2.3 応力

2.3.1 流体に働く力

流体内のとある部分とそれ以外の部分の相互作用を考える. 厳密に考えると, 流体内のどんな微小領域も多くの粒子 (分子または原子) を含むので, 粒子の概念から相互作用の問題を解くことは無理である. そこで, 流体内部の閉領域 D' とその境界面を仮想的に定義できるとして, 領域 D' の内部とその外側との相互作用は, 以下の 2 種類の力で表現できると考えることにする.

1. 外力:

   遠隔作用として現れる巨視的な力.

   重力や電磁気力など, 大きさが物質量すなわち体積や質量に比例する力. その意味で外力は体積力(body force あるいは物体力) と呼ばれる. 通常, ポテンシャルを用いて記述される.

2. 内力:

   分子原子レベルの微視的な相互作用を平均した結果現れる巨視的な力.

   相互作用の距離は非常に短い (微視的な距離でしかない). 領域 D' の内側では作用反作用で完全に打ち消しあうものと考える. 領域 D' の表面 $\partial D'$ においてのみ, 領域に作用する力として現れる (打ち消しあう相手がいないので).

   内力の大きさは $\partial D'$ の面積に比例. その意味で応力は 面積力(surface force あるいは表面力) と呼ばれる.

補足: 表面力の考え方
質点系の力学では, 特定の質点の運動方程式は

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \tilde{\boldsymbol{F}}_{ij}$$

と表される. ここで, $\tilde{\boldsymbol{F}}_{ij}$ は, 質点 j から質点 i に及ぼされる相互作用の力である. このように, 質点系力学では粒子間の相互作用を考えなければならない. 流体 (連続体) においても同様に隣の領域 (あるいは隣の流体粒子) との相互作用の効果を考えなければならない. この相互作用の効果を表現するものが応力である. これは, 流体中の分子同士の相互作用を全て考慮するというものではなく, 相互作用の効果を考える領域の表面に働く力という形で表現する.

2.3.2　応力ベクトル

一般に, 表面力は考える平面の向きに依存している. 連続体の内部の閉じた 3 次元領域 D' を考え, D' の表面 $\partial D'$ 上の点 P (座標を $\boldsymbol{x}$ とする) に注目する. そこでの面積要素 (微小面積素片) を δS, 面積要素の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする.

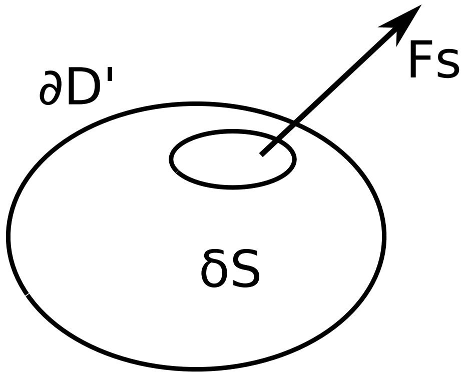


図 2.2: 応力の表現. 流体とともに運動する 3 次元領域を D' とする. D' の表面を $\partial D'$ とする. D' 中の微小面積素片を δS とする.

応力ベクトル (stress vector) は面積要素 δS に対して

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\delta S \to 0} \frac{\delta \boldsymbol{F}_s}{\delta S} \tag{2.16}$$

で定義される. [1] ただし, $\delta \boldsymbol{F}_s$ は面積要素 δS の $\boldsymbol{n}$ 側の面に働く力のベクトルである. ここで, 応力ベクトルは, 0 でもなければ, ∞ でもない有限確定の大きさをもつベクトルとして定義されると仮定することにする.
応力ベクトルの表現 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ は, 引数としてあらわした $\boldsymbol{x}$, すなわち, 面を考えている P 点の座標と, 添字としてあらわした $\boldsymbol{n}$, すなわち, その面の向き, に応力ベクトルが依存していることを示している.

2.3.3　応力の性質

例題を使って応力の性質を考える.

0 準備: 微小領域に成りたつ方程式.

流体とともに動く微小領域 D' を考える.

[1] 応力ベクトルが, 連続体内部の仮想閉曲面 S 上で定義され, S の内部の空間を占める物体へのその相互作用が外部の物体の作用に等しいという主張がオイラー・コーシーの応力原理 (stress principle of Euler and Cauchy) である.

微小領域の運動方程式: D' に対して運動量の釣り合いを考える (ニュートン力学を適用すると) と次のようになる:

$$\frac{d}{dt}\int_{D'}\rho\boldsymbol{v}dV = \int_{\partial D'}\boldsymbol{\sigma_n}dS + \int_{D'}\boldsymbol{F}_b dV \tag{2.17}$$

ここで, $\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x})$ は各点に働く体積力, $\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{x})$ は表面 ∂D に働く応力である.

積分形で表現されるこの運動方程式は, オイラーの第一運動法則という (Euler's first law of motion)

微小領域の角運動量保存則: D' に対して角運動量保存則を考えると次のようになる:

$$\frac{d}{dt}\int_{D'}\boldsymbol{j}\rho dV = \int_{\partial D'}\boldsymbol{x}\times\sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS + \int_{D'}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x})dV \tag{2.18}$$

$\boldsymbol{j}$ は角運動量密度であり,

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$$

である. 積分形で表現されるこの角運動量の式を特にオイラーの第二運動法則という (Euler's second law of motion) ことがある.

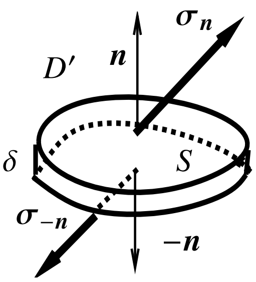
1 面の表の応力と裏の応力 (作用・反作用を考える)

応力では

$$\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\sigma_{-n}}(\boldsymbol{x}) \tag{2.19}$$

が成り立つ.

上式を示すため, D' として点 $\boldsymbol{x}$ を含む厚さ δ, 上面・下面が面積 S の微小領域を考察する.



応力の作用反作用を考えるための領域 D'.

運動方程式 (2.17) において $\delta\to 0$ に近づけると, 以下のようになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{D'}\rho\boldsymbol{v}dV}_{\sim\delta^3\text{なので}\delta\to0\text{ で }0\text{ に収束}} = \int_{S_u}\boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{x})dS + \int_{S_d}\boldsymbol{\sigma_{-n}}(\boldsymbol{x})dS$$

$$+ \underbrace{\int_{\text{側面}}\boldsymbol{\sigma_n}dS}_{\delta\to0\text{ で面積が }0\text{ に近づくので }0\text{ に収束}} + \underbrace{\int_{D'}\boldsymbol{F}_b dV}_{\sim\delta^3\text{なので}\delta\to0\text{ で }0\text{ に収束}}$$

S_u は領域の上面, S_d は領域の下面をあらわす. よって, 上面と下面の面積分だけが残り $\delta \to 0$ として面積分を上面だけで評価すれば

$$0 = \int_{S_u} \{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\}\, dS$$

この関係は連続体内の領域の取り方によらないので

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$$

連続体の内部に想定した境界面の, 正の側の領域が負の側の領域に及ぼす作用 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ は, 負の側の領域が正の側の領域に及ぼす作用 $\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ と大きさが同じで向きが反対, ということである.

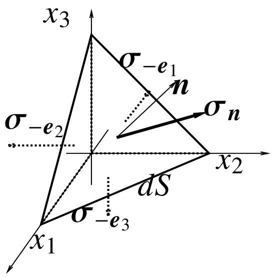
2 応力の表現 (「力の合成」を考える)

「力の合成」を考えると, 応力は

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) n_j \boldsymbol{e}_i \tag{2.20}$$

と表現されることがわかる. この表現から, $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ はテンソル量であることがわかる. 応力テンソル (stress tensor) とも呼ばれる.

上記の説明: ここでは, 連続体内の領域 D' として, 点 $\boldsymbol{x}$ を含む, 微小 4 面体を考える. 局所直交座標系をとり, 4 面のうち, 3 面は座標面に平行, 残りの 1 面は法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする面である (図).



応力がテンソルであることを考察するための 4 面体. 面 dS の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分が $n_1 > 0, n_2 > 0, n_3 > 0$ であるものとして描いた. ただし, $n_j = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_j$.

4 面体の高さを δ とする. 4 面体の形を保ったまま $\delta \to 0$ に近づける. 力のつりあいの式 (2.17) は以下のようになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho \boldsymbol{v}\, dV}_{\sim\delta^3 \text{なので} \delta\to 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}} = \int_{\partial D'} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}\, dS + \underbrace{\int_{D'} \boldsymbol{F}_b\, dV}_{\sim\delta^3 \text{なので} \delta\to 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}}$$

よって, $\delta \to 0$ においては

$$0 = \int_{\partial D'} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\, dS$$

でなければならない.

面積分を各面上で分けて評価する. x_i 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ とする. $\boldsymbol{n}$ を法線ベクトルとする面を S とする. その微小面積を dS とすれば, $n_i > 0$ としている上の図の場合で考えると x_i 軸と垂直な面の面積は $n_i dS$ である. よって,

$$0 = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS + \boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x})n_1 dS + \boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x})n_2 dS + \boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{x})n_3 dS$$

となる. [2] 面の向きを考慮して, $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ を使うと,

$$0 = \left\{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x})n_1 - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x})n_2 - \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{x})n_3\right\} dS$$

である. この関係は連続体内の領域の取り方によらずに成り立たなければならないから

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x})n_1 + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x})n_2 + \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{x})n_3 = \sum_j \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{x})n_j$$

これで, 任意の面に働く応力は 3 つのベクトルで表現されることが示された. よって, 成分としては 9 つが必要である.

ここで, $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{x})$ の i 成分を σ_{ij} と書くことにすると (σ_{ij} を $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i$ と定義すると),

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i \tag{2.21}$$

となる. これより

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \sum \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{x})n_j = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})n_j\boldsymbol{e}_i$$

であることになる. σ_{ij} の最初の添字 i は応力ベクトルの第 i 成分, 後ろの添字 j は面の向きの j 成分に対応している. この式は Cauchy の公式 (Cauchy's formula) と呼ばれている. この公式は, σ_{ij} がわかれば任意の面に働く応力を与えるものとなっている.

この表現から, 座標変換則にしたがった変換則が得られるので, 応力はテンソルで表現されることもわかる.

[2]面の向きとして一般的な場合を考えると, 各軸に垂直な面の面積は $|n_i|dS$ である. よって, 面積力のつりあいの式は, 一般的には

$$0 = \left(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}_{-(\mathrm{sgn} n_1)\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{x})|n_1| + \boldsymbol{\sigma}_{-(\mathrm{sgn} n_2)\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{x})|n_2| + \boldsymbol{\sigma}_{-(\mathrm{sgn} n_3)\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{x})|n_3|\right) dS$$

となる. ここで, $\mathrm{sgn} n_i$ は n_i の符号である. $n_i > 0$ の場合は, i 軸に垂直な面の法線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_i$ である. よって, i に関する項は

$$\boldsymbol{\sigma}_{-(\mathrm{sgn} n_i)\boldsymbol{e}_i}|n_1| = \boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{e}_i}(n_i) = -\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_i}n_i$$

となる. $n_i < 0$ の場合は, i 軸に垂直な面の法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_i$ である. よって, i に関する項は

$$\boldsymbol{\sigma}_{-(\mathrm{sgn} n_i)\boldsymbol{e}_i}|n_1| = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_i}(-n_i) = -\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_i}n_i$$

となる.

2.3.4 法線応力 (圧力)

平面の接線応力 (接線方向の応力. せん断応力もしくはずれ応力ともいう) が常に 0 である場合, 法線応力 (法線方向の応力) は平面の向きによらない.
これを示すために, 連続体中に 図 2.3 のようなプリズム型の領域を考える. 各面の法線方向に応力 p_i ($i = 1, 2, 3$) が働いているとする.

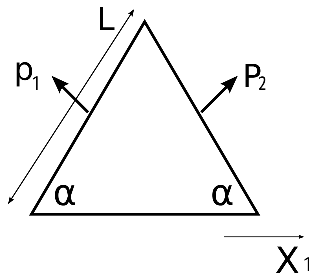


図 2.3: 応力の法線成分を考えるためのプリズム型領域. 底角 α, 斜辺 L の二等辺三角形である.

1. まず, 連続体が静止していて働く力が応力のみである場合を考える.

   x 方向の力がつり合うことから

   $$p_1 L \sin\alpha = p_2 L \sin\alpha \quad \text{ゆえに} \quad p_1 = p_2$$

   ここで, 圧力の x 成分は $p \sin\alpha$ であることを使った.

   任意の角度 α について成り立つので, 法線方向の応力は面の向きによらず一定である.

2. 次に, 連続体は静止していて体積力が働く場合を考える.

   プリズム領域に働く体積力は L^3 に比例する. 一方, 領域の境界面に働く力 (応力の寄与) は L^2 に比例する. 領域を十分小さくとれば, 体積力は応力の寄与より十分小さくなるので無視することができる. したがって, 体積力が働いていない場合の結果がそのまま成り立ち, 法線方向の応力は面の向きによらず一定である.

3. さらに, 連続体が運動している場合を考える.

   プリズム型の領域とともに動く座標系にのってみたとき, 連続体には応力 · 外力に加えて慣性力が働き, それらがつりあって静止している. ところで慣性力は体積力であるから, 領域を十分小さくとれば, 応力の寄与より十分小さくなるので無視することができる. したがって, このときも先の結果と一致して, 法線方向の応力は面の向きによらず一定であることがわかる.

以上より, 接線方向の応力が常に 0 であるならば, 法線方向の応力の大きさは面の向きによらないことが示された.

これを圧力と呼び,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{2.22}$$

と表す.

2.3.5 応力テンソルの対称性

応力テンソルは対称テンソルである:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.23}$$

復習すると, j が面の向きを表す添字である.
これはモーメントの釣り合いから得られる.「流体粒子は勝手にクルクル回り始めない」ということを表すものである.
説明: モーメントの釣り合い (流体粒子は勝手にクルクル回り始めないということ) を用いて説明する.
連続体内の領域 D として点 $\boldsymbol{x}$ を含む, 微小立方体 (6 面体) を考察する. 各面が座標面に平行になるように局所直交座標系をとる (図 2.5).

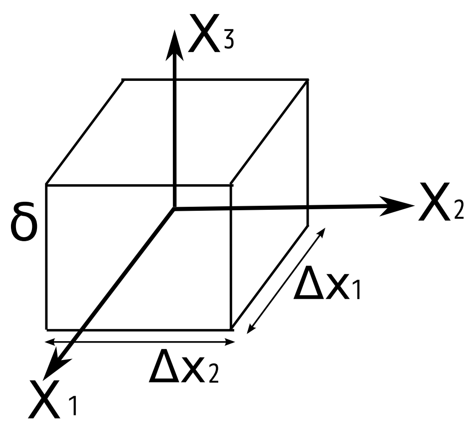


図 2.4: 応力の対称性を考えるための微小立方体.

立方体の辺の長さのスケールを δ とする. 立方体の形を保ったまま $\delta \to 0$ に近づける. 角運動量方程式 (2.18) は以下のようになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{D'} \boldsymbol{j}\rho dV}_{\sim\delta^4 \text{なので} \delta\to 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}} = \underbrace{\int_{\partial D'} \boldsymbol{x}\times\sigma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS}_{\sim\delta^2} + \underbrace{\int_{D'} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{x})dV}_{\sim\delta^4 \text{なので} \delta\to 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}} \tag{2.24}$$

ここで, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}$ である. よって, $\delta \to 0$ においては

$$0 = \int_{\partial D} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS$$

でなければならない. これはベクトル式である. 以下では第 3 軸成分のみを考える.

直前の式はベクトルの式である. ここでは第 3 軸成分について考える. このとき面積分に寄与するのは第 1 軸, 2 軸成分に垂直な面だけであり,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial D} [\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma_n}(\boldsymbol{x})]_3 \, dS \\
&\sim \int_{x_1=\Delta x_1/2} \left[\left(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0\right) \times \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_1}\right]_3 dx_2 dx_3 + \int_{x_1=-\Delta x_1/2} \left[\left(-\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0\right) \times \boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{e}_1}\right]_3 dx_2 dx_3 \\
&\qquad + \int_{x_2=\Delta x_2/2} \left[\left(0, \frac{\Delta x_2}{2}, 0\right) \times \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{e}_2}\right]_3 dx_1 dx_3 + \int_{x_2=-\Delta x_2/2} \left[\left(0, -\frac{\Delta x_2}{2}, 0\right) \times \boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{e}_2}\right]_3 dx_1 dx_3 \\
&= \int_{x_1=\Delta x_1/2} \left[\left(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0\right) \times (\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31})\right]_3 dx_2 dx_3 \\
&+ \int_{x_1=-\Delta x_1/2} \left[\left(-\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0\right) \times (-\sigma_{11}, -\sigma_{21}, -\sigma_{31})\right]_3 dx_2 dx_3 \\
&+ \int_{x_2=\Delta x_2/2} \left[\left(0, \frac{\Delta x_2}{2}, 0\right) \times (\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32})\right]_3 dx_1 dx_3 \\
&+ \int_{x_2=-\Delta x_2/2} \left[\left(0, -\frac{\Delta x_2}{2}, 0\right) \times (-\sigma_{12}, -\sigma_{22}, -\sigma_{32})\right]_3 dx_1 dx_3 \\
&= \frac{\Delta x_1}{2} \sigma_{21} \Delta x_2 \Delta x_3 + \left(-\frac{\Delta x_1}{2}\right)(-\sigma_{21}) \Delta x_2 \Delta x_3 \\
&- \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{12} \Delta x_1 \Delta x_3 - \left(-\frac{\Delta x_2}{2}\right)(-\sigma_{12}) \Delta x_1 \Delta x_3
\end{aligned}
$$

なお, $\boldsymbol{\sigma_{e_1}}$ は法線ベクトルが $\boldsymbol{e_1}$ の面 (x_1 軸に直交する面) に働く応力. $\boldsymbol{\sigma_{e_1}}$ の 2 軸方向成分 $(\boldsymbol{\sigma_{e_1}} \cdot \boldsymbol{e}_2)$ は σ_{21}.
よって,

$$
0 = \sigma_{21} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 - \sigma_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \tag{2.25}
$$

領域の取りかたに依存しないので任意の $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ について成り立たねばならない. したがって

$$
\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{2.26}
$$

である.
同様のことを 1, 2 軸成分について行うことにより

$$
\sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \tag{2.27}
$$

が得られる. したがって応力テンソルは対称である.

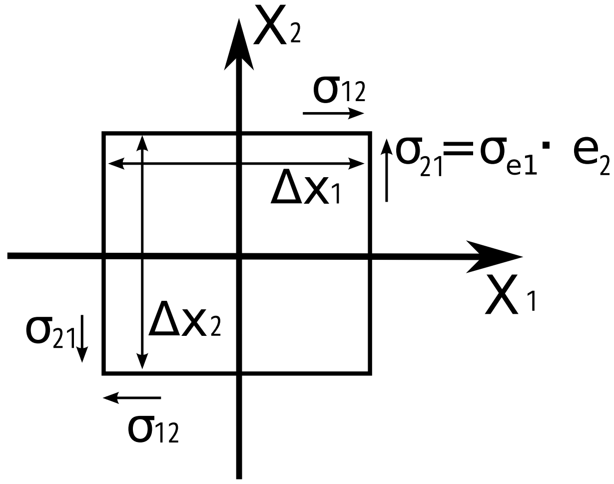


図 2.5: 角運動量バランスから考える応力の対称性.

2.3.6 応力テンソルの表現

結局, 流体の応力は以下のテンソル形式で表現されることがわかった.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \tag{2.28}$$

σ'_{ij} は非対角成分のみをもつ対称テンソルである.