

流体力学 授業資料 (2026-10-26)

2.4 運動方程式・運動量保存則

2.4.1 運動方程式の導出

流体とともに運動する領域 D' を考える. 直交座標系をとり, 運動量 i 成分 ($i = 1, 2, 3$) の釣り合いの式を書き下すと,

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho v_i dV = \int_{\partial D'} \sigma_{ik} n'_k dS' + \int_{D'} \rho \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dV \quad (1)$$

である. ただし,

- n'_k : 閉曲面 $\partial D'$ の外向き単位法線ベクトル
- σ_{ik} は応力テンソル. 応力テンソル σ_{ik} の各成分は, k 方向に垂直な面 (単位面積) に働く, 応力の i 成分を表す.
- Φ : 保存力のポテンシャルエネルギー

である.

(1) を変形する.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho v_i dV}_{\int_{D'} \rho \frac{dv_i}{dt} dV} = \underbrace{\int_{\partial D'} \sigma_{ik} n'_k dS'}_{\text{Gauss の定理から } \int_{D'} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV} + \int_{D'} \rho \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) dV \quad (2)$$

これより以下の式が得られる.

$$\int_{D'} \left\{ \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\} dV = 0. \quad (3)$$

領域 D' が任意にとれることから, 以下の流体の運動方程式が得られる.

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (4)$$

$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ を使うと

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (5)$$

これは運動方程式の移流形式である.

2.4.2 運動方程式の流束形式

質量保存則を用ると, 次のように運動方程式の流束形式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (6)$$

$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$ を運動量流束密度テンソルという. $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$ は, 単位時間に k 方向に垂直な面 (単位面積) を通り, 単位時間に流れる運動量の i 成分を表す.

2.5 エネルギー保存則

2.5.1 エネルギー保存則の導出

流体とともに運動する領域 D' を考える. 領域内の流体になされる仕事と流体が受け取る熱は,

1. 領域を囲む閉曲面 $\partial D'$ に働く応力がする仕事
2. 保存力のする仕事
3. 閉曲面を通して流れ込む熱

である. 熱力学第1法則 (エネルギー保存則) によれば, 加えられた仕事と熱が流体の運動エネルギーと内部エネルギーの増加に等しい. したがって D' についてのエネルギーの式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D'} \rho \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon \right) dV = & \int_{\partial D'} \sigma_{ik} v_i n'_k dS - \int_{D'} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i dV \\ & - \int_{\partial D'} q_i n'_i dS + \int_{D'} Q dV \end{aligned} \quad (7)$$

ε は単位質量当りの流体の内部エネルギー, q_i は閉曲面を通して流れ込む熱流束である. Q は内部熱源. 熱流束として考えるものはおもに次の2つである.

- 熱伝導による熱流束
- 放射による熱流束 (例えば, 太陽光のフラックス)

運動方程式の導出で行った変形と同様の処理 (時間微分と積分の交換, Gauss の定理の適用, D' の取り方の任意性の適用) を行くと, 以下の式が得られる.

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} v_i) - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + Q. \quad (8)$$

全エネルギーの形にするため, ポテンシャルエネルギーの項 (右辺第2項) を次のように変型する.

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i = \rho \frac{d\Phi}{dt} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (9)$$

応力テンソルの表現 $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$ を使って変形すると, 以下のようにエネルギー保存式の移流形式が得られる.

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (p v_k - \sigma'_{ik} v_i + q_k) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q. \quad (10)$$

2.5.2 エネルギー保存式の流束形式

質量保存則を用いて変形すると, 以下のようにエネルギー保存式の流束形式が得られる.

$$\frac{\partial (\rho e_{tot})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k e_{tot} + p v_k - v_i \sigma'_{ik} + q_k) = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q, \quad (11)$$

ただし,

$$e_{tot} \equiv \left(\frac{1}{2} v_i^2 + \varepsilon + \Phi \right) \quad (12)$$

は, 単位質量当りの流体のもつ全エネルギーである. $F_k = \rho e_{tot} v_k - v_i \sigma_{ik} + q_k$ をエネルギー流束密度ベクトルという.

2.6 境界条件

以下に境界条件の例を示す.

- 静止した固体表面における条件

一般に, 質量保存則より, 固体表面を通しての質量流束は 0 であるから,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{at surface.} \quad (13)$$

$\mathbf{n}$ は固体表面の法線ベクトルである.

粘性流体の場合, 固体表面では流体は密着していると考えて (粘着条件)

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{at surface.} \quad (14)$$

- 動いている物体の表面における条件

一般に, 境界を通しての質量フラックスが 0 であるから, 境界面の法線方向の速度成分が一致する. すなわち,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^{(s)} \cdot \mathbf{n} \quad \text{at surface.} \quad (15)$$

ただし $\mathbf{v}^{(s)}$ は物体の表面速度である.

粘性流体の場合, 流体の速度と物体表面の速度が一致することである.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(s)} \quad \text{at surface.} \quad (16)$$

さらにこの他に, 熱に関する境界条件が必要である. これは, 問題設定により異なる.

2.7 基礎方程式から得られる諸々の式

2.7.1 力学的エネルギーの時間変化の式

運動方程式 (5) に $\frac{v_i}{\rho}$ をかけて i について和をとると以下のように運動エネルギーの式の流束形式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ v_k \left(\frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) - v_i \sigma_{ik} \right\} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i - \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (17)$$

運動エネルギーの式の両辺に $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ を加えると、以下のように力学的エネルギーの式の移流形式が得られる。

$$\rho \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} (-v_k p + v_i \sigma'_{ik}) + p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (18)$$

力学的エネルギーの式の流束形式は以下の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left\{ \frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right\} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left\{ \frac{1}{2} v_i^2 + \Phi \right\} + p v_k - v_i \sigma'_{ik} \right] = p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (19)$$

2.7.2 内部エネルギーの時間変化の式

全エネルギーの式 (10) から、力学的エネルギーの式 (18) を差し引くと以下のように内部エネルギーの式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \varepsilon v_i) = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + Q. \quad (20)$$

2.7.3 エンタルピーの時間変化の式

単位質量あたりのエンタルピーを h とする。熱力学関係式 $h = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$ を用いるとエンタルピーの式が以下のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \text{div}(\rho h \mathbf{v}) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \text{div} \mathbf{q} + \frac{dp}{dt} + Q. \quad (21)$$

2.7.4 エントロピーの時間変化の式

単位質量あたりのエントロピーを s とする。熱力学関係式 $d\varepsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$ と質量保存則を用いると以下のようにエントロピーの式が得られる。

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) s = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \text{div} \mathbf{q} + Q. \quad (22)$$