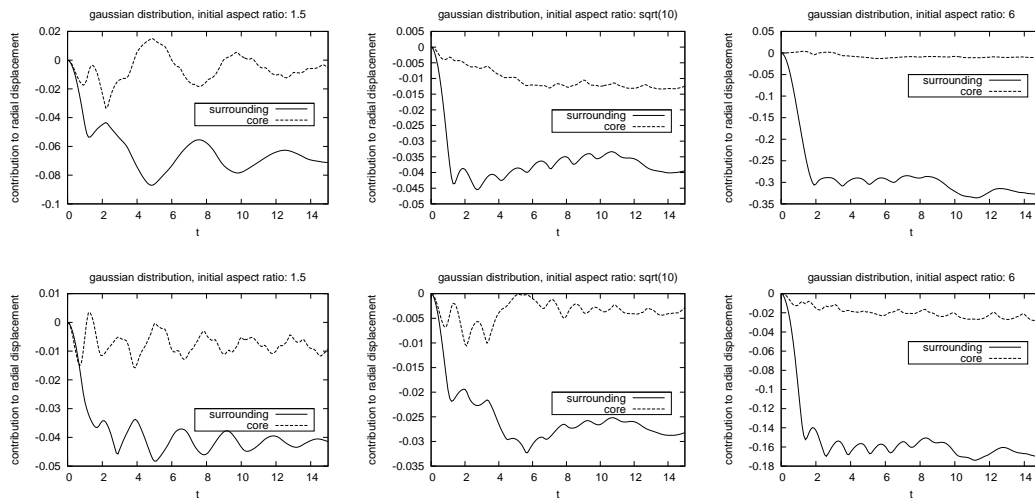


図 D.14 曲率最大点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はガウス分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合.

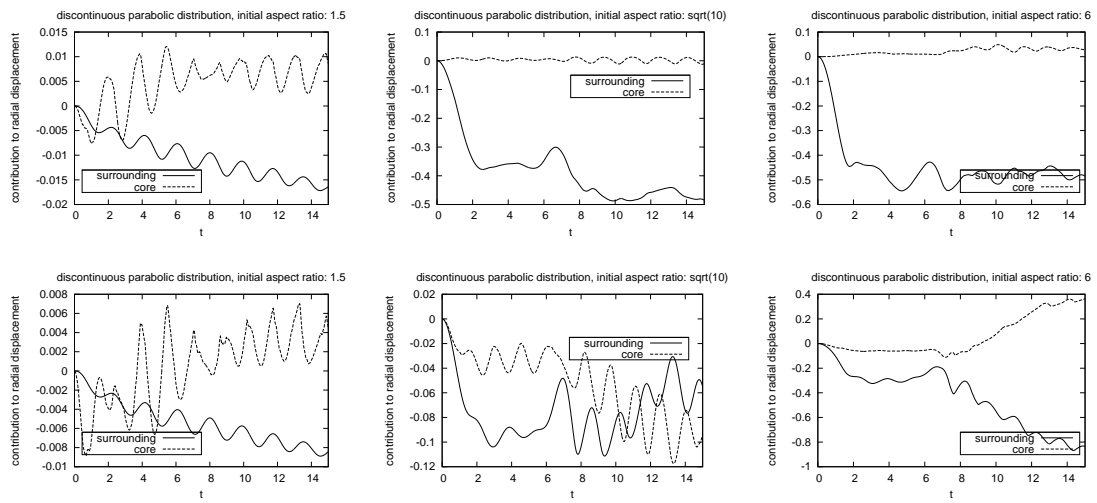


図 D.15 曲率最大点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布は不連続な渦度分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 7$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 9$  のコンターに注目した場合.

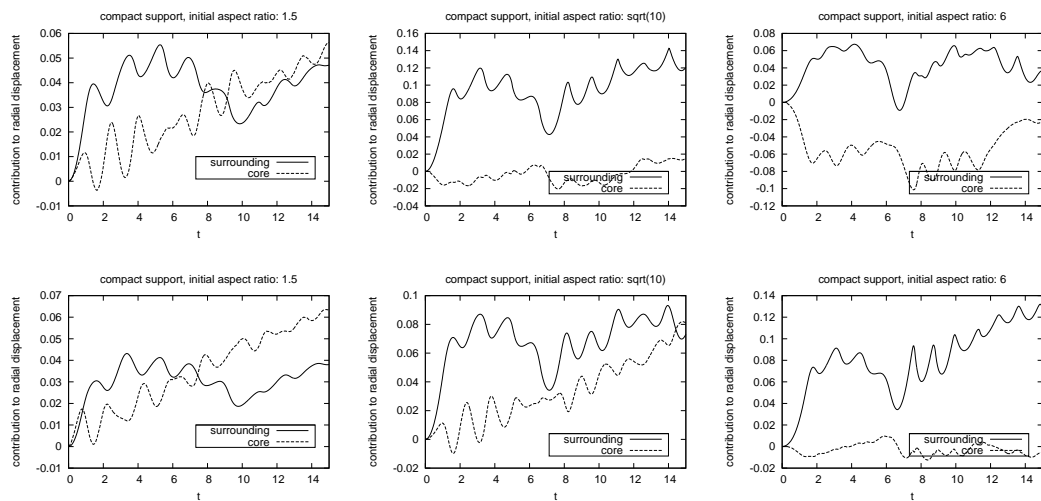


図 D.16 曲率最小点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はコンパクトサポート, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合.

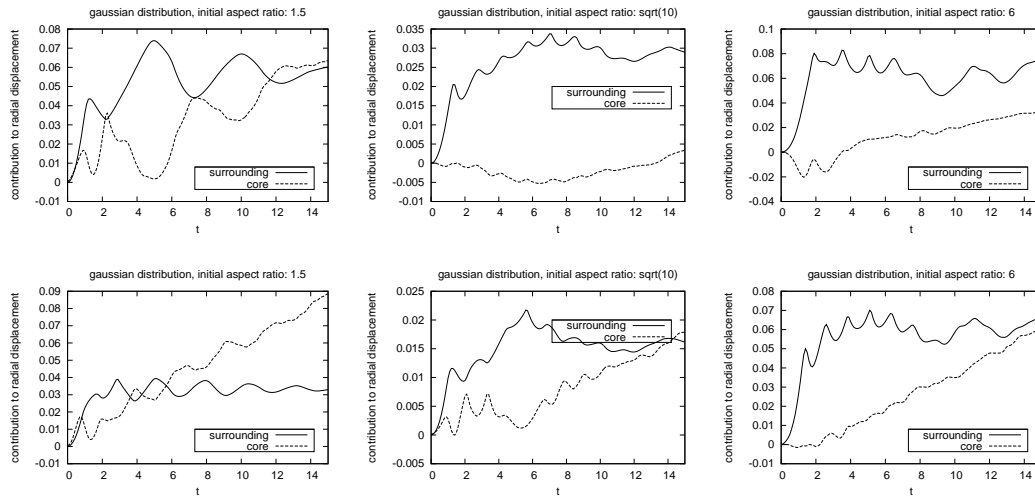


図 D.17 曲率最小点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布はガウス分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 6$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 8$  のコンターに注目した場合.

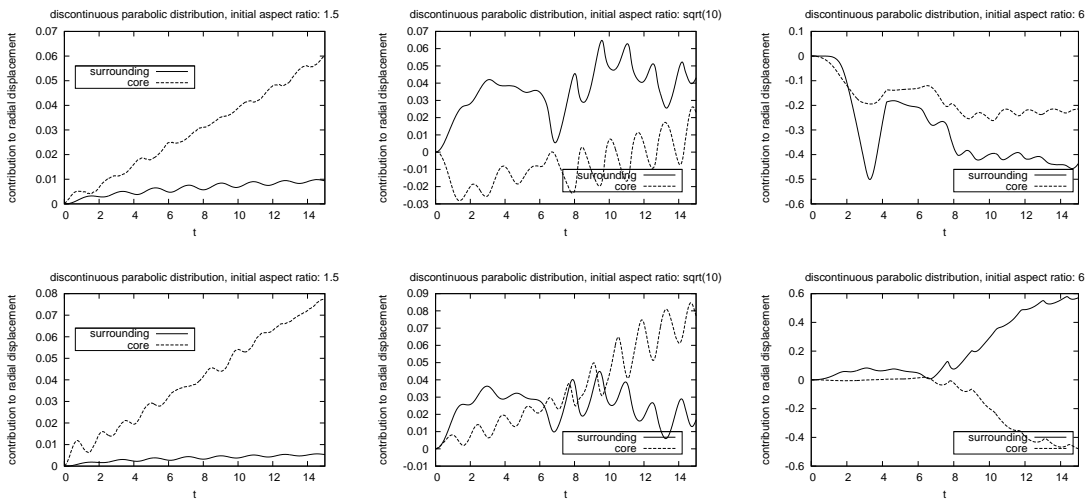


図 D.18 曲率最小点における動径変位に対するコア領域と周辺領域の寄与. 初期渦度分布は不連続な渦度分布, 初期アスペクト比 1.5,  $\sqrt{10}$ , 6 の場合. (上段)  $\omega = 7$  のコンターに注目した場合. (下段)  $\omega = 9$  のコンターに注目した場合.

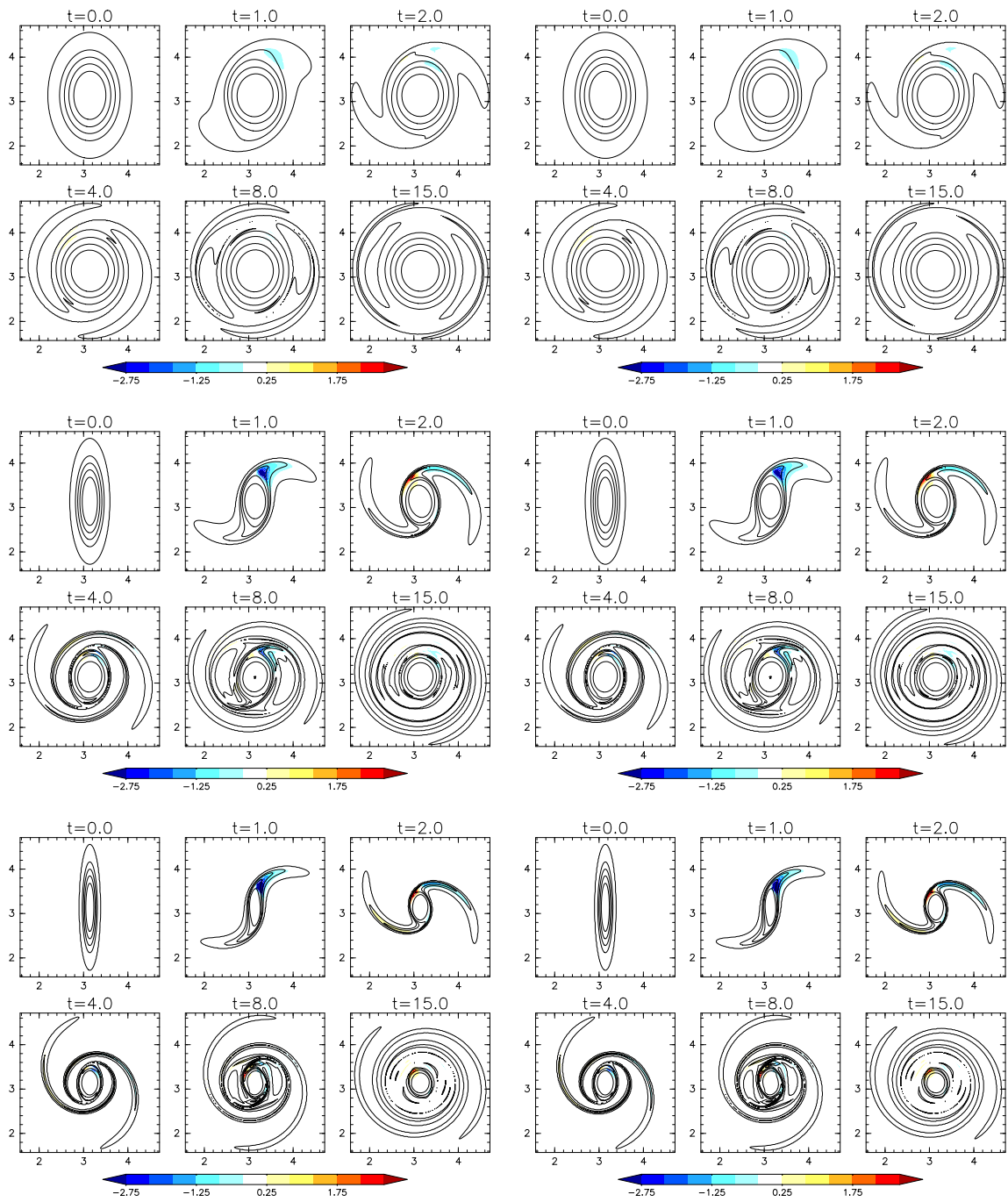


図 D.19 曲率最大点と曲率最小点に誘導される動径速度に対する楕円の長軸と短軸に関して鏡像非対称な渦度場の寄与. 初期渦度分布がコンパクトサポートの場合. (左列) 曲率最大点に誘導される動径速度に対する寄与. (右列) 曲率最小点に誘導される動径速度に対する寄与. (上段) 初期アスペクト比が 1.5 で,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (中段) 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  で,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (下段) 初期アスペクト比が 6 で,  $\omega = 8$  の渦度コンターの楕円に注目した場合.



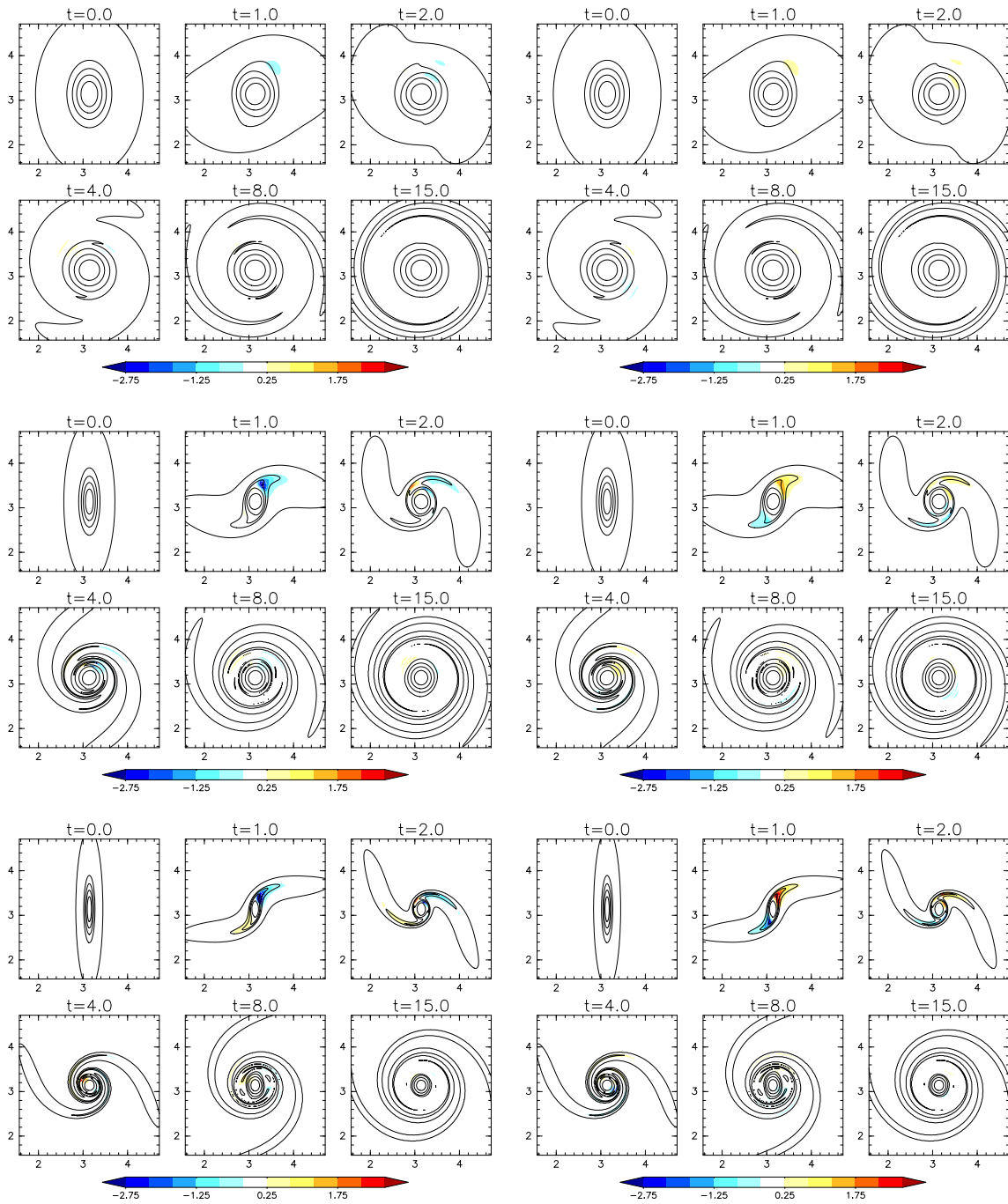


図 D.20 曲率最大点と曲率最小点に誘導される動径速度に対する楕円の長軸と短軸に関して鏡像非対称な渦度場の寄与. 初期渦度分布がガウス分布の場合. (左列) 曲率最大点に誘導される動径速度に対する寄与. (右列) 曲率最小点に誘導される動径速度に対する寄与. (上段) 初期アスペクト比が 1.5 で,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円に注目した場合.. (中段) 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  で,  $\omega = 6$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (下段) 初期アスペクト比が 6 で,  $\omega = 8$  の渦度コンターの楕円に注目した場合.

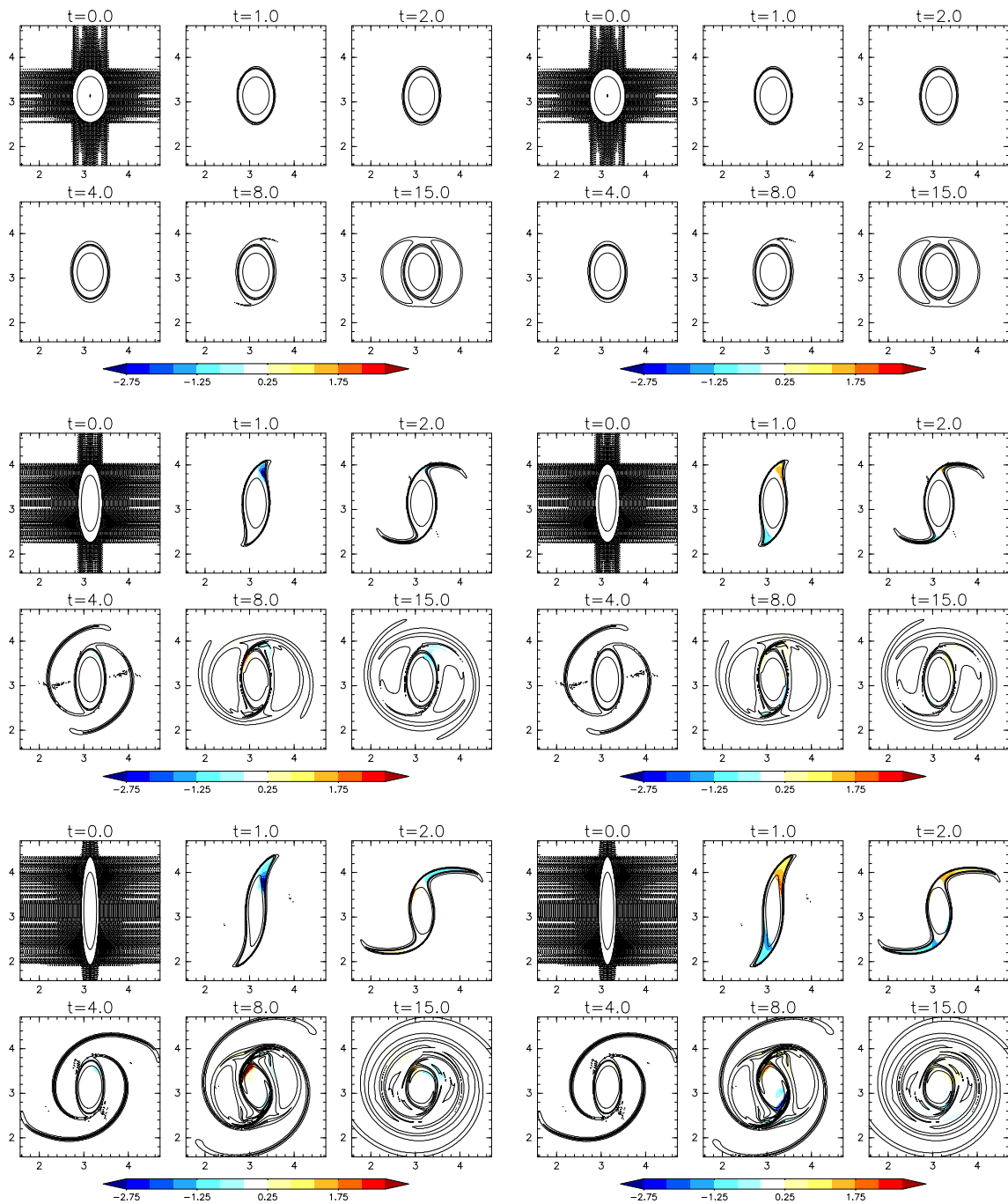


図 D.21 曲率最大点と曲率最小点に誘導される動径速度に対する楕円の長軸と短軸に関して鏡像非対称な渦度場の寄与. 初期渦度分布が不連続な渦度分布の場合. (左列) 曲率最大点に誘導される動径速度に対する寄与. (右列) 曲率最小点に誘導される動径速度に対する寄与. (上段) 初期アスペクト比が 1.5 で,  $\omega = 8$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (中段) 初期アスペクト比が  $\sqrt{10}$  で,  $\omega = 8$  の渦度コンターの楕円に注目した場合. (下段) 初期アスペクト比が 6 で,  $\omega = 9$  の渦度コンターの楕円に注目した場合.

## 付録 E

# Kirchhoff の楕円渦に関する研究 のレビュー

ここでは Kirchhoff の楕円渦の流れ関数, 楕円渦の回転角速度, 線形安定性, 淀み点とフィラメンテーションの関係, そして円形渦との関係についてまとめる.

### E.1 問題設定

2次元の非圧縮性流体を考える (つまり,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ). ある時刻において楕円形の内部で一様な渦度  $\omega$  を持ち, その外側で渦度ゼロを満たす渦度分布に対応する流れ場を求めよう. 流れ関数 ( $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi$  を満たす  $\psi$ ) を用いて式で書くと次のようになる.

$$\nabla^2 \psi = \omega, \quad \text{if } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad (\text{E.1})$$

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \text{if } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1. \quad (\text{E.2})$$

ただし, 座標系は楕円形の主軸をデカルト座標系の  $x, y$  軸にとった. 便宜的に, (E.1) 式の条件を満たす領域を内部領域, (E.1) 式の条件を満たす領域を外部領域と呼ぶことにする. この解は Kirchhoff の楕円渦と呼ばれ, 形を変えずに回転角速度

$$\Omega = \frac{\omega ab}{(a+b)^2} \quad (\text{E.3})$$

で回転し, 流れ関数は

$$\psi(x, y) = \frac{\omega}{2(a+b)}(bx^2 + ay^2), \quad \text{if } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad (\text{E.4})$$

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\omega ab}{4}(2\xi + e^{-2\xi} \cos 2\eta), \quad \text{if } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1. \quad (\text{E.5})$$

と書けることが知られている. ここで,  $\xi, \eta$  は楕円座標系の変数である. 楕円座標系については E.7 節にまとめた.

## E.2 楕円座標系を用いた解法

ここでは楕円座標系を用いて解く. まず, 外部領域で解き, 境界条件を適用する. 次に内部領域で解き, 境界条件を適用する. 最後に内部領域と外部領域の接続の条件を課して, 解を求める.

外部領域と内部領域の境界を  $\xi = \xi_0$  とする. また, 内部領域の流れ関数を  $\psi_i$ , 外部領域の流れ関数を  $\psi_o$  と書くことにする.

### E.2.1 外部領域

外部領域では渦なしであるから, 解くべき式は Laplace 方程式である.

$$\frac{\partial^2 \psi_o}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_o}{\partial \eta^2} = 0. \quad (\text{E.6})$$

まず, 次の変数分離形で書ける解を探す. すなわち,

$$\psi_o(\xi, \eta) = f(\xi)g(\eta). \quad (\text{E.7})$$

Laplace 方程式に代入して変形すると,

$$f''g + fg'' = 0, \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = \lambda^2 \quad (\text{E.9})$$

ここで, 自明でない解を求めたいので,  $\lambda$  は定数である場合を考える.

$$f'' = f\lambda^2, \quad f(\xi) = C_{\lambda,0}e^{\lambda\xi} + C_{\lambda,1}e^{-\lambda\xi}, \quad (\text{E.10})$$

$$g'' = -g\lambda^2, \quad g(\eta) = C_{\lambda,2}e^{i\lambda\eta} + C_{\lambda,3}e^{-i\lambda\eta} \quad (\text{E.11})$$

ここで,  $C_{\lambda,0}, C_{\lambda,1}$  は実定数,  $C_{\lambda,2}, C_{\lambda,3}$  は複素定数である. 流れ関数は  $\eta$  方向に  $2\pi$  周期であるから,  $\lambda$  が整数である場合を考えれば十分である. また,  $\lambda$  を正の整数に限定して考えても一般性を失わない.

一方, (E.9) 式において  $\lambda = 0$  の場合は,

$$f'' = 0, \quad f(\xi) = C_4\xi + C_5 \quad (\text{E.12})$$

$$g'' = 0, \quad g(\eta) = C_6\eta + C_7 \quad (\text{E.13})$$

となる. ここで  $C_4, C_5, C_6, C_7$  は実定数である. 従って, 流れ関数は

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi, \eta) = & \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} (C_{\lambda,0}e^{\lambda\xi} + C_{\lambda,1}e^{-\lambda\xi})(C_{\lambda,2}e^{i\lambda\eta} + C_{\lambda,3}e^{-i\lambda\eta}) \right] \\ & + (C_4\xi + C_5)(C_6\eta + C_7) \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

となる.  $\eta$  について  $\psi_0$  が連続であることを要請すると,  $C_6 = 0$  となる. これを踏まえて整理すると, 流れ関数は

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi, \eta) = & \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{\lambda\xi} (B_{\lambda,0} \cos \lambda\eta + B_{\lambda,1} \sin \lambda\eta) + e^{-\lambda\xi} (B_{\lambda,2} \cos \lambda\eta + B_{\lambda,3} \sin \lambda\eta) \right] \\ & + B_4\xi + B_5 \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

となる. ここで,  $B_{\lambda,0}, B_{\lambda,1}, B_{\lambda,2}, B_{\lambda,3}, B_4, B_5$  は実定数である. 流れ関数の  $\xi, \eta$  微分はそれぞれ,

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial\xi} = \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda e^{\lambda\xi} (B_{\lambda,0} \cos \lambda\eta + B_{\lambda,1} \sin \lambda\eta) - \lambda e^{-\lambda\xi} (B_{\lambda,2} \cos \lambda\eta + B_{\lambda,3} \sin \lambda\eta) \right] + B_4, \quad (\text{E.16})$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial\eta} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda e^{\lambda\xi} (-B_{\lambda,0} \sin \lambda\eta + B_{\lambda,1} \cos \lambda\eta) + \lambda e^{-\lambda\xi} (-B_{\lambda,2} \sin \lambda\eta + B_{\lambda,3} \cos \lambda\eta) \quad (\text{E.17})$$

となる.

外部領域で課す条件

次の2つの条件を課す.

- 渦の中心から無限遠で, 速度場がすみやかにゼロに近づく

- 内部領域を囲む外部領域内の閉曲線について、循環が  $\omega\pi ab$  となること。

まず,  $\xi \rightarrow \infty$  で, 速度場がすみやかにゼロに近づくには,  $h_\xi = h_\eta \rightarrow \frac{c}{\sqrt{2}}e^\xi$  であるから, 全ての  $\lambda$  について

$$B_{\lambda,0} = B_{\lambda,1} = 0 \quad (\text{E.18})$$

である必要がある。

また,  $\xi_1 \geq \xi_0$  が表す閉曲線に沿った循環は,

$$\begin{aligned} & \oint u_\eta(\xi_1, \eta) ds \\ &= \int_0^{2\pi} u_\eta(\xi_1, \eta) h_\eta(\xi_1, \eta) d\eta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi_o}{\partial \xi}(\xi_1, \eta) d\eta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[ \left\{ \lambda e^{\lambda \xi_1} (B_{\lambda,0} \cos \lambda \eta + B_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \lambda e^{-\lambda \xi_1} (B_{\lambda,2} \cos \lambda \eta + B_{\lambda,3} \sin \lambda \eta) \right\} + B_4 \right] d\eta \\ &= \left[ \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{\lambda \xi_1} (B_{\lambda,0} \sin \lambda \eta - B_{\lambda,1} \cos \lambda \eta) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - e^{-\lambda \xi_1} (B_{\lambda,2} \sin \lambda \eta - B_{\lambda,3} \cos \lambda \eta) \right\} + B_4 \eta \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi B_4 \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

となる。循環は  $\omega\pi ab$  と等しくなければいけないので,

$$B_4 = \frac{\omega}{2} ab \quad (\text{E.20})$$

が成り立つ。

これらの条件から得られた係数を使うと, 外部領域の流れ関数は

$$\psi_o(\xi, \eta) = \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} + e^{-\lambda \xi} (B_{\lambda,2} \cos \lambda \eta + B_{\lambda,3} \sin \lambda \eta) \right] + \frac{\omega ab}{2} \xi + B_5 \quad (\text{E.21})$$

## E.2.2 内部領域

内部領域では Poisson 方程式を解く。先の外部領域の式がちょうどこの斉次形になっているので、非斉次項に対応する解を考えればよいだけである。

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \eta^2} = \omega c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta). \quad (\text{E.22})$$

非斉次項は

$$\omega c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) = \frac{\omega c^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \quad (\text{E.23})$$

と変形できる。これを眺むと、流れ関数は

$$\frac{\omega c^2}{8} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \quad (\text{E.24})$$

という形の項を含むべきことが分かる。従って、流れ関数を書き下せば、

$$\begin{aligned} \psi_i(\xi, \eta) = & \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{\lambda \xi} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) + e^{-\lambda \xi} (A_{\lambda,2} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,3} \sin \lambda \eta) \right] \\ & + A_4 \xi + A_5 + \frac{\omega c^2}{8} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

となる。流れ関数の  $\xi, \eta$  微分は、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} = & \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda e^{\lambda \xi} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) - \lambda e^{-\lambda \xi} (A_{\lambda,2} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,3} \sin \lambda \eta) \right] \\ & + A_4 + \frac{\omega c^2}{4} \sinh 2\xi, \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} = & \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda e^{\lambda \xi} (-A_{\lambda,0} \sin \lambda \eta + A_{\lambda,1} \cos \lambda \eta) + \lambda e^{-\lambda \xi} (-A_{\lambda,2} \sin \lambda \eta + A_{\lambda,3} \cos \lambda \eta) \right] \\ & - \frac{\omega c^2}{4} \sin 2\eta \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

となる。

内部領域で課す条件

次の 2 つの条件を課す。

- 内部領域の任意の  $\xi_1 \leq \xi_0$  について、循環が  $\omega\pi a_1 b_1 = \omega\pi \frac{c^2}{2} \sinh 2\xi_1$ .
- $\eta \in [0, \pi]$  なる  $\eta$  について  $\mathbf{u}(0, \eta) = \mathbf{u}(0, -\eta)$  が成り立つ.

ここで、二つ目の条件は、 $(\xi, \eta) = (0, \pm\eta)$  が同じ位置  $(x, y) = (c \cos \eta, 0)$  を表すことによる。二つ目の条件と同様に、 $\psi_i(0, \pm\eta)$  で同じ値を持つ、という条件も成り立つべきである。しかし、二つ目の条件から得られる結果の一部と同じ結果を得るだけなので、ここでは計算しない。

内部領域での  $\xi = \xi_1$  での循環は、

$$\begin{aligned}
& \oint u_\eta(\xi_1, \eta) ds & (E.28) \\
&= \int_0^{2\pi} u_\eta(\xi_1, \eta) h_\eta(\xi_1, \eta) d\eta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}(\xi_1, \eta) d\eta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ \lambda e^{\lambda \xi_1} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) - \lambda e^{-\lambda \xi_1} (A_{\lambda,2} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,3} \sin \lambda \eta) \right\} \right. \\
&\quad \left. + A_4 + \frac{\omega c^2}{4} \sinh 2\xi_1 \right] d\eta \\
&= \left[ \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{\lambda \xi_1} (A_{\lambda,0} \sin \lambda \eta - A_{\lambda,1} \cos \lambda \eta) - e^{-\lambda \xi_1} (A_{\lambda,2} \sin \lambda \eta - A_{\lambda,3} \cos \lambda \eta) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left( A_4 + \frac{\omega c^2}{4} \sinh 2\xi_1 \right) \eta \right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi A_4 + \omega\pi \frac{c^2}{2} \sinh 2\xi_1 & (E.29)
\end{aligned}$$

となる。これが  $\omega\pi a_1 b_1 = \omega\pi \frac{c^2}{2} \sinh 2\xi_1$  に等しいので、

$$A_4 = 0 \quad (E.30)$$

が得られる。

二つ目の条件を考える。まず、 $(\xi, \eta) = (0, \eta)$  における測度係数は

$$h_\xi = h_\eta = c |\sin \eta|. \quad (E.31)$$



これを用いて基底ベクトルを計算すると,

$$\hat{\mathbf{e}}_{\xi}(0, \eta) = \frac{1}{h_{\xi}} c \sin \eta \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} = \text{sign}(\eta) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}, \quad (\text{E.32})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\eta}(0, \eta) = -\frac{1}{h_{\eta}} c \sin \eta \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} = -\text{sign}(\eta) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \quad (\text{E.33})$$

となる. 従って, 速度ベクトルは

$$\mathbf{u}(0, \eta) = u_{\xi} \hat{\mathbf{e}}_{\xi} + u_{\eta} \hat{\mathbf{e}}_{\eta} = \text{sign}(\eta) u_{\xi} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} - \text{sign}(\eta) u_{\eta} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \quad (\text{E.34})$$

となるので, 二つ目の条件  $\mathbf{u}(0, \eta) = \mathbf{u}(0, -\eta)$  を速度ベクトルの成分で表現すると,

$$u_{\xi}(0, \eta) = -u_{\xi}(0, -\eta), \quad (\text{E.35})$$

$$u_{\eta}(0, \eta) = -u_{\eta}(0, -\eta) \quad (\text{E.36})$$

となる. 流れ関数の微分はそれぞれ

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi}(0, \pm \eta) = \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta \pm A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) - \lambda (A_{\lambda,2} \cos \lambda \eta \pm A_{\lambda,3} \sin \lambda \eta) \right] + A_4, \quad (\text{E.37})$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}(0, \pm \eta) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda (\mp A_{\lambda,0} \sin \lambda \eta + A_{\lambda,1} \cos \lambda \eta) + \lambda (\mp A_{\lambda,2} \sin \lambda \eta + A_{\lambda,3} \cos \lambda \eta) \quad (\text{E.38})$$

となるから,  $\mathbf{u}(0, \eta) = \mathbf{u}(0, -\eta)$  が成り立つためには,

$$A_{\lambda,0} = A_{\lambda,2}, \quad (\text{E.39})$$

$$A_{\lambda,1} = -A_{\lambda,3} \quad (\text{E.40})$$

が成り立たねばならない.

これらの条件から得られた係数を使うと, 内部領域の流れ関数は

$$\begin{aligned} \psi_i(\xi, \eta) = & \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{\lambda \xi} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) + e^{-\lambda \xi} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta - A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) \right] \\ & + A_5 + \frac{\omega c^2}{8} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

### E.2.3 内部領域と外部領域の接続

内部領域と外部領域の  $\psi, u_{\xi}, u_{\eta}$  が  $(\xi_0, \eta)$  で接続する条件を課す.

まず  $u_\xi$  に対する要請から,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}(\xi_0, \eta) = \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda e^{\lambda \xi_0} (-A_{\lambda,0} \sin \lambda \eta + A_{\lambda,1} \cos \lambda \eta) + \lambda e^{-\lambda \xi_0} (-A_{\lambda,0} \sin \lambda \eta - A_{\lambda,1} \cos \lambda \eta) \right] - \frac{\omega c^2}{4} \sin 2\eta \quad (\text{E.42})$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda \xi_0} (-B_{\lambda,2} \sin \lambda \eta + B_{\lambda,3} \cos \lambda \eta) \quad (\text{E.43})$$

従って,

$$e^{\lambda \xi_0} A_{\lambda,0} + e^{-\lambda \xi_0} A_{\lambda,0} + \frac{\omega c^2}{4\lambda} \delta_{\lambda,2} = e^{-\lambda \xi_0} B_{\lambda,2}, \quad (\text{E.44})$$

$$e^{\lambda \xi_0} A_{\lambda,1} - e^{-\lambda \xi_0} A_{\lambda,1} = e^{-\lambda \xi_0} B_{\lambda,3} \quad (\text{E.45})$$

である. 次に  $u_\eta$  に対する要請から,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) = \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda e^{\lambda \xi_0} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) - \lambda e^{-\lambda \xi_0} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta - A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) \right] + \frac{\omega c^2}{4} \sinh 2\xi_0 \quad (\text{E.46})$$

$$= \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} -\lambda e^{-\lambda \xi_0} (B_{\lambda,2} \cos \lambda \eta + B_{\lambda,3} \sin \lambda \eta) \right] + \frac{\omega ab}{2} \quad (\text{E.47})$$

となる. これより, 全ての  $\lambda$  について,

$$e^{\lambda \xi_0} A_{\lambda,0} - e^{-\lambda \xi_0} A_{\lambda,0} = -e^{-\lambda \xi_0} B_{\lambda,2}, \quad (\text{E.48})$$

$$e^{\lambda \xi_0} A_{\lambda,1} + e^{-\lambda \xi_0} A_{\lambda,1} = -e^{-\lambda \xi_0} B_{\lambda,3} \quad (\text{E.49})$$

という条件が得られる. 最後に,  $\psi$  に対する要請から,

$$\psi(\xi_0, \eta) = \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{\lambda \xi_0} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta + A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) + e^{-\lambda \xi_0} (A_{\lambda,0} \cos \lambda \eta - A_{\lambda,1} \sin \lambda \eta) \right] + A_5 + \frac{\omega c^2}{8} (\cosh 2\xi_0 + \cos 2\eta) \quad (\text{E.50})$$

$$= \left[ \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{-\lambda \xi_0} (B_{\lambda,2} \cos \lambda \eta + B_{\lambda,3} \sin \lambda \eta) \right] + \frac{\omega ab}{2} \xi_0 + B_5 \quad (\text{E.51})$$

となるから,

$$A_5 + \frac{\omega c^2}{8} \cosh 2\xi_0 = \frac{\omega ab}{2} \xi_0 + B_5 \quad (\text{E.52})$$

という条件が課される.

(E.44) 式 +(E.48) 式は, (E.18) 式を用いて,

$$\begin{aligned} A_{\lambda,0} + \frac{\omega c^2}{8\lambda} e^{-\lambda\xi_0} \delta_{\lambda,2} &= B_{\lambda,0} = 0, \\ A_{\lambda,0} &= -\frac{\omega c^2}{16} e^{-2\xi_0} \delta_{\lambda,2}. \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

(E.44) 式 -(E.48) 式は, (E.39) 式を用いて,

$$B_{\lambda,2} = A_{\lambda,2} + \frac{\omega c^2}{8\lambda} e^{\lambda\xi_0} \delta_{\lambda,2} = -\frac{\omega c^2}{16} e^{-2\xi_0} \delta_{\lambda,2} + \frac{\omega c^2}{16} e^{2\xi_0} \delta_{\lambda,2} = \frac{\omega c^2}{8} \sinh 2\xi_0 \delta_{\lambda,2}. \quad (\text{E.54})$$

(E.45) 式 +(E.49) 式は, (E.18) 式より,

$$A_{\lambda,1} = B_{\lambda,1} = 0. \quad (\text{E.55})$$

(E.45) 式 -(E.49) 式は, (E.55) 式と (E.40) 式より,

$$A_{\lambda,3} = B_{\lambda,3} = 0 \quad (\text{E.56})$$

を得る. (E.52) 式, (E.20) 式, (E.30) 式から,

$$\begin{aligned} A_5 &= B_4 \xi_0 - \frac{\omega c^2}{8} \cosh 2\xi_0 + B_5 \\ &= \frac{\omega c^2}{8} (2\xi_0 \sinh 2\xi_0 - \cosh 2\xi_0) + B_5 \end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

となる.

まとめると,

$$A_{\lambda,0} = A_{\lambda,2} = -\frac{\omega c^2}{16} e^{-2\xi_0} \delta_{\lambda,2}, \quad (\text{E.58})$$

$$A_5 = \frac{\omega c^2}{8} (2\xi_0 \sinh 2\xi_0 - \cosh 2\xi_0) + B_5, \quad (\text{E.59})$$

$$B_{\lambda,2} = \frac{\omega c^2}{8} \sinh 2\xi_0 \delta_{\lambda,2}, \quad (\text{E.60})$$

$$A_{\lambda,1} = A_{\lambda,3} = A_4 = B_{\lambda,0} = B_{\lambda,1} = B_{\lambda,3} = 0. \quad (\text{E.61})$$

ここで,  $A_5$  と  $B_5$  は外部領域と内部領域それぞれの流れ関数のゲタであり, 選びかたには任意性がある. ここでは無限遠で流れ関数がゼロ, すなわち  $B_5$  をゼロと置いた.

従って, 内部領域の流れ関数は

$$\begin{aligned} \psi_i &= e^{2\xi} \left( -\frac{\omega c^2}{16} e^{-2\xi_0} \right) \cos 2\eta + e^{-2\xi} \left( -\frac{\omega c^2}{16} e^{-2\xi_0} \right) \cos 2\eta + A_5 \\ &\quad + \frac{\omega c^2}{8} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \end{aligned} \quad (\text{E.62})$$

$$= -\frac{\omega c^2}{8} e^{-2\xi_0} \cosh 2\xi \cos 2\eta + \frac{\omega c^2}{8} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) + A_5 \quad (\text{E.63})$$

となる. これを  $(x, y)$  座標で表示してみよう.

$$\frac{c^2}{2} \cosh 2\xi \cos 2\eta = x^2 - y^2 - \frac{c^2}{2}, \quad (\text{E.64})$$

$$\frac{c^2}{2} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) = x^2 + y^2 \quad (\text{E.65})$$

となることを使って,

$$\begin{aligned} \psi_i &= -\frac{\omega}{4} \left( x^2 - y^2 - \frac{c^2}{2} \right) e^{-2\xi_0} + \frac{\omega}{4} (x^2 + y^2) + A_5 \\ &= \frac{\omega}{4} [(1 - e^{-2\xi_0})x^2 + (1 + e^{-2\xi_0})y^2] + \frac{\omega c^2}{8} e^{-2\xi_0} + A_5 \\ &= \frac{\omega}{2} e^{-\xi_0} (\sinh \xi_0 x^2 + \cosh \xi_0 y^2) + \frac{\omega c^2}{8} e^{-2\xi_0} + A_5 \\ &= \frac{\omega}{2} e^{-\xi_0} \left( \frac{b}{c} x^2 + \frac{a}{c} y^2 \right) + \frac{\omega c^2}{8} e^{-2\xi_0} + A_5 \\ &= \frac{\omega}{2} \frac{1}{ce^{\xi_0}} (bx^2 + ay^2) + \frac{\omega c^2}{8} e^{-2\xi_0} + A_5 \\ &= \frac{\omega}{2(a+b)} (bx^2 + ay^2) + \frac{\omega c^2}{8} (2\xi_0 - 1) \sinh 2\xi_0 \end{aligned} \quad (\text{E.66})$$

となる\*1.

そして外部領域の流れ関数は

$$\begin{aligned} \psi_o &= e^{-2\xi} \frac{\omega c^2}{8} \sinh 2\xi_0 \cos 2\eta + \xi \frac{\omega c^2}{4} \sinh 2\xi_0 \\ &= \frac{\omega c^2}{8} \sinh 2\xi_0 (e^{-2\xi} \cos 2\eta + 2\xi) \\ &= \frac{\omega ab}{4} (e^{-2\xi} \cos 2\eta + 2\xi) \end{aligned} \quad (\text{E.67})$$

となる.

\*1 多くのテキストや論文では内部領域と外部領域を接続するためのゲタとなる定数項は省かれていることを注意しておく.

### E.3 回転角速度

Kirchhoff の楕円渦の回転角速度を求める。楕円渦が形を変えずに静止するような回転系を探す。

回転角速度  $\Omega$  で回転する回転系での、内部領域の流れ関数  $\psi_R$  は、

$$\psi_R = \frac{\omega}{2} \frac{bx^2 + ay^2}{a+b} - \frac{\Omega}{2} (x^2 + y^2) \quad (\text{E.68})$$

である。回転系での流体の速度は\*2

$$u_R = -\frac{\partial \psi_R}{\partial y} = -\frac{\omega a}{a+b} y + \Omega y, \quad (\text{E.70})$$

$$v_R = \frac{\partial \psi_R}{\partial x} = \frac{\omega b}{a+b} x - \Omega x. \quad (\text{E.71})$$

楕円渦がその形を変えないためには、境界にある流体粒子が境界上を運動すればよい。すなわち、境界における流体が境界に沿った速度成分のみを持てばよい。境界線、つまり楕円を表す式を時間微分すれば、

$$\frac{\dot{x}x}{a^2} + \frac{\dot{y}y}{b^2} = 0 \quad (\text{E.72})$$

となる。 $\dot{x}, \dot{y}$  に  $u_R, v_R$  をそれぞれ代入すると、

$$\Omega = \frac{\omega ab}{(a+b)^2} \quad (\text{E.73})$$

を得る。

### E.4 線形安定性

この節では Love(1893) [15] に基づき、Kirchhoff の楕円渦の線形安定性解析を行う。

---

\*2 ちなみに相対渦度は

$$\nabla^2 \psi_R = \frac{\partial v_R}{\partial x} - \frac{\partial u_R}{\partial y} = \frac{\omega b}{a+b} - \Omega + \frac{\omega a}{a+b} - \Omega = \omega - 2\Omega \quad (\text{E.69})$$

となっている。

内部領域の流れ関数を  $\psi_i + \delta\psi_i$ , 外部領域の流れ関数を  $\psi_o + \delta\psi_o$  と置く. ここで,

$$\delta\psi_i := \sum_m A_m \cosh m\xi \cos m\eta + B_m \sinh m\xi \sin m\eta, \quad (\text{E.74})$$

$$\delta\psi_o := \sum_m A'_m \cosh m\xi_0 e^{-m(\xi-\xi_0)} \cos m\eta + B'_m \sinh m\xi_0 e^{-m(\xi-\xi_0)} \sin m\eta \quad (\text{E.75})$$

と置く. このように置いたのは, 次の理由からである. 与える擾乱は渦度強制を含まない, すなわち渦なしである. ということは, 擾乱の関数形は外部領域の解, すなわち (E.15) 式の形におけばよい. また, 外部領域での擾乱の流れ関数  $\delta\psi_o$  の形は  $\xi = \xi_0$  で内部領域の擾乱の流れ関数  $\delta\psi_o$  と一致するように置いたため, このようになっている.

また, 内部領域と外部領域の境界の位置に関する次の量を定義する.

$$F := \xi - (\xi_0 + \delta\xi) = 0. \quad (\text{E.76})$$

ここで,  $\delta\psi_i, \delta\psi_o, \delta\xi, A_m, B_m, A'_m, B'_m$  は同じオーダーの微小量であるとする.

#### E.4.1 速度ベクトルが連続であることを要請

内部領域と外部領域の境界  $\xi = \xi_0 + \delta\xi$  において,  $\mathbf{u}$  が連続であることを要請する:

$$\frac{\partial(\psi_i + \delta\psi_i)}{\partial\eta} = \frac{\partial(\psi_o + \delta\psi_o)}{\partial\eta}, \quad (\text{E.77})$$

$$\frac{\partial(\psi_i + \delta\psi_i)}{\partial\xi} = \frac{\partial(\psi_o + \delta\psi_o)}{\partial\xi}. \quad (\text{E.78})$$

これらを順番に計算していく. 計算の過程で, よく使う関係をあらかじめ挙げておく.

$$e^\xi = 1 + \xi + O(\xi^2),$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \cosh 2\xi_0,$$

$$2ab = c^2 \sinh 2\xi_0,$$

$$\frac{a+b}{a-b} = e^{2\xi_0},$$

$$\cosh(\xi_0 + \delta\xi) = \cosh \xi_0 + \delta\xi \sinh \xi_0 + O((\delta\xi)^2) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \delta\xi + O((\delta\xi)^2),$$

$$\sinh(\xi_0 + \delta\xi) = \sinh \xi_0 + \delta\xi \cosh \xi_0 + O((\delta\xi)^2) = \frac{b}{c} + \frac{a}{c} \delta\xi + O((\delta\xi)^2).$$

では, 具体的に (E.77), (E.78) を計算する.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= \frac{\omega c^2}{8(a+b)} \frac{\partial}{\partial \eta} [(a+b) \cosh 2\xi + (a+b) \cos 2\eta - a + b \\
&\quad - (a-b) \cosh 2\xi \cos 2\eta] \\
&= -\frac{\omega c^2}{4(a+b)} [a+b - (a-b) \cosh 2\xi] \sin 2\eta \\
&= -\frac{\omega c^2}{4(a+b)} [a+b - (a-b)(\cosh 2\xi_0 + 2\delta\xi \sinh 2\xi_0)] \sin 2\eta + O((\delta\xi)^2) \\
&= -\frac{\omega c^2}{4(a+b)} \left[ a+b - (a-b) \left( \frac{a^2+b^2}{c^2} + 2\delta\xi \frac{2ab}{c^2} \right) \right] \sin 2\eta + O((\delta\xi)^2) \\
&= -\frac{\omega c^2}{4} \left[ 1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} - \frac{4\delta\xi ab}{(a+b)^2} \right] \sin 2\eta + O((\delta\xi)^2) \\
&= -\frac{\omega c^2}{4} \left[ \frac{2ab}{(a+b)^2} - \frac{4\delta\xi ab}{(a+b)^2} \right] \sin 2\eta + O((\delta\xi)^2) \\
&= -\frac{\omega c^2 ab}{2(a+b)^2} (1 - 2\delta\xi) \sin 2\eta + O((\delta\xi)^2) \\
&= -\frac{\omega}{2} ab \frac{a-b}{a+b} (1 - 2\delta\xi) \sin 2\eta + O((\delta\xi)^2). \tag{E.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \psi_o}{\partial \eta} \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= -\frac{\omega ab}{2} e^{-2(\xi_0+\delta\xi)} \sin 2\eta \\
&= -\frac{\omega ab}{2} e^{-2\xi_0} (1 - 2\delta\xi) \sin 2\eta + O((\delta\xi)^2) \\
&= -\frac{\omega ab}{2} \frac{a-b}{a+b} (1 - 2\delta\xi) \sin 2\eta + O((\delta\xi)^2). \tag{E.80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \delta \psi_i}{\partial \eta} \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= \sum_m -mA_m \cosh m(\xi_0 + \delta\xi) \sin m\eta + mB_m \sinh m(\xi_0 + \delta\xi) \cos m\eta \\
&= \sum_m -mA_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + mB_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta + O((\delta\xi)^2). \tag{E.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \delta \psi_o}{\partial \eta} \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= \sum_m -mA'_m \cosh m\xi_0 e^{-m\delta\xi} \sin m\eta + mB'_m \sinh m\xi_0 e^{-m\delta\xi} \cos m\eta \\
&= \sum_m -mA'_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + mB'_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta + O((\delta\xi)^2). \tag{E.82}
\end{aligned}$$

従って, (E.77) 式が  $\delta\xi$  のオーダーまでで成り立つためには,  $A_m = A'_m$ ,  $B_m = B'_m$  でなければならない.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= \frac{\omega c^2}{8(a+b)} \frac{\partial}{\partial \xi} [(a+b) \cosh 2\xi - a + b \\
&\quad + \{(a+b) - (a-b) \cosh 2\xi\} \cos 2\eta] \\
&= \frac{\omega c^2}{4(a+b)} [(a+b) \sinh 2\xi - (a-b) \sinh 2\xi \cos 2\eta] \\
&= \frac{\omega c^2}{4} \left[ 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \right] \sinh 2\xi \\
&= \frac{\omega c^2}{4} \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \right) (\sinh 2\xi_0 + 2\delta\xi \cosh 2\xi_0) + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega}{4} \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \right) \{2ab + 2\delta\xi(a^2 + b^2)\} + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega}{2} \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \right) \{ab + \delta\xi(a^2 + b^2)\} + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega ab}{2} \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta + \frac{a^2 + b^2}{ab} \delta\xi - \frac{a^2 + b^2}{ab} \delta\xi \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \right) \\
&\quad + O((\delta\xi)^2). \tag{E.83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \psi_o}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= \frac{\omega ab}{2} (1 - e^{-2(\xi_0+\delta\xi)} \cos 2\eta) \\
&= \frac{\omega ab}{2} \{1 - e^{-2\xi_0} (1 - 2\delta\xi) \cos 2\eta\} + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega ab}{2} \left\{ 1 - \frac{a-b}{a+b} (1 - 2\delta\xi) \cos 2\eta \right\} + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega ab}{2} \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta + \frac{a-b}{a+b} 2\delta\xi \cos 2\eta \right) + O((\delta\xi)^2). \tag{E.84}
\end{aligned}$$



従って,

$$\begin{aligned}
\left. \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_o}{\partial \xi} \right) \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= \frac{\omega}{2} (a^2 + b^2) \delta\xi \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \right) \\
&\quad - \frac{\omega}{2} 2ab \frac{a-b}{a+b} \delta\xi \cos 2\eta + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega}{2} (a^2 + b^2) \delta\xi \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta - 2ab \frac{a-b}{(a+b)(a^2+b^2)} \cos 2\eta \right) \\
&\quad + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega}{2} (a^2 + b^2) \delta\xi \left[ 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \left( 1 + \frac{2ab}{a^2+b^2} \right) \right] + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega}{2} (a^2 + b^2) \delta\xi \left[ 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} \right] + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega}{2} (a^2 + b^2) \delta\xi \left[ 1 - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cos 2\eta \right] + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega}{2} \delta\xi [(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \cos 2\eta] + O((\delta\xi)^2) \\
&= \omega \delta\xi (a^2 \sin^2 \eta + b^2 \cos^2 \eta) + O((\delta\xi)^2) \\
&= \omega h_0^2 \delta\xi + O((\delta\xi)^2). \tag{E.85}
\end{aligned}$$

ここで、最後の式は  $h_0^2 := h^2(\xi_0, \eta) = a^2 \sin^2 \eta + b^2 \cos^2 \eta$  を用いた\*<sup>3</sup>.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \delta \psi_i}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= \sum_m m A_m \sinh m(\xi_0 + \delta\xi) \cos m\eta + m B_m \cosh m(\xi_0 + \delta\xi) \sin m\eta \\
&= \sum_m m A_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta + m B_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + O((\delta\xi)^2). \tag{E.86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \delta \psi_o}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} &= \sum_m -m A_m \cosh m\xi_0 e^{-m\delta\xi} \cos m\eta - m B_m \sinh m\xi_0 e^{-m\delta\xi} \sin m\eta \\
&= \sum_m -m A_m \cosh m\xi_0 \cos m\eta - m B_m \sinh m\xi_0 \sin m\eta + O((\delta\xi)^2). \tag{E.87}
\end{aligned}$$

従って,

$$\left. \left( \frac{\partial \delta \psi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \delta \psi_o}{\partial \xi} \right) \right|_{\xi=\xi_0+\delta\xi} = \sum_m m A_m e^{m\xi_0} \cos m\eta + m B_m e^{m\xi_0} \sin m\eta \tag{E.88}$$

\*<sup>3</sup> Love(1893) では  $h_0$  がところどころで何故か  $1/h_0$  として扱われているが、これは誤植と見られる。

従って, (E.78) 式が  $\delta\xi$  のオーダーまでで成り立つためには,

$$h_0^2 \delta\xi + \sum_m \frac{m}{\omega} e^{m\xi_0} (A_m \cos m\eta + B_m \sin m\eta) = 0 \quad (\text{E.89})$$

が成り立つ必要がある.

次に, 初期に境界を構成していた流体が境界を構成し続ける, という条件を課す. これは回転系において,

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad (\text{E.90})$$

と表現できる. 回転系の速度ベクトル  $\mathbf{u}_R$  は慣性系の速度ベクトル  $\mathbf{u}$  を用いて

$$\mathbf{u}_R := (u + \Omega y)\hat{\mathbf{e}}_x + (v - \Omega x)\hat{\mathbf{e}}_y \quad (\text{E.91})$$

だから,  $F$  の回転系におけるラグランジュ的保存は, 慣性系の速度ベクトルを經由して楕円渦の流れ関数を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + (u + \Omega y) \frac{\partial F}{\partial x} + (v - \Omega x) \frac{\partial F}{\partial y} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \psi_0 + \delta\psi_0 - \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) \right] \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \psi_0 + \delta\psi_0 - \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) \right] \frac{\partial F}{\partial y} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial [F, \psi_0 + \delta\psi_0 - \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2)]}{\partial(x, y)} \end{aligned} \quad (\text{E.92})$$

と書ける. ここで,  $\delta\xi$  は  $\eta$  と  $t$  の関数として,  $h^{-2} = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, y)$  を用いると\*4,

$$\frac{\partial h^2 \delta\xi}{\partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta\xi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left( \psi_0 - \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) + \delta\psi_0 \right) = 0 \quad (\text{E.98})$$

\*4  $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y)$  を求める. 次の楕円を表す式, 双曲線を表す式

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1, \quad (\text{E.93})$$

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad (\text{E.94})$$

を  $x, y$  で偏微分すると,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{c}{h^2} \sinh \xi \cos \eta, \quad (\text{E.95})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{c}{h^2} \cosh \xi \sin \eta \quad (\text{E.96})$$

を得る. 従って,

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{h^2} \quad (\text{E.97})$$

を得る.

となる. これを線形化すると,

$$\frac{\partial h_0^2 \delta \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \psi_0 - \frac{\Omega}{2} (x^2 + y^2) + \delta \psi_0 \right) + \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \psi_0 - \frac{\Omega}{2} (x^2 + y^2) \right) = 0 \quad (\text{E.99})$$

となる.

$\xi = \xi_0 + \delta \xi$  において, (E.80) 式と (E.84) 式を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} &= -\frac{\omega ab}{2} \frac{a-b}{a+b} (1 - 2\delta \xi) \sin 2\eta \\ &+ \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \frac{\omega ab}{2} \left( 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta \right) + O((\delta \xi)^2). \end{aligned} \quad (\text{E.100})$$

同様に, (E.82) 式を用いて

$$\frac{\partial \delta \psi_0}{\partial \eta} + O((\delta \xi)^2) = \sum_m -mA_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + mB_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta + O((\delta \xi)^2). \quad (\text{E.101})$$

また,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= c^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta + c^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta \\ &= \frac{c^2}{2} (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \end{aligned} \quad (\text{E.102})$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left\{ -\frac{\Omega}{2} (x^2 + y^2) \right\} &= -\frac{\Omega c^2}{4} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\cosh 2\xi + \cos 2\eta) \\ &= \frac{\Omega c^2}{2} \left( \sin 2\eta - \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \sinh 2\xi_0 \right) + O((\delta \xi)^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega ab}{(a+b)^2} \left[ (a^2 - b^2) \sin 2\eta - 2ab \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \right] \\ &+ O((\delta \xi)^2) \\ &= \frac{1}{2} \omega ab \frac{a-b}{a+b} \sin 2\eta - \frac{\omega a^2 b^2}{(a+b)^2} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} + O((\delta \xi)^2) \end{aligned} \quad (\text{E.103})$$

となる.

まとめると,

$$\begin{aligned}
& h_0^2 \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} - \frac{\omega ab}{2} \frac{a-b}{a+b} (1-2\delta \xi) \sin 2\eta + \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \frac{\omega ab}{2} \left(1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta\right) + \frac{\omega ab}{2} \frac{a-b}{a+b} \sin 2\eta \\
& \quad - \frac{\omega a^2 b^2}{(a+b)^2} \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} + \sum_m -mA_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + mB_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta = 0 \\
& h_0^2 \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \frac{a-b}{a+b} \omega ab \delta \xi \sin 2\eta + \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \frac{\omega ab}{2(a+b)^2} \left[ (a+b)^2 \left(1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\eta\right) - 2ab \right] \\
& \quad + \sum_m -mA_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + mB_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta = 0 \\
& h_0^2 \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \frac{a-b}{a+b} \omega ab \delta \xi \sin 2\eta + \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \frac{\omega ab}{2(a+b)^2} [a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos 2\eta] \\
& \quad + \sum_m -mA_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + mB_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial t} h_0^2 \delta \xi + \frac{\omega ab}{(a+b)^2} \left[ (a^2 - b^2) \delta \xi \sin 2\eta + h_0^2 \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \right] \\
& \quad + \sum_m -mA_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + mB_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial t} h_0^2 \delta \xi + \frac{\omega ab}{(a+b)^2} \left[ \frac{\partial h_0^2}{\partial \eta} \delta \xi + h_0^2 \frac{\partial \delta \xi}{\partial \eta} \right] \\
& \quad + \sum_m -mA_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta + mB_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial t} h_0^2 \delta \xi + \frac{\omega ab}{(a+b)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} h_0^2 \delta \xi + \sum_m m(B_m \sinh m\xi_0 \cos m\eta - A_m \cosh m\xi_0 \sin m\eta) = 0
\end{aligned} \tag{E.104}$$

となる.

(E.104) 式に (E.89) 式を代入して整理すると,

$$A_m = -\frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^m + \left( \frac{2mab}{(a+b)^2} - 1 \right) \right] B_m \tag{E.105}$$

$$B_m = -\frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^m - \left( \frac{2mab}{(a+b)^2} - 1 \right) \right] A_m \tag{E.106}$$

を得る. ここで,  $A_m, B_m \propto e^{-int}$  とする.  $A_m$  を消去すると,

$$\ddot{B}_m + \left( \frac{m\omega ab}{(a+b)^2} - \omega e^{-m\xi_0} \cosh m\xi_0 \right) \left( \frac{m\omega ab}{(a+b)^2} - \omega e^{-m\xi_0} \sinh m\xi_0 \right) B_m = 0 \tag{E.107}$$

となるので,  $n^2$  は

$$n^2 = \frac{\omega^2}{4} \left[ \left( 1 - \frac{2mab}{(a+b)^2} \right)^2 - \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^{2m} \right] \quad (\text{E.108})$$

と求まる.  $n^2 > 0$  で安定,  $n^2 < 0$  で不安定である.  $m$  が増えると第二項は小さくなり, 不安定に寄与しにくくなるのが分かる.

$m$  が小さいときにはどうなっているか具体的に計算すると

$$n^2 = \begin{cases} \Omega^2 > 0, & m = 1 \text{ の場合} \\ 0, & m = 2 \text{ の場合} \\ \frac{\omega^2 a^2 b^2}{(a+b)^6} (a-3b)(b-3a) & m = 3 \text{ の場合} \\ \frac{32a^2 b^2}{(a+b)^8} (-a^4 + 4a^3 b + 2a^2 b^2 + 4ab^3 - b^4) & m = 4 \text{ の場合} \end{cases}$$

となっている.  $m = 3$  の場合は, 不安定な場合 ( $n^2 < 0$ ) は

$$\begin{aligned} a < 3b \quad \text{かつ} \quad b > 3a & \Leftrightarrow 0 < a < \frac{b}{3} < 3b \\ a > 3b \quad \text{かつ} \quad b < 3a & \Leftrightarrow 0 < b < \frac{a}{3} < 3a \end{aligned}$$

いま,  $0 < b < a$  とする (こうしても一般性を失わない) と, 下の条件のみが成り立ちうる. 従って,  $0 < b < a$  のとき,  $3b < a$  ならば Kirchhoff の楕円渦は線形不安定である.

$m = 4$  の場合は,  $n^2 = 0$  のうち実解は  $a/b = \pm 2^{1/4} \sqrt{\sqrt{2} + 2} + \sqrt{2} + 1$  で, その大きい方 ( $a/b > 1$  を満たす方) は,  $a/b \approx 4.612$  である.

## E.4.2 境界における圧力の連続性

内部領域と外部領域の境界における圧力の連続性について見ておく. はじめに, 摂動を加えていない状態の圧力の連続性を調べておく.

$\Omega$  で回転する回転系の運動方程式は,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\text{R}} + \mathbf{u}_{\text{R}} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\text{R}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_{\text{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{E.109})$$

である. このうちの一部を慣性系の速度ベクトル  $\mathbf{u}_{\text{R}} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$  を用いて表すと,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\text{R}} + (\mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{E.110})$$

となる. これを成分で書くと,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_R + (u + \Omega y)\frac{\partial u}{\partial x} + (v - \Omega x)\frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{E.111})$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_R + (u + \Omega y)\frac{\partial v}{\partial x} + (v - \Omega x)\frac{\partial v}{\partial y} + \Omega u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{E.112})$$

となる.

外部領域では渦なしだから  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$  が成り立つことを用いると,

$$\begin{aligned} (u + \Omega y)\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + u\Omega y \right), \\ (v - \Omega x)\frac{\partial u}{\partial y} &= (v - \Omega x)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} - v\Omega x \right) + v\Omega, \\ (u + \Omega y)\frac{\partial v}{\partial x} &= (u + \Omega y)\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} + u\Omega y \right) - u\Omega, \\ (v - \Omega x)\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} - v\Omega x \right) \end{aligned}$$

と変形できる. さらに, 内部領域と外部領域の境界上では速度が定常的であること

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_R = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_R = 0 \quad (\text{E.113})$$

を用いると, 運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + u\Omega y - v\Omega x \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + u\Omega y - v\Omega x \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

となるから, それぞれ  $x, y$  について積分して

$$-\frac{p}{\rho} + \text{const.} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + u\Omega y - v\Omega x \quad (\text{E.114})$$

を得る. 内部領域でも同様に計算可能 ( $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega$  を用いて計算する) であるが, 内部領域では単純に内部領域の流れ関数を用いた方が少し計算が楽である. 速度が

$$u = \frac{-\omega ay}{a+b}, \quad v = \frac{\omega bx}{a+b}$$

となることを用いると, 簡単な計算ののち,

$$-\frac{p}{\rho} + \text{const.} = -2\Omega\psi = u\Omega y - v\Omega x \quad (\text{E.115})$$

と求まる. 境界上  $\xi = \xi_0$  での運動エネルギーは

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(u^2 + v^2) &= \frac{\omega^2}{2(a+b)^2}(b^2x^2 + a^2y^2) \\
 &= \frac{\omega^2c^2}{2(a+b)^2}(b^2 \cosh^2 \xi_0 \cos^2 \eta + a^2 \sinh^2 \xi_0 \sin^2 \eta) \\
 &= \frac{\omega^2c^2}{2(a+b)^2}\left(b^2 \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \eta + a^2 \frac{b^2}{c^2} \sin^2 \eta\right) \\
 &= \frac{\omega^2a^2b^2}{2(a+b)^2} \\
 &= \frac{1}{2}\Omega\omega ab
 \end{aligned}$$

というように一定であるから, 圧力場は内部領域と外部領域で連続になっている.

それでは, 次に摂動を加えたときの圧力場を計算する. 摂動を加えた場合の運動方程式は, 摂動を  $u', v', p'$  で表すと次のようになる.

$$\frac{\partial u + u'}{\partial t} + (u + u' + \Omega y) \frac{\partial u + u'}{\partial x} + (v + v' - \Omega x) \frac{\partial u + u'}{\partial y} - \Omega(v + v') = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p + p'}{\partial x}, \quad (\text{E.116})$$

$$\frac{\partial v + v'}{\partial t} + (u + u' + \Omega y) \frac{\partial v + v'}{\partial x} + (v + v' - \Omega x) \frac{\partial v + v'}{\partial y} + \Omega(u + u') = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p + p'}{\partial y} \quad (\text{E.117})$$

これから, 非摂動部分の式を引き, 摂動の 2 次以上を無視すると,

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (u + \Omega y) \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u}{\partial x} + (v - \Omega x) \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (\text{E.118})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (u + \Omega y) \frac{\partial v'}{\partial x} + u' \frac{\partial v}{\partial x} + (v - \Omega x) \frac{\partial v'}{\partial y} + v' \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega u' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (\text{E.119})$$

となる. 速度ポテンシャル  $\delta\phi_i, \delta\phi_o$  <sup>\*5</sup> を導入する.  $\mathbf{u}' = \nabla\delta\phi$  を用いて,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial\delta\phi}{\partial t} + uu' + vv' - \Omega\delta\psi \right] - \frac{\partial\delta\psi}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{p'}{\rho}, \quad (\text{E.120})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial\delta\phi}{\partial t} + uu' + vv' - \Omega\delta\psi \right] - \frac{\partial\delta\psi}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{p'}{\rho} \quad (\text{E.121})$$

となる. 内部領域では渦度は一様で  $\omega$ , 外部領域では渦なしを用いると簡単に積分できる

<sup>\*5</sup> 摂動部分の渦度はゼロである.

形になるので  $x, y$  で積分すると,

$$\begin{aligned} -\frac{p'}{\rho} + \text{const.} &= \frac{\partial \delta \phi_i}{\partial t} + uu' + vv' - \Omega \delta \psi_i - \omega \delta \psi_i, \\ -\frac{p'}{\rho} + \text{const.} &= \frac{\partial \delta \phi_o}{\partial t} + uu' + vv' - \Omega \delta \psi_o \end{aligned}$$

となる. 内部領域, 外部領域での圧力の式を両辺に足すことで

$$\begin{aligned} -\frac{p + p'}{\rho} + \text{const.} &= \frac{\partial \delta \phi_i}{\partial t} + u\Omega y - v\Omega x + \Omega \psi_i + uu' + vv' - \Omega \delta \psi_i - \omega \delta \psi_i, \\ -\frac{p + p'}{\rho} + \text{const.} &= \frac{\partial \delta \phi_o}{\partial t} + u\Omega y - v\Omega x + \Omega \psi_o + uu' + vv' - \Omega \delta \psi_o + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

となる. 外部領域と内部領域で圧力が  $\xi = \xi_0 + \delta \xi$  で連続であることを要請すると, オーダー  $\delta \xi$  までで,

$$\frac{\partial \delta \phi_i}{\partial t} - \frac{\partial \delta \phi_o}{\partial t} - \omega \delta \psi_i - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = \text{const.} \quad (\text{E.122})$$

が成り立つ必要がある. ここで,  $\xi = \xi_0 + \delta \xi$  において  $\delta \psi_i - \delta \psi_o = O((\delta \xi)^2)$  となることを用いた. 左辺の項を変形して  $A_m, B_m, \delta \xi$  で表そう. まず左辺の第一項と第二項を考える.  $x$  方向の速度は,

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial \delta \phi}{\partial \xi} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \delta \psi}{\partial \eta} \quad (\text{E.123})$$

だから, 速度ポテンシャルは

$$\delta \phi_i = \sum_m A_m \sinh m\xi \sin m\eta - B_m \cosh m\xi \cos m\eta, \quad (\text{E.124})$$

$$\delta \phi_o = \sum_m -A_m \cosh m\xi_0 e^{-m(\xi - \xi_0)} \sin m\eta + B_m \sinh m\xi_0 e^{-m(\xi - \xi_0)} \cos m\eta \quad (\text{E.125})$$

となる.  $A_m, B_m$  の時間微分は  $\dot{A}_m, \dot{B}_m$  で表すとすると,

$$\frac{\partial \delta \phi_i}{\partial t} - \frac{\partial \delta \phi_o}{\partial t} = \sum_m \dot{A}_m e^{m\xi_0} \sin m\eta - \dot{B}_m e^{m\xi_0} \cos m\eta \quad (\text{E.126})$$

となる.



左辺第三項の運動エネルギーの項を計算する.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(u^2 + v^2) &= \frac{\omega^2}{2(a+b)^2}(b^2x^2 + a^2y^2) \\
&= \frac{\omega^2 a^2 b^2}{2(a+b)^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \\
&= \frac{\omega^2 a^2 b^2}{2(a+b)^2} \left[ \frac{c^2}{a^2} \cosh^2(\xi_0 + \delta\xi) \cos^2 \eta + \frac{c^2}{b^2} \sinh^2(\xi_0 + \delta\xi) \sin^2 \eta \right] \\
&= \frac{\omega^2 a^2 b^2}{4(a+b)^2} \left[ \frac{c^2}{a^2} \{ \cosh 2(\xi_0 + \delta\xi) + 1 \} \cos^2 \eta + \frac{c^2}{b^2} \{ \sinh 2(\xi_0 + \delta\xi) - 1 \} \sin^2 \eta \right] \\
&= \frac{\omega^2 a^2 b^2}{4(a+b)^2} \left[ \frac{c^2}{a^2} (\cosh 2\xi_0 + 1 + 2\delta\xi \sinh 2\xi_0) \cos^2 \eta \right. \\
&\quad \left. + \frac{c^2}{b^2} (\sinh 2\xi_0 - 1 + 2\delta\xi \sinh 2\xi_0) \sin^2 \eta \right] + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega^2 a^2 b^2}{4(a+b)^2} \left[ \frac{1}{a^2} (a^2 + b^2 + c^2 + 2\delta\xi \cdot 2ab) \cos^2 \eta \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{b^2} (a^2 + b^2 - c^2 + 2\delta\xi \cdot 2ab) \sin^2 \eta \right] + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega^2 a^2 b^2}{4(a+b)^2} \left[ \frac{1}{a^2} \left( 2 + 4\frac{b}{a}\delta\xi \right) \cos^2 \eta + \frac{1}{b^2} \left( 2 + 4\frac{a}{b}\delta\xi \right) \sin^2 \eta \right] + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega^2 a^2 b^2}{2(a+b)^2} \left[ 1 + \frac{2\delta\xi}{ab} (a^2 \sin^2 \eta + b^2 \cos^2 \eta) \right] + O((\delta\xi)^2) \\
&= \frac{\omega^2 a^2 b^2}{2(a+b)^2} \left( 1 + \frac{2}{ab} h_0^2 \delta\xi \right) + O((\delta\xi)^2)
\end{aligned}$$

となる. 従って, 圧力が連続であることを要請した式は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \delta \phi_i}{\partial t} - \frac{\partial \delta \phi_o}{\partial t} - \omega \delta \psi_i - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\
&= \sum_m \dot{A}_m e^{m\xi_0} \sin m\eta - \dot{B}_m e^{m\xi_0} \cos m\eta \\
&\quad - \omega \left( \sum_m A_m \cosh m\xi_0 \cos m\eta + B_m \sinh m\xi_0 \sin m\eta \right) \\
&\quad - \frac{\omega^2 a^2 b^2}{2(a+b)^2} \left( 1 + \frac{2}{ab} h_0^2 \delta\xi \right) + O((\delta\xi)^2) = \text{const.}
\end{aligned}$$

となる. 微小量の 0 次のオーダーでは上式は満たされている. 微小量の 1 次のオーダーで右辺が一定であるためには,  $\cos m\eta, \sin m\eta$  の係数がゼロになればよい. (E.89) 式を代入

すると,

$$\dot{A}_m - \frac{m\omega ab}{(a+b^2)} B_m - \omega B_m e^{-m\xi_0} \sinh m\xi_0 = 0, \quad (\text{E.105})$$

$$\dot{B}_m + \frac{m\omega ab}{(a+b^2)} A_m + \omega A_m e^{-m\xi_0} \cosh m\xi_0 = 0 \quad (\text{E.106})$$

を得る. 従って, 圧力が連続であることは, 初期に境界を構成する流体要素が境界を構成し続ける, という条件と同じになっている.

### E.4.3 解と分散関係

(E.89) 式を

$$h_0^2 \delta\xi = \sum_m \alpha_m \cos m\eta + \beta_m \sin m\eta \quad (\text{E.127})$$

と表し (従って  $(\alpha_m, \beta_m) = -m/\omega e^{m\xi_0} (A_m, B_m)$  である),

$$\alpha_m(t) = \alpha_m^+ e^{i\lambda_m t} + \alpha_m^- e^{-i\lambda_m t}, \quad (\text{E.128})$$

$$\beta_m(t) = \beta_m^+ e^{i\lambda_m t} + \beta_m^- e^{-i\lambda_m t}, \quad (\text{E.129})$$

$$\alpha_{m0} := \alpha_m(0) = \alpha_m^+ + \alpha_m^-, \quad (\text{E.130})$$

$$\beta_{m0} := \beta_m(0) = \beta_m^+ + \beta_m^-, \quad (\text{E.131})$$

$$\mu_m^+ := \frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^m + \left( \frac{2mab}{(a+b)^2} - 1 \right) \right], \quad (\text{E.132})$$

$$\mu_m^- := \frac{\omega}{2} \left[ \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^m - \left( \frac{2mab}{(a+b)^2} - 1 \right) \right], \quad (\text{E.133})$$

$$n^2 = -\mu_m^+ \mu_m^-, \quad (\text{E.134})$$

$$\lambda_m = \sqrt{|\mu_m^+ \mu_m^-|} \quad (\text{E.135})$$

とすると, (E.105) 式, (E.106) 式を用いて, 結局

$$\begin{aligned} h_0^2 \delta\xi = & \sum_{m, \text{安定}} \left( \alpha_{m0} \cos \lambda_m t - \frac{\mu_m^+}{\lambda_m} \beta_{m0} \sin \lambda_m t \right) \cos m\eta \\ & + \left( \beta_{m0} \cos \lambda_m t + \frac{\lambda_m}{\mu_m^+} \alpha_{m0} \sin \lambda_m t \right) \sin m\eta \\ & + \sum_{m, \text{不安定}} \left( \alpha_{m0} \cosh \lambda_m t - \frac{\mu_m^+}{\lambda_m} \beta_{m0} \sinh \lambda_m t \right) \cos m\eta \\ & + \left( \beta_{m0} \cosh \lambda_m t - \frac{\lambda_m}{\mu_m^+} \alpha_{m0} \sinh \lambda_m t \right) \sin m\eta \end{aligned} \quad (\text{E.136})$$

となる. Love(1893) [15] は (何故か) この解を書き下しておらず, Guo, et al.(2004) [7] がこの解を陽に与えた.

#### E.4.4 分散曲線

分散曲線を描くと, 図 E.1 のようになる.

また, アスペクト比を横軸に取れば, 図 E.2 のようになる (Mitchell and Rossi(2008) [22] の Fig.1 に, 振動数と成長率を合わせた図がある).

### E.5 淀み点とフィラメント形成

この節では, Polvani, et al.(1989) [31] のレビューを行い, 淀み点の位置とフィラメント形成の関係を見る.

まず, (速度) 淀み点の位置は流れ関数が次の関係を満たす座標  $(\xi_c, \eta_c)$  である.

$$\frac{\partial \psi_c}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \psi_c}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{E.137})$$

ここで,  $\psi_c := \psi_o - \frac{1}{2}\Omega(x^2 + y^2)$  である. これは簡単に計算できて\*6,

$$\eta_c = 0, \pi, \quad \xi_c = \frac{1}{2} \log \frac{a+3b}{a-b}, \quad \text{双曲型} \quad (\text{E.139})$$

$$\eta_c = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \quad \xi_c = \frac{1}{2} \log \frac{3a+b}{a-b}, \quad \text{楕円型} \quad (\text{E.140})$$

と求まる\*7.

---

\*6 まず

$$\frac{\partial \psi_c}{\partial \eta} = \frac{\omega ab}{2} \sin 2\eta (\Lambda - e^{-2\xi}) = 0$$

が成り立つのは, (1)  $\xi$  は任意で  $\sin 2\eta = 0$  なる  $\eta$  の場合か, (2)  $\eta$  は任意で  $\Lambda = e^{-2\xi}$  の場合である. ここで  $\Lambda = (a-b)/(a+b)$  である. (1) の場合は

$$\frac{\partial \psi_c}{\partial \xi} = \Omega h_0^2 > 0 \quad (\text{E.138})$$

となるので, これはよどみ点ではない.

一方 (2) の場合はすぐ後で見えるように, よどみ点になっている.

\*7 双曲型, 楕円型の判別は, よどみ点における速度勾配テンソルの固有値を見ればよい.

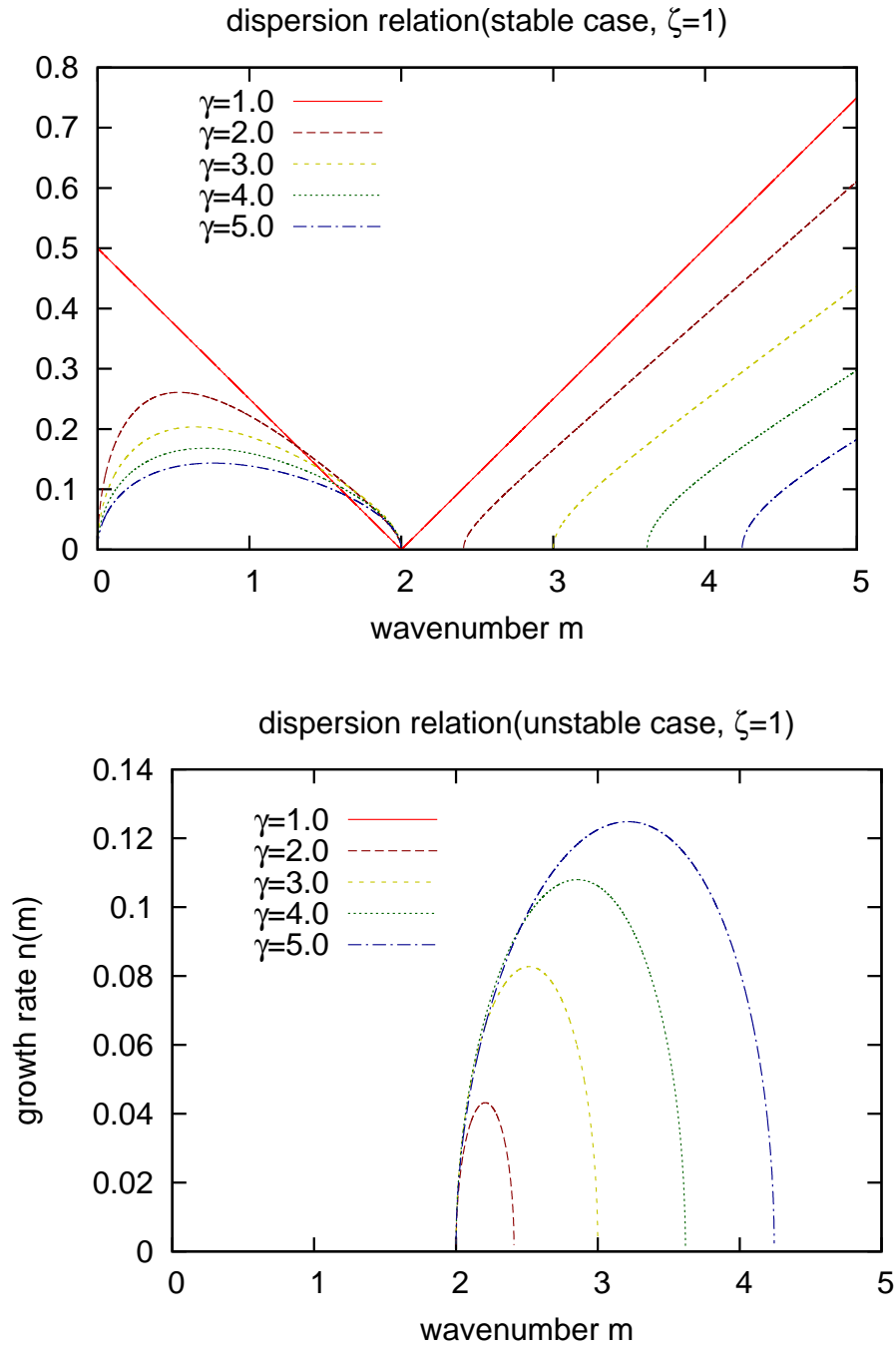


図 E.1 Kirchhoff の楕円渦に与えた擾乱の分散曲線. ただし,  $m$  が整数のところでのみ値を取ることに注意. ここで渦度は  $\omega = 1.0$  とした.

また, 摂動を加えたときの淀み点の位置は,

$$\left. \frac{\partial \Psi_c}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_c+\xi_c^{(1)}, \eta=\eta_c+\eta_c^{(1)}} = 0, \quad (\text{E.141})$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_c}{\partial \eta} \right|_{\xi=\xi_c+\xi_c^{(1)}, \eta=\eta_c+\eta_c^{(1)}} = 0 \quad (\text{E.142})$$

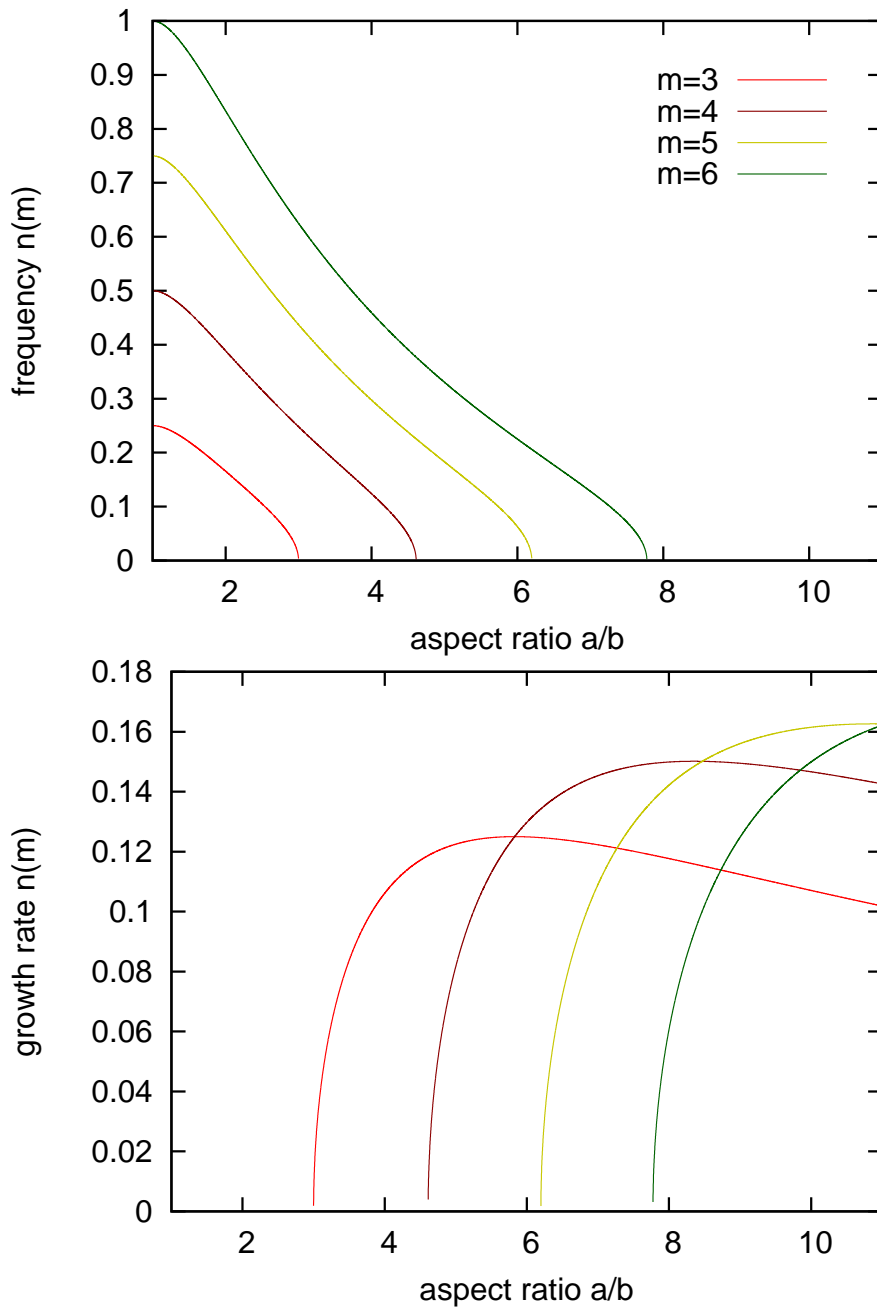


図 E.2 Kirchhoff の楕円渦に与えた擾乱の、アスペクト比ごとの成長率, 振動数. 上図で振動数を, 下図で成長率を示した. ここで渦度は  $\omega = 1.0$  とした.

を満たす  $(\xi, \eta) = (\xi_c + \xi_c^{(1)}, \eta_c + \eta_c^{(1)})$  である. ここで,

$$\Psi_c = \psi_c + \delta\psi_o \quad (\text{E.143})$$

である. ただし  $\xi_c^{(1)}, \eta_c^{(1)}$  は  $\alpha_m, \beta_m$  のオーダーである.

加えた摂動は単色波かつ不安定であるとしてこれを計算すると,

$$\xi_c^{(1)} = \frac{\alpha_m \cosh m\xi_0 e^{-m\xi_c} \cos m\eta_c}{ab(\Lambda \cosh 2\xi_c - e^{-2\xi_c})}, \quad (\text{E.144})$$

$$\eta_c^{(1)} = \frac{\beta_m \sinh m\xi_0 e^{-m\xi_c} \cos m\eta_c}{ab(\Lambda - e^{-2\xi_c})} \quad (\text{E.145})$$

となる. ここで  $\Lambda := (a-b)/(a+b)$  である.

不安定な単色波擾乱を与えたときの境界位置は, (E.136) 式から,

$$\xi = \xi_0 + \delta\xi = \xi_0 + \frac{1}{h_0^2} (\alpha_m \cos m\eta + \beta_m \sin m\eta) \quad (\text{E.146})$$

である.

境界位置とよどみ点が重なる時刻を求めよう.  $\eta_c + \eta_c^{(1)}$  における境界位置  $\xi_0 + \delta\xi$  は,

$$\xi_0 + \delta\xi = \xi_0 + \frac{\alpha_m}{b^2} \cos m\eta_c + O(\epsilon^2) \quad (\text{E.147})$$

である. ここで  $h_0^2(\eta_c + \eta_c^{(1)}) = c^2 \sinh^2 \xi_0 = b^2$  を用いた. また,  $m\eta_c^{(1)} \ll 1$  を仮定して用いた.  $\epsilon$  は  $A_m$  や  $\alpha_m$  のような微小振幅のオーダーである. これらより,  $\xi_0 + \delta\xi = \xi_c + \xi_c^{(1)}$  となる時刻  $t_{\text{CL}}$  は,

$$\begin{aligned} \xi_c - \xi_0 &= \delta\xi - \xi_c^{(1)} \\ &= \alpha_m \cos m\eta_c \left( \frac{-e^{-m\xi_c} \cosh m\xi_0}{ab(\Lambda \cosh 2\xi_c - e^{-2\xi_c})} + \frac{1}{b^2} \right) \\ &=: \alpha_m \gamma \end{aligned} \quad (\text{E.148})$$

より,

$$\xi_0 - \xi_c = e^{\lambda_m t} \frac{\gamma}{2} \left( \alpha_{m0} - \frac{\mu_m^+}{\lambda_m} \beta_{m0} \right) + e^{-\lambda_m t} \frac{\gamma}{2} \left( \alpha_{m0} + \frac{\mu_m^+}{\lambda_m} \beta_{m0} \right) \quad (\text{E.149})$$

となるから,  $e^{-\lambda_m t}$  の項を無視すると,

$$t_{\text{CL}} = \frac{1}{\lambda_m} \left[ \ln(\xi_0 - \xi_c) - \ln \left\{ \frac{\gamma}{2} \left( \alpha_{m0} - \frac{\mu_m^+}{\lambda_m} \beta_{m0} \right) \right\} \right] \quad (\text{E.150})$$

と求まる.

Polvani, et al.(1989) では, 線形論による  $t_C$  の見積り  $t_{\text{CL}}$  とコンターダイナミクスによるシミュレーションで得られた  $t_C$  が近いことを示した. 具体的には,  $ab = 1$ ,  $b/a = 0.3$ ,  $m = 3$ ,  $\alpha_m = \epsilon = 0.02$ ,  $\beta_m = 0$  のとき  $t_C \approx 28.5$ ,  $t_{\text{CL}} \approx 30.4$ , またコンターの曲

率の最小値が負になる時刻は  $t = 27.8$  であった\*<sup>8</sup>. また,  $ab = 1$ ,  $b/a = 0.2$ ,  $m = 4$ ,  $\alpha_m = \epsilon = 0.02$ ,  $\beta_m = 0$  のとき  $t_C \approx 14.3$ ,  $t_{CL} \approx 17.5$ , コンターの曲率の最小値が負になる時刻は  $t = 14.0$  であった\*<sup>9</sup>.

$t_C$  がより早い時刻であるほど  $t_{CL}$  の精度が悪くなっているのは, 指数的に減少する項を無視した影響だろう. これは, パラメータによっては  $t_{CL}$  の見積りの精度が非常に悪くなる可能性があることを意味している.

## E.6 円形渦との関係

この節では, 楕円渦と円形渦との関係を見る. そのために, まず円形渦について概観する.

### E.6.1 円形渦の定常解

円形渦の場合は 2 次元極座標系  $(r, \theta)$  を用いれば簡単に解ける. 極座標でのラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (\text{E.151})$$

であり, いま流れ関数は  $\theta$  方向に一様 (つまり動径速度がゼロ) とすると, 解くべき微分方程式は

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \begin{cases} \omega_0, & (r < r_0) \\ 0, & (r > r_0) \end{cases}$$

となる. ここで  $r_0$  は渦領域の半径,  $\omega_0$  は一様渦度領域の渦度である. 求める流れ関数のうち内部領域での流れ関数を  $\psi_i$ , 外部領域での流れ関数を  $\psi_o$  と書くことにする.

まず  $r < r_0$  において,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right) = r \omega_0 \quad (\text{E.152})$$

\*<sup>8</sup> 再計算すると,  $t_{CL} = 27.9$  だった.

\*<sup>9</sup> 再計算すると,  $t_{CL} = 15.7$  だった.

となるから, 整理しつつ  $r$  で 2 回積分すると,

$$\psi_i = \frac{1}{4}r^2\omega_0 + C_1 \log r + C_2 \quad (\text{E.153})$$

となる.  $C_1 \neq 0$  だと  $r = 0$  で  $\psi$  が特異性を持つ, すなわち速度が発散するので,  $C_1 = 0$  とする.

次に  $r > r_0$  において,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_o}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{E.154})$$

を解く. これもただちに

$$\psi_o = C_3 \log r + C_4 \quad (\text{E.155})$$

となる.

積分定数  $C_2, C_3, C_4$  を決めよう.  $r = r_0$  での  $u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$ ,  $\psi$  の連続性より,

$$u_\theta|_{r=r_0} = \frac{1}{2}r_0\omega_0 = \frac{C_3}{r_0}, \quad (\text{E.156})$$

$$\psi|_{r=r_0} = \frac{1}{4}r_0^2\omega_0 + C_2 = C_3 \log r_0 + C_4 \quad (\text{E.157})$$

となるので,

$$C_3 = \frac{1}{2}r_0^2\omega_0, \quad (\text{E.158})$$

$$C_4 = \frac{1}{4}r_0^2\omega_0 + C_2 - \frac{1}{2}r_0^2\omega_0 \log r_0 \quad (\text{E.159})$$

となる.  $C_2 = 0$ , つまり  $r = 0$  で  $\psi = 0$  とすると, 結局,

$$\psi_i = \frac{1}{4}r^2\omega_0, \quad (\text{E.160})$$

$$\psi_o = \frac{1}{2}r_0^2\omega_0 \log \frac{r}{r_0} + \frac{1}{4}r_0^2\omega_0 \quad (\text{E.161})$$

となる.

角度方向の速度  $u_\theta$  は,

$$u_\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}r\omega_0, & (r < r_0) \\ \frac{1}{2}r_0^2\omega_0 \frac{1}{r} & (r > r_0) \end{cases} \quad (\text{E.162})$$

となり, 内部領域で半径に比例して増加, 外部領域で半径に反比例して減少するような速度場になる. この渦は Rankine 渦と呼ばれる.



## E.6.2 円形渦の線形安定性

円形渦の線形安定性を調べよう.

加える擾乱は渦無しの擾乱であるから, まず渦無しの解を求めよう. 変数分離解を仮定する, すなわち

$$\delta\psi(r, \theta) = f(r)g(\theta) \quad (\text{E.163})$$

と仮定する.  $\nabla^2\delta\psi = 0$  に代入すると,

$$\frac{g}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) + \frac{f}{r^2} \frac{d^2g}{d\theta^2} = 0 \quad (\text{E.164})$$

となる. 変数分離形にすると,

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = -\frac{1}{g} \frac{d^2g}{d\theta^2} =: \lambda^2 \quad (\text{E.165})$$

となる. はじめに  $\lambda \neq 0$  の場合を考える. まず  $g(\theta)$  の方を解くと,

$$\frac{d^2g}{d\theta^2} = -\lambda^2 g \quad (\text{E.166})$$

となる. 周期性  $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$  を満たすためには,  $\lambda^2 > 0$  となる必要がある. これを解くと,

$$g(\theta) = C_{1,\lambda} e^{i\lambda\theta} + C_{2,\lambda} e^{-i\lambda\theta} \quad (\text{E.167})$$

となる. 周期性を満たすためにはさらに,  $\lambda\theta$  が  $2\pi$  周期, つまり  $\lambda$  は整数である必要がある. 次に  $f(r)$  の方を解く. 整理すると,

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{\lambda^2}{r^2} f = 0 \quad (\text{E.168})$$

となる.  $f \propto r^{\pm|\lambda|}$  は, 上の微分方程式を満たす. 従って,

$$f(r) = C_{3,\lambda} r^{|\lambda|} + C_{4,\lambda} r^{-|\lambda|} \quad (\text{E.169})$$

となる. 次に,  $\lambda = 0$  の場合を考える. このときは,

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = 0, \quad \frac{d^2g}{d\theta^2} = 0 \quad (\text{E.170})$$

という二つの微分方程式ができる。これらを解くと、それぞれ

$$f(r) = D_1 \ln r + D_2, \quad g(\theta) = D_3 \theta + D_4 \quad (\text{E.171})$$

となる。  $D_1, D_2, D_3, D_4$  は積分定数である。ここで、  $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$  を満たすには、  $D_3 = 0$  となる必要がある。従って、  $f(r)g(\theta)$  は

$$f(r)g(\theta) = C_5 \ln r + C_6 \quad (\text{E.172})$$

となる。

渦無しの際の流れ関数  $\delta\psi$  を書き下すと、

$$\delta\psi(r, \theta) = \left[ \sum_{|\lambda|=1}^{\infty} (C_{3,\lambda} r^{|\lambda|} + C_{4,\lambda} r^{-|\lambda|}) (C_{1,\lambda} e^{i\lambda\theta} + C_{2,\lambda} e^{-i\lambda\theta}) \right] + C_5 \ln r + C_6 \quad (\text{E.173})$$

となる。

内部領域と外部領域での擾乱の流れ関数をそれぞれ  $\delta\psi_i$ ,  $\delta\psi_o$  と書くことにする。具体的には

$$\delta\psi_i(r, \theta) = \left[ \sum_{|\lambda|=1}^{\infty} (A_{3,\lambda} r^{|\lambda|} + A_{4,\lambda} r^{-|\lambda|}) (A_{1,\lambda} e^{i\lambda\theta} + A_{2,\lambda} e^{-i\lambda\theta}) \right] + A_5 \ln r + A_6, \quad (\text{E.174})$$

$$\delta\psi_o(r, \theta) = \left[ \sum_{|\lambda|=1}^{\infty} (B_{3,\lambda} r^{|\lambda|} + B_{4,\lambda} r^{-|\lambda|}) (B_{1,\lambda} e^{i\lambda\theta} + B_{2,\lambda} e^{-i\lambda\theta}) \right] + B_5 \ln r + B_6, \quad (\text{E.175})$$

と積分定数の記号を書き換えて表すしよう。境界条件として、渦無しの擾乱によって引き起こされた速度場は無遠くあるいは渦の中心に近付くと速やかに減衰することを仮定する。そうすると擾乱によって引き起こされる動径速度の形から、任意の  $\lambda$  について  $A_{3,\lambda} = 0, B_{4,\lambda} = 0$  となる。また、原点で特異性を持たないためには、  $A_5 = 0$  である必要がある。

これを踏まえて、ここでは波数  $|m| \neq 0$  の単色波の擾乱

$$\delta\psi_i(r, \theta) = \varepsilon A \left( \frac{r}{r_0} \right)^{|m|} e^{i(m\theta - nt)}, \quad (\text{E.176})$$

$$\delta\psi_o(r, \theta) = \varepsilon B \left( \frac{r_0}{r} \right)^{|m|} e^{i(m\theta - nt)} \quad (\text{E.177})$$

を考えることにする.\*10

加える擾乱は渦の境界を

$$r = r_0 + \delta r = r_0(1 + \varepsilon e^{i(m\theta - nt)}) \quad (\text{E.178})$$

と変形させるとする. ここで,  $m \neq 0$ ,  $\varepsilon \ll 1$  である. また, 以降では簡単のために擾乱の位相を  $\phi := m\theta - nt$  として表す.

内部領域と外部領域の流れ関数と速度が  $r = r_0 + \delta r$  で接続する条件を求める. まず, 境界  $r = r_0 + \delta r$  における基本場  $\psi_i, \psi_o$  は

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial r} = \frac{1}{2} \omega_0 r, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta r} = \frac{1}{2} \omega_0 (r_0 + \delta r), \quad (\text{E.179})$$

$$\frac{\partial \psi_o}{\partial r} = \frac{1}{2} r_0^2 \omega_0 \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \psi_o}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta r} = \frac{1}{2} r_0^2 \omega_0 \frac{1}{r_0 + \delta r} = \frac{1}{2} \omega_0 (r_0 - \delta r) + O(\varepsilon^2) \quad (\text{E.180})$$

となる. 擾乱  $\delta \psi_i, \delta \psi_o$  の  $r, \theta$  微分は,

$$\frac{\partial \delta \psi_i}{\partial r} = \varepsilon A \frac{|m|}{r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{|m|-1} e^{i\phi}, \quad \frac{\partial \delta \psi_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta r} = \varepsilon A \frac{|m|}{r_0} e^{i\phi} + O(\varepsilon^2), \quad (\text{E.181})$$

$$\frac{\partial \delta \psi_o}{\partial r} = -\varepsilon B \frac{|m|}{r_0} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{|m|+1} e^{i\phi}, \quad \frac{\partial \delta \psi_o}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta r} = -\varepsilon B \frac{|m|}{r_0} e^{i\phi} + O(\varepsilon^2), \quad (\text{E.182})$$

$$\frac{\partial \delta \psi_i}{\partial \theta} = im\varepsilon A \left( \frac{r}{r_0} \right)^{|m|} e^{i\phi}, \quad \frac{\partial \delta \psi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0+\delta r} = im\varepsilon A e^{i\phi} + O(\varepsilon^2), \quad (\text{E.183})$$

$$\frac{\partial \delta \psi_o}{\partial \theta} = im\varepsilon B \left( \frac{r_0}{r} \right)^{|m|} e^{i\phi}, \quad \frac{\partial \delta \psi_o}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0+\delta r} = im\varepsilon B e^{i\phi} + O(\varepsilon^2) \quad (\text{E.184})$$

となる. 境界  $r = r_0 + \delta r$  での流れ関数の  $\theta$  微分の連続性から  $A = B$ , 次に  $r$  微分の連続性から

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{2} (r_0 + \delta r) + \varepsilon A \frac{|m|}{r_0} e^{i\phi} &= \frac{\omega_0}{2} (r_0 - \delta r) - \varepsilon B \frac{|m|}{r_0} e^{i\phi}, \\ \frac{\omega_0}{2} \delta r + \varepsilon A \frac{|m|}{r_0} e^{i\phi} &= -\frac{\omega_0}{2} \delta r - \varepsilon B \frac{|m|}{r_0} e^{i\phi}, \\ -2A \frac{|m|}{r_0} &= r_0 \omega_0, \\ A = B &= -\frac{\omega_0}{2} \frac{r_0^2}{|m|} \end{aligned} \quad (\text{E.185})$$

\*10  $A, B$  は複素振幅ではない. ここを複素振幅にする, つまり初期位相を考慮するならば, すぐ後の渦の境界位置の指数関数の位相も同時に考慮すると整合的である.

となる.

$n$  の具体的な形を求めよう. 渦の境界でゼロになる関数

$$F := r - r_0(1 + \varepsilon e^{i\phi}) \quad (\text{E.186})$$

を定義する. 擾乱に対応する流れ関数を  $\delta\psi$  と書くことにすると, 境界上の流体は境界に留まるので,

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(\psi + \delta\psi, F)}{\partial(r, \theta)} = 0 \quad (\text{E.187})$$

が成り立つ.  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{r}$  となるから<sup>\*11</sup>,

$$-r \frac{\partial \delta r}{\partial t} + \frac{\partial(\psi + \delta\psi)}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial(\psi + \delta\psi)}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad (\text{E.188})$$

$$r \frac{\partial \delta r}{\partial t} + \frac{\partial(\psi + \delta\psi)}{\partial r} \frac{\partial \delta r}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{E.189})$$

と書き直せる. 線形化すると,

$$\frac{\partial r_0 \delta r}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \delta r}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{E.190})$$

となる. これに先ほど計算した  $r = r_0 + \delta r$  での値を代入する. ここでは外部領域の値を使うと,

$$-inr_0 \varepsilon r_0 e^{i\phi} + \frac{\omega_0}{2} (r_0 - \delta r) im \varepsilon r_0 e^{i\phi} + im \varepsilon B e^{i\phi} = 0 \quad (\text{E.191})$$

となる.  $O(\varepsilon)$  の式は,  $-i\varepsilon e^{i\phi}$  で割ると,

$$nr_0^2 - mB - \frac{\omega_0}{2} r_0^2 m = 0 \quad (\text{E.192})$$

となる.  $B$  に代入し,  $n$  について整理すると,

$$n = \frac{\omega_0}{2} \left( m - \frac{m}{|m|} \right) \quad (\text{E.193})$$

<sup>\*11</sup> まず,  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  より,  $r^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x}$  となる. これを  $x, y$  で偏微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{1}{r} \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{r} \cos \theta \end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r}$$

となる.

となる.  $m$  の正負によって

$$n = \begin{cases} \frac{\omega_0}{2}(m-1), & (m > 0) \\ -\frac{\omega_0}{2}(|m|-1), & (m < 0) \end{cases} \quad (\text{E.194})$$

とかけるから,

$$n = \frac{\omega_0}{2}(|m|-1) \operatorname{sgn} m \quad (\text{E.195})$$

と書くこともできる.  $n$  は常に実数なので, この擾乱は線形安定である. この波を Kelvin 波という. 変形した渦の回転角速度  $\Omega = n/m$  は,

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2} \left(1 - \frac{1}{|m|}\right) \quad (\text{E.196})$$

となる. 流体は  $\omega_0/2$  で回転しているから, 擾乱は流体に対して少し遅れて回転する.

$|m| = 2$  の擾乱は境界が楕円形に変形した状態を表す. このとき, 回転角速度  $\omega_0/4$  で回転する. これは Kirchhoff の楕円渦の回転角速度  $\omega_0 ab/(a+b)^2$  においてアスペクト比が十分小さい, すなわち  $a \approx b \approx 1$  のときと同じ結果である.

なお, 福本 (2005) [43] には, 少し違った Kelvin 波の分散関係の導出が載っている.

## E.7 楕円座標系

楕円座標系  $(\xi, \eta)$  はデカルト座標系  $(x, y)$  と次の関係で結ばれるものである:

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad (\text{E.197})$$

$$y = c \sinh \xi \sin \eta. \quad (\text{E.198})$$

ここで,  $\xi$  の定義域は  $0 \leq \xi < \infty$  である.

楕円座標系は, 焦点の位置を共有した楕円と双曲線で構成される.  $c$  は, 楕円座標系の共有された焦点  $(\pm c, 0)$  を表すパラメータである.  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  を満たす楕円において,  $x, y$  をパラメータ表示すると,

$$x = a \cos \eta, \quad (\text{E.199})$$

$$y = b \sin \eta \quad (\text{E.200})$$

であるので, これと楕円座標系の定義を見比べると  $(a, b) = (c \cosh \xi, c \sinh \xi)$  が成り立つことが分かる. 従って,  $c$  は  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  と表される.

楕円座標系の自然基底  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$  は, 位置ベクトル  $\mathbf{r}$  が

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y \quad (\text{E.201})$$

$$= c \cosh \xi \cos \eta \hat{\mathbf{e}}_x + c \sinh \xi \sin \eta \hat{\mathbf{e}}_y \quad (\text{E.202})$$

となるので,

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = c \sinh \xi \cos \eta \hat{\mathbf{e}}_x + c \cosh \xi \sin \eta \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (\text{E.203})$$

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = -c \cosh \xi \sin \eta \hat{\mathbf{e}}_x + c \sinh \xi \cos \eta \hat{\mathbf{e}}_y \quad (\text{E.204})$$

となる. 測度係数  $h_\xi, h_\eta$  と正規基底 (単位長さに規格化された自然基底)  $\hat{\mathbf{e}}_\xi, \hat{\mathbf{e}}_\eta$  は, 定義より,

$$h_\xi = \sqrt{\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi}, \quad h_\eta = \sqrt{\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\eta}, \quad (\text{E.205})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\xi = \frac{1}{h_\xi} \mathbf{e}_\xi, \quad \hat{\mathbf{e}}_\eta = \frac{1}{h_\eta} \mathbf{e}_\eta \quad (\text{E.206})$$

である. 測度係数を計算すると,

$$h_\xi = h_\eta = c \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} = c \sqrt{\frac{1}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \quad (\text{E.207})$$

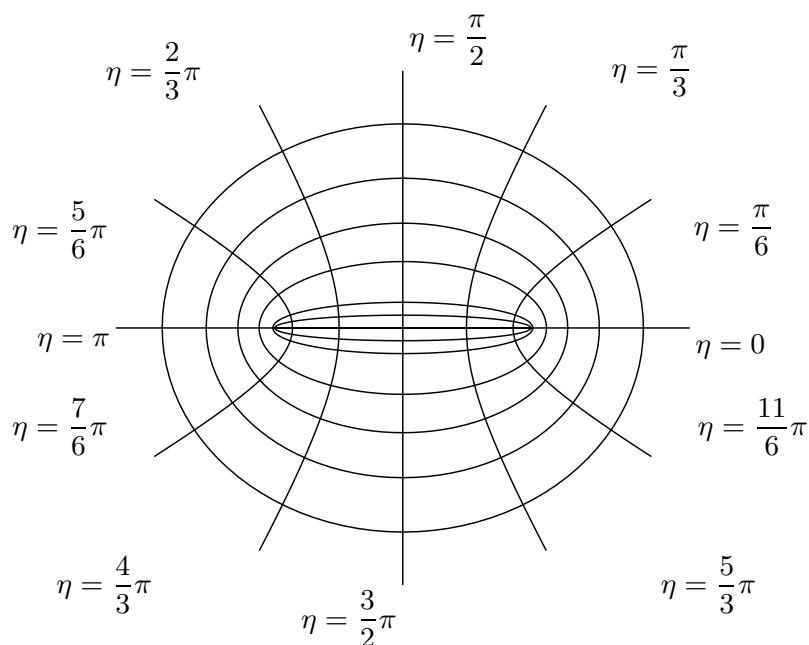


図 E.3 楕円座標系 ( $c = \sqrt{0.75}$ ).

となる. 従って, ラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{c^2(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (\text{E.208})$$

である. また, この座標系での流れ関数と速度  $(u_\xi, u_\eta)$  の関係は,  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \nabla\psi$  だから,

$$u_\xi = -\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad (\text{E.209})$$

$$u_\eta = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (\text{E.210})$$

である.

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  が表す楕円形は, 楕円座標系では  $(\xi_0, \eta)$  で表される. ここで,  $\xi_0$  は  $a, b$  と次の関係にある.

$$a = c \cosh \xi_0, \quad (\text{E.211})$$

$$b = c \sinh \xi_0. \quad (\text{E.212})$$

$\xi_0$  について解くと,

$$\xi_0 = \ln \frac{a+b}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b} \quad (\text{E.213})$$

となる. だから, 次の式が成り立つ.

$$a + b = ce^{\xi_0}, \quad (\text{E.214})$$

$$2ab = 2c^2 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0 = c^2 \sinh 2\xi_0. \quad (\text{E.215})$$

また, 一般に  $\xi_1$  に対応する主軸の長さを  $(a_1, b_1)$  と表すことにする,

### E.7.1 基底の微分

基底  $\hat{\mathbf{e}}_\xi, \hat{\mathbf{e}}_\eta$  の微分を求める.  $\hat{\mathbf{e}}_\xi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\xi = 1, \hat{\mathbf{e}}_\eta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\eta = 1$  を  $\xi, \eta$  で微分すると,

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\xi}{\partial \xi} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\xi = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\xi}{\partial \eta} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\xi = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\eta}{\partial \xi} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\eta = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\eta}{\partial \eta} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\eta = 0 \quad (\text{E.216})$$

となる. また,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} h \hat{\mathbf{e}}_\eta = h_\xi \hat{\mathbf{e}}_\eta + h \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\eta}{\partial \xi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} h \hat{\mathbf{e}}_\xi = h_\eta \hat{\mathbf{e}}_\xi + h \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\xi}{\partial \eta} \end{aligned}$$

となるので, これに  $\hat{\mathbf{e}}_\xi \cdot$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_\eta \cdot$  をかけることで,

$$\hat{\mathbf{e}}_\xi \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\eta}{\partial \xi} = \frac{h_\eta}{h}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\eta \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\xi}{\partial \eta} = \frac{h_\xi}{h}$$

が得られる. 基底の微分も基底の線形結合でかけるので, (E.216) 式を用いると,

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\xi}{\partial \eta} = \frac{h_\xi}{h} \hat{\mathbf{e}}_\eta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\eta}{\partial \xi} = \frac{h_\eta}{h} \hat{\mathbf{e}}_\xi \quad (\text{E.217})$$

と求められる. 一方,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{e}}_\xi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\eta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{\mathbf{e}}_\xi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\eta) = 0$$

となるので, これに (E.216) 式を用いると,

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\xi}{\partial \xi} = -\frac{h_\eta}{h} \hat{\mathbf{e}}_\eta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\eta}{\partial \eta} = -\frac{h_\xi}{h} \hat{\mathbf{e}}_\xi \quad (\text{E.218})$$

と求められる.



## 参考文献

- [1] Benzi, R., Patarnello, S. and Santangelo, P., 1988: Self-similar coherent structures in two-dimensional decaying turbulence, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**, 1221 – 1237.
- [2] Brandt, L. K. and Nomura, K. K., 2006: The physics of vortex merger: Further insight, *Phys. Fluids*, **18**, 051701.
- [3] Davidson, P. A., 2004: *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, Oxford.
- [4] Dritschel, D. G., 1998: On the persistence of non-axisymmetric vortices in inviscid two-dimensional flows, *J. Fluid Mech.*, **371**, 141 – 155.
- [5] Durran, D. R., 1999: *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, New York.
- [6] Fitzgibbon, A. W., Pilu, M. and Fisher, R. B., 1999: Direct Least Square Fitting of Ellipses, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **21**, 5, 476 – 480.
- [7] Guo, Y., Hallstrom, C. and Spirn, D., 2004: Dynamics near an unstable Kirchhoff ellipse, *Commun. Math. Phys.*, **245**, 297 – 354.
- [8] Hua, B. L. and Klein, P., 1998: An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence, *Physica D*, **113**, 98 – 110.
- [9] Iwayama, T. and Okamoto, H., 1996: Reconsideration of a Scaling Theory in Two-Dimensional Decaying Turbulence, *Prog. Theor. Phys.*, **96**, 1061 – 1071.
- [10] Kimura, Y. and Herring, J. R., 2001: Gradient enhancement and filament ejection for a non-uniform elliptic vortex in two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.*, **439**, 43 – 56.
- [11] Kirchhoff, G. R., 1876: *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik*, Teubner, Leipzig.

- [12] LaCasce, J. H., 2008: The vortex merger rate in freely decaying, two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, **20**, 085102.
- [13] Lamb, H., 1932: *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [14] Lesieur, M., 2008: *Turbulence in Fluids Fourth Revised and Enlarged Edition*, Springer, The Netherlands.
- [15] Love, A. E. H., 1893: On the stability of certain vortex motions, *Proc. London Math. Soc.*, **25**, 18 – 43.
- [16] McWilliams, J. C., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, **146**, 21 – 43.
- [17] McWilliams, J. C., 1990: The vortices of two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.*, **219**, 361 – 385.
- [18] McWilliams, J. C., Graves, L. P. and Montgomery, M. T., 2003: A Formal Theory For Vortex Rossby Waves and Vortex Evolution, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **97**, 4, 275 – 309.
- [19] Melander, M. V., McWilliams, J. C. and Zabusky, N. J., 1987: Axisymmetrization and vorticity-gradient intensification of an isolated two-dimensional vortex through filamentation, *J. Fluid Mech.*, **178**, 137 – 159.
- [20] Melander, M. V., Zabusky, N. J. and McWilliams, J. C., 1988: Symmetric vortex merger in two dimensions: causes and conditions, *J. Fluid Mech.*, **195**, 303 – 340.
- [21] Meunier, P., Ehrenstein, U., Leweke, T. and Rossi, M., 2002: A merging criterion for two-dimensional co-rotating vortices, *Phys. Fluids*, **14**, 2757 – 2766.
- [22] Mitchell, T. B. and Rossi, L. F., 2008: The evolution of Kirchhoff elliptic vortices, *Phys. Fluids*, **20**, 054103.
- [23] Mizuta, R., Horii, K. and Yoden, S., 1998: Deformation of a Vortex Patch and Fluid Mixing in Two-Dimensional Nondivergent Fluid – Numerical Study with a Contour Dynamics Model –, *Nagare Multimedia*, **17**, 3, 185 – 186.
- [24] Montgomery, M. T. and Kallenbach, R. J., 1997: A theory for vortex Rossby-waves and its application to spiral bands and intensity changes in hurricanes, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **123**, 435 – 465.
- [25] Morikawa, Y., Takahashi, Y. O., Sasaki, Y., Nishizawa, S., Otobe, N., Ishiwatari, M., Odaka, M., Takehiro, ichi S., Horinouchi, T., Hayashi, Y.-Y., Toyoda, E. and Gtool Development Group, : Gtool5 library, <http://www.gfd-dennou.org/library/gtool/>, GFD Dennou Club (2010).
- [26] Nastrom, G. D. and Gage, K. S., 1984: A Climatology of Atmospheric Wavenum-

- 
- ber Spectra of Wind and Temperature Observed by Commercial Aircraft, *J. Atmos. Sci.*, **42**, 950 – 960.
- [27] Nozawa, T. and Yoden, S., 1997: Formation of zonal band structure in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere, *Phys. Fluids*, **9**, 2081 – 2093.
- [28] Nozawa, T. and Yoden, S., 1997: Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere, *Phys. Fluids*, **9**, 3834 – 3842.
- [29] Okubo, A., 1970: Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences, *Deep-Sea Res.*, **17**, 445 – 454.
- [30] Peng, J., Peng, M. S. and Li, T., 2008: Dependence of vortex axisymmetrization on the characteristics of the asymmetry, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **134**, 1253 – 1268.
- [31] Polvani, L. M., Flierl, G. R. and Zabusky, N. J., 1989: Filamentation of unstable vortex structures via separatrix crossing: A quantitative estimate of onset time, *Phys. Fluids A*, **1**, 181 – 184.
- [32] Rhines, P. B., 1975: Waves and turbulence on the  $\beta$ -plane, *J. Fluid Mech.*, **69**, 417 – 443.
- [33] Saffman, P. G., 1992: *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [34] SGKS Group, : DCL-5.3 (in Japanese) (2004), GFD-DENNOU Club, available online at <http://www.gfd-dennou.org/library/dcl/>.
- [35] Smith, G. B. and Montgomery, M. T., 1995: Vortex axisymmetrization: Dependence on azimuthal wave-number or asymmetric radial structure changes, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **121**, 1615 – 1650.
- [36] Vallis, G. K., 2006: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [37] Velasco Fuentes, O. U., 2005: Vortex filamentation: its onset and its role on axisymmetrization and merger, *Dyn. Atmos. Oceans*, **40**, 23 – 42.
- [38] Weiss, J., 1991: The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics, *Physica D*, **48**, 273 – 294.
- [39] Whitcher, B., Lee, T. C. M., Weiss, J. B., Hoar, T. J. and Nychka, D. W., 2008: A multi-resolution census algorithm for calculating vortex statistics in turbulent flows, *Journal of the Royal Statistical Society Series C – Applied Statistics*, **57**, part 3, 293 – 312.
- [40] Yoden, S. and Yamada, M., 1993: A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 631 – 643.
- [41] 石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版会.

- 
- [42] 岡本久, 2009: ナヴィエ-ストークス方程式の数理, 東京大学出版会.
- [43] 福本康秀, 2005: 渦運動の基礎知識 4. 渦領域, *ながれ*, **24**, 553 – 568.