

Dennou-Clube Planetary Ocean Model  
(DCPOM version 1.0.1)  
支配方程式系とその離散化手法

河合 佑太

2020年3月7日

# 目次

第1章	はじめに	3
1.1	この文書について	3
1.2	本書の構成	3
1.3	注意点	4
第2章	海洋大循環モデル	5
2.1	モデルの基礎	5
2.1.1	基礎方程式系の導入	5
2.1.2	圧力の定式化	6
2.1.3	水平直交曲線座標・ $z$ 座標における基礎方程式系の表現	8
2.1.4	水平直交曲線座標・一般鉛直座標における基礎方程式系の表現	9
2.1.5	サブグリッド・スケールの物理の表現	12
2.2	時間離散化	15
2.2.1	時間スキームの概要	15
2.2.2	時間スキーム詳細	16
2.3	空間離散化	22

---

2.3.1	水平離散化: 球面調和関数に基づく擬スペクトル法の場合 . . .	22
2.3.2	鉛直離散化: 有限体積法の場合 . . . . .	28
2.4	パラメータの設定例 . . . . .	33
<b>第3章</b>	<b>海氷モデル</b>	<b>36</b>
3.1	モデルの基礎 . . . . .	36
3.1.1	基礎方程式系 . . . . .	36
3.1.2	熱力学過程 . . . . .	37
3.1.3	力学過程 . . . . .	40
3.2	空間離散化 . . . . .	40
3.2.1	鉛直離散化 . . . . .	40
3.2.2	水平離散化 . . . . .	41
3.3	時間離散化 . . . . .	42
3.3.1	時間スキームの概要 . . . . .	42
3.3.2	時間スキームの詳細 . . . . .	43
3.4	パラメータの設定例 . . . . .	44

# 第 1 章 はじめに

## 1.1 この文書について

地球流体電脳倶楽部では、海洋大循環を考慮した惑星気候の探索を目指して、海洋大循環モデルと海氷モデルを開発しており、Dennou-Club Planetary Ocean Model (DCPOM) として公開している<sup>\*1</sup>。本書では、DCPOM に含まれる海洋モデルと海氷モデルの支配方程式系や離散化手法を記述する。モデルの概要、設定方法、実行方法については、DCPOM 取り扱い説明書 (doc/users-guide/dcpom\_users-guide.pdf) を参照されたい。

現状、本書の記述と実際のコードが一致しない所もあるのでご了承頂きたい。また、本書で主に対象とするのは、`TOP_DIR/model/dogcm` ディレクトリ中にある、海洋大循環モデルと海氷モデルのコード (2018 年 10 月 2 日版) である。それ以外にも、岸を取り扱うことを念頭にした海洋モデルの試作品 (globalSWModel\_DG, globalSWModel\_FVM 等のディレクトリに対応) も存在するが、これらのモデルの詳細は、本書にはまだ記述できていない。

## 1.2 本書の構成

第 2 章において、海洋大循環モデルの支配方程式系と、それらの離散化手法を記述する。本章の最後に、海洋モデルに与えるパラメータの設定例も示す。第 3 章において、海氷モデルの支配方程式系と、それらの離散化手法を記述する。本章の最後に、海氷モデルに与えるパラメータの設定例も示す。

---

<sup>\*1</sup><https://www.gfd-dennou.org/arch/index.htm> からソースコード等を取得できる。

## 1.3 注意点

本書では, シェルとして「bash」を使用することを想定する. 実行環境に応じて, コマンドを適宜読み替えていただきたい.

## 第2章 海洋大循環モデル

本章では, 海洋大循環モデルの詳細を記述する. なお, 河合佑太 (2018) の数値実験では本海洋モデルを軸対称モデルとして使用したが, 以下に記述するように, 実際には汎用性のために三次元モデルとして定式化を行い, 実装している.

### 2.1 モデルの基礎

将来的にモデルを拡張することを念頭に, 水平方向は局所直交座標系, 鉛直方向は一般化した鉛直座標系を用いてモデルの方程式系を記述する. はじめに, モデルの基礎方程式系をベクトル形式で示す. 次に水平座標系が局所直交座標系, 鉛直座標が幾何的座標 ( $z$  座標) の場合の方程式系を記述する. その後, 一般化した鉛直座標系 ( $s$  座標) を導入して,  $s$  座標を用いた場合の表現を得ることにする.

#### 2.1.1 基礎方程式系の導入

海洋大循環モデルの基礎方程式系は, 静力学ブジネスク方程式系 (プリミティブ方程式系) であり, 運動量方程式, 連続の式, 温位と塩分の保存式, 海水の状態方程式により構成される. 今, 等ジオポテンシャル面と直交する単位ベクトルを  $\mathbf{k}$ , 等ジオポテンシャル面と接する単位ベクトルを  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  として, 局所直交座標系  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  を導入する. また, 三次元速度ベクトル  $\mathbf{U}$  は  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + w\mathbf{k}$  のように水平成分と鉛直成分に分割する. このとき, 静力学ブジネスク方程式系のベクトル不変形式は以

下のよう書かれる.

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} = - \left[ (\nabla \times \mathbf{U}) \times \mathbf{U} + \nabla \left( \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) \right]_h - f \mathbf{k} \times \mathbf{U}_h - \frac{1}{\rho_0} \nabla_h p + \tilde{\mathcal{D}}^U, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Theta \mathbf{U}) + \tilde{\mathcal{D}}^\Theta, \quad (2.1d)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\nabla \cdot (S \mathbf{U}) + \tilde{\mathcal{D}}^S, \quad (2.1e)$$

$$\rho = \rho(\Theta, S, p). \quad (2.1f)$$

ここで,  $\nabla$  は三次元勾配ベクトル,  $t$  は時刻,  $z$  は鉛直座標,  $\rho$  は海水の密度,  $\rho_0$  は基準密度,  $p$  は圧力,  $f = 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}$  はコリオリパラメータ ( $\boldsymbol{\Omega}$  は自転角速度ベクトル),  $g$  は重力加速度である. また,  $\tilde{\mathcal{D}}^U, \tilde{\mathcal{D}}^\Theta, \tilde{\mathcal{D}}^S$  は, 中規模渦による水平混合, 小スケールの渦や対流による鉛直混合などの, サブグリッド・スケールの物理を表現するパラメタリゼーションの項を表す.

海面における運動学的な境界条件は,

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h \eta + (P - E) \quad \text{at } z = \eta, \quad (2.2a)$$

である. ここで,  $\eta$  は海水表面の変位である. また,  $(P - E)$  は淡水フラックスであり, 降水量と蒸発量の差を表す. 一方で, 海底面における運動学的な境界条件は,

$$w = -\mathbf{U}_h \cdot \nabla_h H \quad \text{at } z = -H \quad (2.2b)$$

である. ここで,  $H$  は平均的な海面 ( $z = 0$ ) から海底までの距離である.

### 2.1.2 圧力の定式化

ある深さ  $z$  における圧力  $p$  は, 大気圧  $p_a$ , 基準となる海水面 ( $z = 0$ ) に対する表面の変動と関係した圧力  $p_s$ , 静水圧  $p_h$  の三つの寄与に分割され,

$$\begin{aligned} p(i, j, z, t) &= p_a + p_s(i, j, t) + p_h(i, j, z, t) \\ &= p_a + (\rho_0 g \eta) + (p_h - \rho_0 g z) \end{aligned}$$

と書かれる. ここで,  $p_h$  は, 静水圧平衡の式 (2.1b) から,

$$p_h(i, j, z, t) = \int_z^\eta g [\rho(\Theta, S, -\rho_0 g z') - \rho_0] dz'$$

と求まる。ただし、ブジネスク方程式系においてエネルギー論の一貫性を保つには、状態方程式に現れる圧力は深さのみに依存する形式で書く必要があるため、 $p \approx -\rho_0 g z$  と近似している。表面圧力  $p_s$  の計算には、以下の 2 通りの方法がある。

1. 海水面の変位  $\eta$  を新たな予報変数として導入し、 $\eta$  (すなわち  $p_s = \rho_0 g \eta$ ) の時間発展式を解く。
2. 海面において剛体蓋近似を適用し、 $p_s$  は診断的に決定する。

前者の方法において、 $\eta$  の時間発展式は連続の式を鉛直積分することで得られる。海面の変位を許容する場合には表面波を表現できるが、その位相速度は海洋大循環と比べるとずっと速い (数百 m/s) ために、時間刻み幅に強い制約を与える。後者の場合では、鉛直積分した水平速度が非発散であるという拘束条件を用いて、表面圧力に関する楕円方程式を導くことができる。海面の変位は許されないために、表面波は解として含まれない。剛体蓋近似の適用は、表面波 (外部重力波) だけでなく順圧ロスビー波等の長波にも影響を与えることに注意が必要である。

### 方法 1 の場合: 表面変位 $\eta$ の時間発展式

連続の式 (2.1c) を、海底  $z = -H$  から海面  $z = \eta$  まで鉛直積分すると、

$$w_{z=\eta} = w_{z=-H} - \int_{z=-H}^{z=\eta} \nabla_h \cdot \mathbf{U}_h dz$$

となる。海面および海底での運動学的境界条件 (2.2) を適用すると、 $\eta$  の時間発展式として、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla_h \cdot \int_{z=-H}^{z=\eta} \mathbf{U}_h dz + (P - E) \quad (2.3)$$

を得る。

### 方法 2 の場合: 表面圧力 $p_s$ の診断方程式

剛体蓋近似を適用する場合には、 $w = D\eta/Dt = 0$  であることを課すので、 $\eta$  は常に定数 (ここでは、ゼロとする) である。したがって、(2.3) は、

$$\nabla_h \cdot \int_{z=-H}^{z=0} \mathbf{U}_h = 0 \quad (2.4)$$

となり、鉛直積分した水平速度は非発散でなければならない。次に、水平方向の運動量方程式 (2.1a) を  $z = -H$  から  $z = 0$  まで鉛直積分し、水平発散をとった後に、(2.4) を適用すれば、

$$\nabla_h \cdot (H \nabla_h p_s) = \int_{-H}^0 F_b dz \quad (2.5)$$

が得られる。ここで、 $F_b$  は、表面圧力勾配の項 (と局所時間微分の項) を除く全ての項の寄与を表す。この表面圧力に対する楕円方程式を解くことにより、表面圧力を決定できる。

### 2.1.3 水平直交曲線座標・ $z$ 座標における基礎方程式系の表現

水平直交曲線座標・鉛直  $z$  座標の座標変数  $(i, j, z)$  は、地理座標系の座標変数と

$$i = i(\lambda, \phi), \quad j = j(\lambda, \phi), \quad z = z$$

によって関係付けられるとする。ここで、 $\lambda$  は経度、 $\phi$  は緯度、 $z$  は平均海面水位からの高度である。それぞれの方向の単位ベクトルは前に定義した  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  であり、これらは局所的に直交することに注意が必要である。このとき、水平方向のスケール因子  $e_1, e_2, e_3$  は、

$$e_1 = a \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial i} \cos \phi \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial i} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$e_2 = a \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial j} \cos \phi \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial j} \right)^2 \right]^{1/2}$$

によって与えられる。惑星半径に対して海洋が十分に浅いモデルを考えるので、もとのスケール因子に含まれる  $(a + z)$  は  $a$  に置き換えた。

導入した座標系  $(i, j, k)$  において、モデルの基礎方程式系 (2.1) は以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & + (\zeta + f)v - \frac{1}{e_1} \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) - w \frac{\partial u}{\partial z} \\ & - \frac{1}{e_1} \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{p_s + p_h}{\rho_0} \right) + \tilde{\mathcal{D}}^u, \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & - (\zeta + f)u - \frac{1}{e_2} \frac{\partial}{\partial j} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) - w \frac{\partial v}{\partial z} \\ & - \frac{1}{e_2} \frac{\partial}{\partial j} \left( \frac{p_s + p_h}{\rho_0} \right) + \tilde{\mathcal{D}}^v, \end{aligned} \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial z} = -(\rho - \rho_0)g, \quad (2.6c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\chi \quad (2.6d)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial(e_2 u \Theta)}{\partial i} + \frac{\partial(e_1 v \Theta)}{\partial j} \right] - \frac{\partial(\Theta w)}{\partial z} + \tilde{D}^\Theta, \quad (2.6e)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial(e_2 u S)}{\partial i} + \frac{\partial(e_1 v S)}{\partial j} \right] - \frac{\partial(S w)}{\partial z} + \tilde{D}^S, \quad (2.6f)$$

$$\rho_o = \rho_o(\Theta, S, z). \quad (2.6g)$$

ここで,  $(u, v)$  は水平速度ベクトル  $\mathbf{U}_h$  の各方向成分,  $\tilde{\mathbf{D}}^U = (\tilde{D}^u, \tilde{D}^v)$  である. また,  $\zeta$  は相対渦度の鉛直成分,  $D$  は速度の水平発散であり,  $z$  座標系において,

$$\zeta = \frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial(e_2 v)}{\partial i} - \frac{\partial(e_1 u)}{\partial j} \right], \quad D = \frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial(e_2 u)}{\partial i} + \frac{\partial(e_1 v)}{\partial j} \right] \quad (2.7)$$

と書かれる. なお, 表面圧力  $p_s$  は, (2.5) あるいは (2.3) から決定され, また大気圧の影響はここでは無視した.

#### 2.1.4 水平直交曲線座標・一般鉛直座標における基礎方程式系の表現

現業の海洋モデルでは, 海底地形や海面変位を考慮するために様々な鉛直座標が用いられる. 対象とする問題に応じて適切な鉛直座標が選択できるように, しばしば一般化した鉛直座標 ( $s$  座標) を用いて定式化がなされる. 今,  $z$  座標系の座標変数を  $(i^*, j^*, z^*)$  と  $s$  座標系の座標変数を  $(i, j, s)$  とすると,  $z$  座標系から  $s$  座標系への変換は,

$$i = i^*, \quad j = j^*, \quad s = s(i^*, j^*, z^*, t^*), \quad t = t^*$$

によって関係付けられる.

次に,  $z$  座標系の方程式系から  $s$  座標系の方程式系への変換に必要な幾つかの関係式を導く. 物理量  $\Psi$  が,  $z$  座標系では  $\Psi = \psi^*(i^*, j^*, z^*, t^*)$ ,  $s$  座標系では  $\Psi =$

$\psi(i, j, s, t)$  と表されるとすると、物理量  $\Psi$  の偏微分は、微分の連鎖率によって、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi^*}{\partial i^*} &= \frac{\partial \psi}{\partial i} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial i^*} = \frac{\partial \psi}{\partial i} - \frac{e_1}{e_3} \sigma_1 \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial j^*} &= \frac{\partial \psi}{\partial j} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial j^*} = \frac{\partial \psi}{\partial j} - \frac{e_2}{e_3} \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} &= \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z^*} = \frac{1}{e_3} \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\ \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t^*} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.8}$$

と変換される。ここで、 $e_3$  は鉛直方向のスケール因子、 $\sigma_1, \sigma_2$  は水平方向の  $s$  面の傾斜であり、

$$e_3 = \frac{\partial z^*}{\partial s}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{e_1} \left( \frac{\partial z^*}{\partial i^*} \right)_s, \quad \sigma_2 = \frac{1}{e_2} \left( \frac{\partial z^*}{\partial j^*} \right)_s$$

と定義される。一方、 $\Psi$  のラグランジュ微分は、(2.8) を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{d\psi^*}{dt^*} &= \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} + \frac{u}{e_1} \frac{\partial \psi^*}{\partial i^*} + \frac{v}{e_2} \frac{\partial \psi^*}{\partial j^*} + w \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{u}{e_1} \frac{\partial \psi}{\partial i} + \frac{v}{e_2} \frac{\partial \psi}{\partial j} + \left( w + e_3 \frac{\partial s}{\partial t} - \sigma_1 u - \sigma_2 v \right) \frac{1}{e_3} \frac{\partial \psi}{\partial s}\end{aligned}$$

と変換される。したがって、 $s$  座標系における鉛直速度  $\omega$  は、

$$\omega \equiv \frac{ds}{dt^*} = w - w_s - \sigma_1 u - \sigma_2 v$$

によって与えられる。ここで、 $w_s \equiv (\partial z^*/\partial t)_s = -e_3 (\partial s/\partial t)_{z^*}$  である。最終的に、 $\Psi$  のラグランジュ微分は、

$$\frac{d\psi^*}{dt^*} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{u}{e_1} \frac{\partial \psi}{\partial i} + \frac{v}{e_2} \frac{\partial \psi}{\partial j} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial s}\tag{2.9}$$

と書ける。

$z$  座標系における方程式系 (2.6) や鉛直渦度や水平発散の表現 (2.7) に対して、鉛直座標変換のための関係式 (2.8), (2.9) を適用し整理すると、以下の  $s$  座標系における方程式系を導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & + (\zeta + f)v - \frac{1}{e_1} \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) - \frac{\omega}{e_3} \frac{\partial u}{\partial s} \\ & - \frac{1}{e_1} \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{p_h + p_s}{\rho_0} \right) + g \frac{\rho'}{\rho_0} \sigma_1 + \mathcal{D}^u, \end{aligned} \quad (2.10a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & - (\zeta + f)u - \frac{1}{e_2} \frac{\partial}{\partial j} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) - \frac{\omega}{e_3} \frac{\partial v}{\partial s} \\ & - \frac{1}{e_2} \frac{\partial}{\partial j} \left( \frac{p_s + p_h}{\rho_0} \right) + g \frac{\rho'}{\rho_0} \sigma_2 + \mathcal{D}^v, \end{aligned} \quad (2.10b)$$

$$\frac{1}{e_3} \frac{\partial p_h}{\partial s} = - \frac{\rho'}{\rho_0} g, \quad (2.10c)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial e_3}{\partial t} + e_3 \underline{D} + \frac{\partial \omega}{\partial s} = 0, \quad (2.10d)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} = & - \frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial (e_2 (\varepsilon_2 \eta + H) U_{barot})}{\partial i} + \frac{\partial (e_1 (\varepsilon_2 \eta + H) V_{barot})}{\partial j} \right] \\ & + \varepsilon_1 (P - E) \end{aligned} \quad (2.10e)$$

$$\frac{1}{e_3} \frac{\partial (e_3 \Theta)}{\partial t} = - \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[ \frac{\partial (e_2 e_3 u \Theta)}{\partial i} + \frac{\partial (e_1 e_3 v \Theta)}{\partial j} \right] - \frac{1}{e_3} \frac{\partial (\Theta \omega)}{\partial s} + \mathcal{D}^\Theta, \quad (2.10f)$$

$$\frac{1}{e_3} \frac{\partial (e_3 S)}{\partial t} = - \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[ \frac{\partial (e_2 e_3 u S)}{\partial i} + \frac{\partial (e_1 e_3 v S)}{\partial j} \right] - \frac{1}{e_3} \frac{\partial (S \omega)}{\partial s} + \mathcal{D}^S, \quad (2.10g)$$

$$\rho_o = \rho_o(\Theta, S, z(i, j, s, t)). \quad (2.10h)$$

ここで、 $\rho' (= \rho - \rho_0)$  は参照密度からの偏差である。また、 $\mathcal{D}^u, \mathcal{D}^v, \mathcal{D}^\Theta, \mathcal{D}^S$  はそれぞれ、 $\tilde{\mathcal{D}}^u, \tilde{\mathcal{D}}^v, \tilde{\mathcal{D}}^\Theta, \tilde{\mathcal{D}}^S$  の  $s$  座標系での表現である。 $s$  座標系の鉛直渦度と水平発散の表現は、 $s$  座標系において、

$$\zeta = \frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial (e_2 v)}{\partial i} - \frac{\partial (e_1 u)}{\partial j} \right], \quad \underline{D} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[ \frac{\partial (e_2 e_3 u)}{\partial i} + \frac{\partial (e_1 e_3 v)}{\partial j} \right] \quad (2.11)$$

となる。 $\underline{D}$  は、 $e_3 = e_3(z)$  の場合を除いて、前に示した水平発散の表現  $D$  とは一致しないことに注意されたい。 $U_{barot}, V_{barot}$  は、鉛直平均した水平速度 (順圧成分) で

あり, 例えば,  $U_{barot}$  は,

$$U_{barot} = \frac{1}{\varepsilon_2 \eta + H} \int_{s(z=-H)}^{s(z=\varepsilon_2 \eta)} (U e_3) ds$$

によって定義される.  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は海面 (故に表面圧力) の扱いにより決まる指標であり, (i) 剛体蓋近似を適用する場合は  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , (ii) 線形化した自由表面の扱いの場合は  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ , (iii) 海面の扱いに関して近似をしない場合は  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  である. 表面圧力  $p_s$  は, (i) の場合は (2.5), (ii) または (iii) の場合は (2.3) の方法に基づいて決定される. 任意の時刻・位置における  $z$  の値は,  $\eta$  が既知であれば, 定義した鉛直座標変換の関係式から計算することができ, 同時に鉛直方向のスケール因子  $e_3 (= \partial z / \partial s)$  も計算できる.

### 2.1.5 サブグリッド・スケールの物理の表現

重力の存在は, 水平運動と鉛直運動の間に強い非等方性を生む. そのため, (2.10) における, サブグリッド・スケールの物理による寄与  $D^q$  (ただし,  $q = u, v, \Theta, S$ ) を, 水平運動に伴う寄与  $D^h q$  と鉛直運動に伴う寄与  $D^v q$  に分ける. ここでは, これらの項の形式を簡潔にまとめることに主眼を置き, 各パラメタリゼーション・スキームの詳細については参考文献を参照されたい.

#### 鉛直方向の混合

鉛直乱流混合を生じさせるシア不安定や内部波の碎破等の過程は, 海洋大循環モデルで典型的な格子スケールよりもはるかに小さいため, その効果を取り入れるにはパラメータ化する必要がある. 鉛直乱流フラックスは, 格子スケールの変数の空間勾配に線形に比例すると仮定し,  $\overline{q'w'} = -A^{vq} \partial \bar{q} / \partial z$  のように表現する. このとき, 運動量, トレーサーの鉛直乱流混合を表現する項は, 二階の空間微分を用いて,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{vU} &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{A^{vm}}{e_3} \frac{\partial U_h}{\partial s} \right), \\ \mathcal{D}^{v\Theta} &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{A^{vT}}{e_3} \frac{\partial \Theta}{\partial s} \right), \quad \mathcal{D}^{vS} = \frac{1}{e_3} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{A^{vT}}{e_3} \frac{\partial S}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

と書かれる. ここで,  $A^{vm}, A^{vT}$  はそれぞれ, 鉛直渦粘性係数, 鉛直渦拡散係数である. これらの係数として, (a) 定数, (b) 位置の関数, (c) 局所的な流体の特性 (安定度やリチャードソン数など) の簡単な関数, の三種類の場合がモデルでは想定されている. 鉛直乱流混合をより良く表現するために海洋モデル業界では, K-profile パ

ラメタリゼーション (KPP) スキーム (Large et al. 1994) 等の乱流クロージャーが用いられるが, 本モデルには今の所実装できていない.

### 水平方向の混合

水平方向の乱流混合は, メソスケールの乱流 (直径数百 km 程度) による混合と, サブメソスケールの乱流 (1~50 km 程度) による混合に大きくは分けられる. メソスケールの乱流は, 解像度が十分に高ければ, 静力学平衡を仮定する海洋大循環モデルにおいても陽に表現できる. しかしながら, 全球領域で長時間積分を行う場合に, メソスケールの渦を十分に表現できる解像度で計算することは今でも容易でない. そのため, 伝統的には, 等密度面混合スキーム (Redi 1982) と GM スキーム (Gent and McWilliams 1990) といったパラメタリゼーションを用いる. 一方, サブメソスケールの乱流は, 海洋大循環モデルにおいて現実的な格子スケールよりも遥かに小さく, また静力学近似の適用限界も存在するために, モデルの中で陽に表現することは難しい. そのため, サブメソスケールの渦の効果をモデルに取り入れるためにはパラメタリゼーションを要する. 以下では, トレーサーに対する二次の水平拡散, 四次の水平拡散, メソスケール渦による移流のパラメタリゼーション, 水平運動量に対する二次の水平粘性, 四次の水平粘性に伴う項の形式をまとめる.

はじめに, トレーサー  $T$  に対する二次の水平拡散の表現は,

$$\mathcal{D}_{\text{diff}}^{IT} = \nabla \cdot (A^{IT} \mathcal{R} \nabla T), \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 1 & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

である. ここで,  $r_1, r_2$  は, モデル座標系の水平面と拡散演算子が作用する面との間の傾斜を表す. (2.12) は, 等ジオポテンシャル面に沿う拡散を想定するならば厳密な表現である. 一方で, 等密度面に沿った拡散を想定するならば, 現実の海洋内部領域における等密度面の傾斜が最大でも  $10^{-2}$  程度であることを利用した近似的な表現である (Redi 1982).  $r_1, r_2$  は, 等ジオポテンシャル面に沿った拡散に対しては,  $r_1 = \sigma_1, r_2 = \sigma_2$  であり,  $z$  座標系では  $r_1 = r_2 = 0$  となる. また, 等密度面に沿った拡散に対しては,

$$r_1 = -\frac{e_3}{e_1} \left( \frac{\partial s}{\partial i} \right)_\rho, \quad r_2 = -\frac{e_3}{e_2} \left( \frac{\partial s}{\partial j} \right)_\rho$$

である.

トレーサー  $T$  に対する四次の水平拡散は,

$$\mathcal{D}_{\text{diff},4\text{th}}^{IT} = \nabla \cdot \{ A^{IT,4\text{th}} \mathcal{R} \nabla [\nabla \cdot (\mathcal{R} \nabla T)] \}$$

の形式で与えられる.

メソスケール渦により生じる移流のパラメタリゼーション (Gent and McWilliams 1990) は,

$$\mathcal{D}_{GM}^{IT} = \nabla \cdot (\mathbf{U}^* T)$$

と書かれる. ここで,  $\mathbf{U}^* = (u^*, v^*, w^*)$  は渦により生じる, 非発散な移流速度である. この速度は,

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial}{\partial s} (A^{GM} \tilde{r}_1), & v^* &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial}{\partial s} (A^{GM} \tilde{r}_2), \\ w^* &= -\frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial}{\partial i} (A^{GM} e_2 \tilde{r}_1) + \frac{\partial}{\partial i} (A^{GM} e_1 \tilde{r}_2) \right] \end{aligned}$$

と定義される. ここで,  $A^{GM}$  は渦により生じる速度と関係する係数であり, しばしば等密度面混合における拡散係数と同じ値が設定される.  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$  は, ジオポテンシャル面と等密度面との傾斜

$$\tilde{r}_n = r_n + \sigma_n \quad (n = 1, 2)$$

であり,  $z$  座標系の場合は単に  $\tilde{r}_n = r_n$  となる. また, 境界において,  $\mathbf{U}^*$  の法線方向の成分はゼロに設定する. GM スキームや等密度面混合スキームを実際に用いる際には,  $\tilde{r}_n$  が非常に大きい場所 (海面の境界層内など) において, 計算不安定の軽減や他のパラメタリゼーションスキーム (境界層スキーム等) との競合を避けるための対処 (Danabasoglu and Mc Williams 1995; Large et al. 1997; Griffies 1998) が必要である.

水平運動量  $\mathbf{U}_h$  に対する二次の水平粘性に対する表現は,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{ivisc}}^{\mathbf{U}} &= \nabla_h (A^{lm} \chi) - \nabla_h \times (A^{lm} \zeta \mathbf{k}) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{e_1} \frac{\partial (A^{lm} \chi)}{\partial i} & -\frac{1}{e_2 e_3} \frac{\partial (A^{lm} e_3 \zeta)}{\partial j} \\ \frac{1}{e_2} \frac{\partial (A^{lm} \chi)}{\partial j} & +\frac{1}{e_1 e_3} \frac{\partial (A^{lm} e_3 \zeta)}{\partial i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である\*1. この表現において, 水平運動量はモデル座標の水平面に沿って拡散される. スカラー場に対する拡散演算子の場合とは違い, モデル座標の水平面と異なる

\*1 水平速度ベクトル  $\mathbf{U}_h$  に対するラプラシアンは, ベクトル恒等式を用いて,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{U}_h &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}_h) - \nabla_h \times (\nabla \times \mathbf{U}_h) \\ &= \nabla_h (\chi) - \nabla_h \times (\zeta \mathbf{k}) + \frac{1}{e_3} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{e_3} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

と変形できる.

等値面に沿った水平粘性の表現を一般に得ることは困難である。ただし、デカルト座標系の場合には、スカラー場の拡散演算子のように、

$$\mathcal{D}_{\text{visc}}^{lu} = \nabla \cdot (\mathcal{R}\nabla u), \quad \mathcal{D}_{\text{visc}}^{lv} = \nabla \cdot (\mathcal{R}\nabla v)$$

と書くことができる。

最後に、水平運動量  $\mathbf{U}_h$  に対する四次の水平粘性は、

$$\mathcal{D}_{\text{visc},4th}^{lU} = \nabla_h \left\{ \nabla_h \cdot [A^{lm,4th} \nabla_h(\chi)] \right\} + \nabla_h \times \{ \mathbf{k} \cdot \nabla \times [A^{lm,4th} \nabla_h \times (\zeta \mathbf{k})] \}$$

の形式で与えられる。ただし、4 次の水平粘性もまた、モデル座標の水平面に沿って水平運動量が拡散される場合のみを考えることにする。

## 2.2 時間離散化

### 2.2.1 時間スキームの概要

方程式系の時間離散化は、全体的には、[Shchepetkin and McWilliams \(2005\)](#) で提案された予測子・修正子法の一つ (LF-AM3 スキーム) を用いる。この方法の概要を説明するために、空間離散化が完了した半離散化式

$$\frac{dq_{ij}}{dt} = F_{ij}(q)$$

を考えよう。はじめに、予測子  $q_{ij}^{n+1,p}$  はリープ・フロッグ法によって、

$$q_{ij}^{n+1,p} = q_{ij}^{n-1} + 2\Delta t F_{ij}(q^n).$$

と計算される。修正子  $q_{ij}^{n+1,c}$  は、直前に求めた予測子の値を使った、3 次のアダムス・モルトン公式と類似した方法により、以下のように計算される。

$$q_{ij}^{n+1,c} = q_{ij}^n + \Delta t F_{ij} \left( \frac{5q_{ij}^{n+1,p} + 8q_{ij}^n - q_{ij}^{n-1}}{12} \right)$$

最後、この修正子の値を  $q_{ij}^{n+1}$  とする。もし右辺が  $q$  に関して線形項であれば、LF-AM3 スキームの精度は3次精度である。

しかしながら、実際には、LF-AM3 スキームを全ての項に適用すると、鉛直混合や外部波等の海洋大循環の移流よりも遥かに速い物理によって時間刻み幅が厳しく制限される。そのため、予測子と修正子の各ステップにおいて、鉛直粘性項と鉛

直拡散項にはクランク・ニコルソン法, 水平粘性項と水平拡散項には後退オイラー法を適用する. ただし, メソスケールの渦による水平混合と関係した項には前進オイラー法を適用する. また, 位相速度が速い外部波と関係した順圧モードをもとの方程式系から分離するために, 鉛直平均した水平方向の運動量方程式と連続の式を別に導き, それらを適切な時間スキーム (陰解法あるいは外部波の時間積分に適した陽解法) を用いて時間積分する. この過程の中で, 水平速度の順圧成分や表面変位 (または表面圧力) の時間発展が計算される. 順圧モードを分離することで, 3次元の方程式系に対する時間刻み幅は, 外部波に伴う時間刻み幅よりも長く設定できる. また, 海洋大循環モデルが想定とする問題においてはしばしば, 内部重力波も外部波の次に時間刻み幅を制約する. そのため, 静水圧  $p_h$  を  $t^{n+1}, t^n, t^{n-1}$  の間で時間平均し, それから水平圧力勾配項を計算することで, 内部重力波に伴う時間刻み幅の制約を緩和する. そのためには, 水平方向の運動量方程式よりも先に, トレーサーの方程式を時間発展させる必要がある. 次節では, 実際に時間離散化を適用した結果や, 方程式系全体としての時間積分の手順を示す.

## 2.2.2 時間スキーム詳細

時間積分の手順の詳細を以下に記述する.

### ステージ 1: 予測子の計算

予測子の計算では, 非粘性項 (移流項, コリオリ項, 圧力勾配項) の寄与のみを考慮する.

#### 1-1: 海水密度, 静水圧, 鉛直速度の診断

$$\begin{aligned} \rho^n &= \rho'(\Theta^n, S^n, -\rho_0 g z^n), \quad p_h^n = \int_s^{s_T} g(\rho')^n e_3^n ds, \\ \omega^n &= - \int_{s_B}^s \nabla_h \cdot (e_3^n \mathbf{U}_h^n) ds + \varepsilon_1 \left( \frac{\partial e_3}{\partial t} \right)_{\text{pseudo}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで,  $s_T, s_B$  はそれぞれ, 計算領域の上下端における  $s$  の値である. また, この段階では順圧方程式系は時間発展前であるので, (2.13) における層の厚さの時間変化と関係する項は,

$$\left( \frac{\partial e_3}{\partial t} \right)_{\text{pseudo}} = \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)_s \left[ \int_{s_B}^{s_T} \nabla_h \cdot (e_3^n \mathbf{U}_h^n) ds - q_W^n \right] \quad (2.14)$$

と計算することにする。ここで, (2.14) は, 順圧方程式系の時間離散式とは不整合であることに注意が必要である。

### 1-2: 鉛直方向のスケール因子の仮更新

$$\varepsilon_1 \frac{e_3^{n+1,*} - e_3^{n-1}}{2\Delta t} = -\nabla_h \cdot (e_3^n \mathbf{U}_h^n) - \frac{\partial \omega^n}{\partial s} \quad (2.15)$$

ただし, 剛体蓋近似を適用する場合 ( $\varepsilon_1 = 0$ ) は  $e_3$  は時間に依存しないため, この過程は飛ばしても良い。

### 1-3: 水平速度の更新

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{U}_h^{n+1,*} - \mathbf{U}_h^{n-1}}{2\Delta t} &= -(\zeta^n + f) \mathbf{k} \times \mathbf{U}_h^n - \frac{\omega^n}{e_3^n} \frac{\partial \mathbf{U}_h^n}{\partial s} \\ &\quad - \nabla_h \left[ \frac{(\mathbf{U}_h^n)^2}{2} + \frac{p_s^n + p_h^n}{\rho_0} \right] + g \frac{(\rho')^n}{\rho_0} \boldsymbol{\sigma}^n \end{aligned}$$

ここで,  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{i} + \sigma_2 \mathbf{j}$  である。

### 1-4: トレーサーの更新

$$\frac{e_3^{n+1,*} T^{n+1,*} - e_3^{n-1} T^{n-1}}{\Delta \hat{t}} = -\nabla_h \cdot (e_3^n T^n \mathbf{U}_h^n) - \frac{\partial (T^n \omega^n)}{\partial s}$$

予測子の計算過程では, (2.13) に基づく体積フラックスや  $e_3^{n+1,*}$  が, 順圧方程式系の時間離散式と整合的でないために, 予測子の計算過程ではトレーサーの積分の保存性は保証されないが, トレーサーの一定値性は厳密に保証される。トレーサーの積分の保存性は修正子の計算過程で最終的に保証されれば良いので, この段階ではトレーサーの一定値性が保証されることがより重要である。

### 1-5: アダムス・モルトン公式による内挿

時間レベル  $n + \frac{1}{2}$  での  $\mathbf{U}_h$  と  $e_3$  の値を, 三次のアダムス・モルトン公式

$$q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{5}{12} q^{n+1,*} + \frac{8}{12} q^n - \frac{1}{12} q^{n-1}$$

から計算する. また, 時間レベル  $n + \frac{1}{2}$  におけるトレーサー  $T$  の値は,

$$T^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{e_3^{n+\frac{1}{2}}} \left[ e_3^{n+1,*} \frac{5}{12} T^{n+1,*} + e_3^n \frac{8}{12} T^n - e_3^{n-1} \frac{1}{12} T^{n-1} \right]$$

と計算する.

## ステージ 2: 修正子の計算

### 2-1: 物理パラメタリゼーションによる時間変化率の計算

$$\mathcal{D}^U = \mathcal{D}_{\text{lvisc}}^{lU}(\overline{U}_h^{\theta_h}) + \mathcal{D}_{\text{vvisc}}^{vU}((A^{vm})^n, \overline{U}_h^{\theta_v}) + \mathcal{D}_{\text{lvisc,4th}}^{lU}(\overline{U}_h^{\theta_h}),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^T &= \mathcal{D}_{\text{ldiff,Redi}}^{lT}(T^n) + \mathcal{D}_{\text{GM}}^{lT}(T^n) \\ &\quad + \mathcal{D}_{\text{vdiff}}^{vT}((A^{vT})^n, \overline{T}^{\theta_v}) + \mathcal{D}_{\text{conv}}^{vT}(T^n) + \mathcal{D}_{\text{ldiff,4th}}^{lT}(\overline{T}^{\theta_h}) \end{aligned}$$

ここで,  $\overline{(\ )}^{\theta_h}$ ,  $\overline{(\ )}^{\theta_v}$  は, 粘性項や拡散項を陰的に扱うための, 時間レベル  $n$  から  $n+1$  の間の時間平均を表し, 例えば,

$$\overline{T}^{\theta_h} = \theta_h T^{n+1} + (1 - \theta_h) T^n \quad (2.16)$$

と書かれる.

なお, この計算過程で実際に計算されるのは,  $\mathcal{D}^U, \mathcal{D}^T$  の内の時間レベル  $n$  と関係する項のみである. 時間レベル  $n+1$  と関係する項は, 水平速度の傾圧成分やトレーサーが更新されるときに陰的に評価される.

### 2-2: 海水密度, 静水圧, 鉛直速度の診断

1-1 と同様に, 時間レベル  $n + \frac{1}{2}$  における静水圧と鉛直速度を診断するが, 海水密度は

$$(\rho')^{n+\frac{1}{2}} = \rho(\Theta^{n+\frac{1}{2}}, S^{n+\frac{1}{2}}, -\rho_0 g z^n)$$

と計算する.

## 2-3: 水平速度の傾圧成分の更新

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{U}_h^{n+1,**} - \mathbf{U}_h^n}{\Delta t} = & -\mathbf{k} \times \left[ \zeta^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{U}_h^{n+\frac{1}{2}} + f \overline{\mathbf{U}_h}^{\theta_c} \right] - \frac{\omega^{n+\frac{1}{2}}}{e_3^n} \frac{\partial \mathbf{U}_h^{n+\frac{1}{2}}}{\partial s} \\
 & - \nabla_h \left[ \frac{(\mathbf{U}_h^{n+\frac{1}{2}})^2}{2} + \frac{p_s^n + p_h^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_0} \right] + g \frac{(\rho')^{n+1/2}}{\rho_0} \boldsymbol{\sigma}^n \\
 & + \mathcal{D}^U (\mathbf{U}_h^{n+1,**}, \mathbf{U}_h^n, (A^{vm})^n)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

ここで,  $\overline{(\ )}^{\theta_c}$  は, コリオリ項を陰的に扱うための, 時間レベル  $n$  から  $n+1, **$  間の時間平均を表し, (2.16) と同様に書かれる.

(2.17) のコリオリ項, 水平粘性項, 鉛直粘性項には, 時間レベル  $n+1, **$  の水平速度が含まれるため, 厳密に陰的評価を行うには三次元データに対して連立線形方程式を解くことになる. しかし, これは計算コストが大変高いため,  $O((\Delta t)^2)$  の誤差は許容することにして, ここでは以下のように演算子分割を行う.

$$\begin{aligned}
 [I + \Delta t \theta_c C] [I + \Delta t \theta_v D_v^m] [I + \Delta t \theta_h D_h^m] (\mathbf{U}_h^{n+1,**} - \mathbf{U}_h^n) \\
 = -\mathbf{k} \times f \mathbf{U}_h^n + \mathcal{D}_{\text{lvisc}}^U (\mathbf{U}_h^n) + \mathcal{D}_{\text{vvisc}}^U ((A^{vm})^n \mathbf{U}_h^n) + \mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

ここで,  $\mathbf{R}$  は (2.17) の右辺の内, コリオリ項, 鉛直粘性項, 水平粘性項以外の項を表す. また,  $C, D_v^m, D_h^m$  は, それぞれコリオリ項, 鉛直粘性項, 水平粘性項を  $\mathbf{U}_h^n$  で微分することにより得られる係数行列である.

次に行われる順圧方程式系の時間積分のために, 水平速度の傾圧方程式から順圧方程式への強制

$$\mathbf{G}_e = \frac{(\mathbf{U}_{\text{barot}})^{n+1,**}}{\Delta t} + \left[ \nabla_h \frac{p_s^n}{\rho_0} + \mathbf{k} \times f \overline{(\mathbf{U}_{\text{barot}})^{\theta_c}} \right] \tag{2.19}$$

を計算し, 保存しておく. ここで, (2.19) に現れる水平速度の順圧成分は,

$$(\mathbf{U}_{\text{barot}})^m = \frac{1}{\varepsilon_2 \eta^n + H} \int_{s_B}^{s_T} (\mathbf{U}_h^m e_3^n) ds$$

の形式で計算する.

最後に,  $\mathbf{U}_h^{n+1,**}$  から順圧成分を引くことによって, 時間レベル  $n+1$  の水平速度の傾圧成分は

$$\mathbf{U}_{\text{baroc}}^{n+1} = \mathbf{U}_h^{n+1,**} - (\mathbf{U}_{\text{barot}})^{n+1,**}$$

と決定される.

## 2-4: 水平速度の順圧成分と表面変位の更新

剛体蓋近似をする場合 ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ) や自由表面の方程式を線形近似する場合 ( $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ ) には, 順圧方程式系を以下のように陰的に時間発展させる.

$$\frac{\mathbf{U}_{barot}^{n+1} - \mathbf{U}_{barot}^n}{\Delta t} = -g\nabla_h \bar{\eta}^{\theta_s} - \mathbf{k} \times \overline{f(\mathbf{U}_{barot})}^{\theta_c} + \mathbf{G}_e, \quad (2.20a)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} = -\nabla_h \cdot [H\mathbf{U}_{barot}^{n+1}] + \varepsilon_1 q_W^n \quad (2.20b)$$

実際には, これらの式から導かれる  $\eta^{n+1}$  に対する楕円方程式が解かれる. ただし, 厳密に導いた場合には, コリオリ項を陰的に取り扱うことに起因して, 楕円演算子は対称とならなず大変扱いにくい. この問題を回避するために, [Dukowicz and Smith \(1994\)](#) で行われた演算子分割の手法を適用する. はじめに, 補助変数

$$\mathbf{U}_{barot}^{n+1,*} = \mathbf{U}_{barot}^{n+1} + \theta_s \Delta t g \nabla_h (\eta^{n+1} - \eta^n) \quad (2.21)$$

を導入すれば, (2.20a) は,  $O(f(\Delta t)^3)$  の分割誤差の範囲で,

$$(I + \theta_C \Delta t C)(\mathbf{U}_{barot}^{n+1,*} - \mathbf{U}_{barot}^n) = -g\nabla_h \eta^n - \mathbf{k} \times f\mathbf{U}_{barot}^n + \mathbf{G}_e, \quad (2.22)$$

と書くことができる. そして,  $\eta^{n+1}$  に対する楕円方程式は, (2.21) と (2.20b) を用いて,

$$\left[ -\nabla_h \cdot (gH\theta_s \nabla_h) + \frac{\varepsilon_1}{(\Delta t)^2} \right] (\eta^{n+1} - \eta^n) = -\nabla_h \cdot \left( \frac{H\mathbf{U}_{barot}^{n+1,*}}{\Delta t} \right) + \varepsilon_1 \frac{q_W^n}{\Delta t} \quad (2.23)$$

と導かれる. したがって, 手順としては, はじめに (2.20a) から  $\mathbf{U}_{barot}^{n+1,*}$  を得た後に, (2.23) を解くことで  $\eta^{n+1}$  を計算する. そして, この  $\eta^{n+1}$  を使って (2.21) から  $\mathbf{U}_{barot}^{n+1}$  を求めれば良い.

一方, 自由表面に関して近似を行わない場合 ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ) は, 傾圧方程式系よりも小さな時間刻み幅  $\Delta\tau = \Delta t/M$  を用いて, 順圧方程式系を以下のように陽的に時間発展させる ( $m = 0, \dots, M-1$ ).

$$\frac{\mathbf{U}_{barot}^{n+\frac{m+1}{M}} - \mathbf{U}_{barot}^{n+\frac{m}{M}}}{\Delta\tau} = -g\nabla_h \bar{\eta}^{\theta_s} - \mathbf{k} \times \overline{f(\mathbf{U}_{barot})}^{\theta_c} + \mathbf{G}_e, \quad (2.24a)$$

$$\frac{\eta^{n+\frac{m+1}{M}} - \eta^{n+\frac{m}{M}}}{\Delta\tau} = -\nabla_h \cdot \left[ (\eta^{n+\frac{m}{M}} + H)\mathbf{U}_{barot}^{n+\frac{m}{M}} \right] + q_W^n \quad (2.24b)$$

しかしながら, この方法で求めた  $\mathbf{U}_{barot}^{n+1}$  には, 傾圧方程式系の時間刻み幅では解像できない高周波数の振動が含まれるために, これを水平速度の傾圧成分と結合して

時間積分を続けると計算不安定を引き起こす。そのため、実際には  $n + 1$  を少し超えて時間レベル  $n + M_*/M$  (ここで,  $M < M_* \leq 3M/2$ ) まで積分した後に、適切な重みを用いて、

$$\mathbf{U}_{barot}^{n+1} = \sum_{m=1}^{M_*} a_m \mathbf{U}_{barot}^{n+\frac{m}{M_*}}, \quad \eta^{n+1} = \sum_{m=1}^{M_*} a_m \eta^{n+\frac{m}{M_*}}$$

と時間平均することで、時間レベル  $n + 1$  の水平速度の順圧成分が決定される。

順圧方程式を時間発展させる過程の中で、この後のトレーサーの移流計算で用いられる水平方向の体積フラックスの順圧成分は、以下のように決定される。

$$\langle\langle e_3 \mathbf{U}_h \rangle\rangle^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \overline{\mathbf{U}}_{barot}^{AM3} & (\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0) \\ \mathbf{U}_{barot}^{n+1} & (\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0) \\ \sum_{m=0}^{M_*} (b_m \mathbf{U}_{barot}^{n+m/M_*}) & (\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1) \end{cases} \quad (2.25)$$

ここで,  $\overline{(\ )}^{AM3}$  は、時間レベル  $n - 1, n, n + 1$  の値を用いたアダムス・モルトン公式による内挿を行うことを表す。また,  $b_m = M^{-1} \sum_{m'=m}^{M_*} a_{m'}$  である。

水平速度の順圧成分が更新されれば、最終的な時間レベル  $n + 1$  の水平速度は、

$$\mathbf{U}_h^{n+1} = \mathbf{U}_{baroc}^{n+1} + \mathbf{U}_{barot}^{n+1}$$

と求まる。

### 2-5: 深さの更新, 鉛直方向のスケール因子の更新

$$z^{n+1} = z(i, j, s, \eta^{n+1}), \quad e_3^{n+1} = \frac{\partial z^{n+1}}{\partial s}$$

### 2-6: 鉛直速度の診断

$$\langle\langle \omega^n \rangle\rangle^{n+\frac{1}{2}} = - \int_{s_B}^s \nabla_h \cdot (\langle\langle e_3 \mathbf{U}_h \rangle\rangle^{n+\frac{1}{2}}) ds + \varepsilon_1 \frac{e_3^{n+1} - e_3^n}{\Delta t}$$

ステージ 1-1 とは異なり、この鉛直速度の診断式は、順圧方程式系の時間発展と整合的であることに注意が必要である。

## 2-7: トレーサーの更新

$$\frac{e_3^{n+1}T^{n+1} - e_3^n T^n}{\Delta t} = -\nabla_h \cdot \left( \langle\langle e_3 U \rangle\rangle^{n+\frac{1}{2}} T^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\partial(\langle\langle \omega \rangle\rangle^{n+\frac{1}{2}} T^{n+\frac{1}{2}})}{\partial s} + e_3^n \mathcal{D}^T(T^{n+1}, T^n, (A^{vT})^n)$$

ステージ 1-4 とは異なり、順圧方程式系の時間発展と整合的な体積フラックスを用いて、トレーサーを移流させるため、修正子の計算過程では最終的に積分の保存性と一定値性の両方が保証される。

## 2.3 空間離散化

## 2.3.1 水平離散化: 球面調和関数に基づく擬スペクトル法の場合

球面の計算領域において、有限差分法や有限体積法を適用する場合には、通常は特異点の問題を何かしらの方法で解決する必要がある。陸がある場合には、特異点を海洋の計算領域から陸へ移動させた格子系 (tripolar grid 等) を用いることができるが、岸がなく全球が海洋で覆われた海惑星では、そのような方法は使えない。一方で、水平格子系として立方球面格子 (MIT-gcm 等)、六角形格子 (MPAS-Ocean 等) などを用いる海洋大循環モデルでは、全球海洋設定も自然に計算することができる。ここでは、海惑星の海洋を計算する他の方法として、伝統的な大気大循環モデルのように球面調和関数に基づく擬スペクトル法を用いる方法を記述する。

## 水平座標系・水平格子

球面調和関数に基づく擬スペクトル法を用いる場合は、方程式系の記述のために水平座標系として  $(\lambda, \mu)$  (ここで、 $\mu$  はサイン緯度) を用いる。このとき、

$$i = \lambda, \quad j = \mu, \\ e_1 = a \cos \phi, \quad e_2 = \frac{a}{\cos \phi}$$

である。水平格子系は経度方向には等間隔格子、緯度方向にはガウス格子が用いられ、全ての物理変数は同じ水平位置に定義される (A-grid)。各格子点の経度方向の座標は、

$$\lambda_i = 2\pi \frac{(i-1)}{I} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, I),$$

によって与えられる. また, 緯度方向の座標  $\mu_j (j = 1, 2, \dots, J)$  は,  $J$  次の Legendre 多項式  $P_j(\mu_j)$  のゼロ点であり,  $-1 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{J-1} < \mu_J < 1$  となるようにガウス格子の添え字の順番を定義する.

### 準備 1: 方程式系の変形

はじめに, 水平離散化にスペクトル法を適用するのに都合が良い形式に, 数理表現 (2.10) をもう一段階書き換える. 水平方向の運動量方程式は, 鉛直渦度  $\zeta$  と水平発散  $D$  ( $\underline{D}$  ではないことに注意) に対する方程式に書き換える. 今, 簡潔に表記するために, 球面座標系におけるラプラス演算子を  $\mathcal{L}$  とし, また,

$$\mathcal{H}(A, B) = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{\partial B}{\partial \mu} \right) \quad (2.26)$$

を導入する. 今,  $U = u \cos \phi, V = v \cos \phi$  とおくと, 演算子  $\mathcal{H}$  は,

$$\nabla_h \cdot (\alpha \mathbf{u}) = \mathcal{H}(\alpha U, \alpha V), \quad \mathbf{k} \cdot \nabla_h \times (\alpha \mathbf{u}) = \mathcal{H}(\alpha V, -\alpha U) \quad (2.27)$$

を満たすことに注意が必要である. これらの演算子を用いて, (2.10) を書き換えれば,

渦度方程式:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathcal{H}(F_A, F_B), \quad (2.28a)$$

発散方程式:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = +\mathcal{H}(F_B, -F_A) - \mathcal{L}(F_C), \quad (2.28b)$$

トレーサー ( $T = \Theta, S$ ) の時間発散式:

$$\frac{\partial (e_3 T)}{\partial t} = -\mathcal{H}(T e_3 U, T e_3 V) - \frac{\partial (\omega T)}{\partial s} + e_3 \mathcal{D}^T, \quad (2.28c)$$

$p_h$  の診断式:

$$\frac{\partial p_h}{\partial s} = \frac{\rho'(\Theta, S, -\rho_0 g z(s))}{\rho_0} e_3, \quad (2.28d)$$

$\omega$  の診断式:

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = -\mathcal{H}(e_3 U, e_3 V) + \varepsilon_1 \frac{\partial e_3}{\partial t}, \quad (2.28e)$$

表面変位に対する方程式:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\mathcal{H}((\eta + H)U_{barot}, (\eta + H)V_{barot}) + \varepsilon_1(P - E) \quad (2.28f)$$

を得る.

ここで,  $U = u \cos \phi, V = v \cos \phi$  であり,  $F_A, F_B, F_C$  は

$$\begin{aligned} F_A &= (f + \zeta)U + \frac{\omega}{e_3} \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} - \cos \phi \mathcal{D}^v, \\ F_B &= (f + \zeta)V - \frac{\omega}{e_3} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\rho'}{\rho_0} (1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \cos \phi \mathcal{D}^u, \\ F_C &= \frac{(U^2 + V^2)}{2(1 - \mu^2)} + \frac{1}{\rho_0} (p_h + p_s) \end{aligned} \quad (2.29)$$

と定義される. ただし,  $\Phi = gz$  とおいた.

鉛直渦度と水平発散は, 流線関数  $\psi$  と速度ポテンシャル  $\chi$  を導入することで, 水平速度と結びつけられる. 今, 水平速度が,

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} \times \nabla \psi + \nabla \chi \quad (2.30)$$

と表せるとすると, 鉛直渦度と水平発散はそれぞれ

$$\zeta = \mathcal{L}\psi, \quad D = \mathcal{L}\chi \quad (2.31)$$

を満たす. したがって, 鉛直渦度や水平発散から水平速度を求めるには, まず球面ラプラシアンを逆演算して  $\psi, \chi$  を求めてから,

$$U = (1 - \mu^2) \mathcal{H}(\chi, -\psi), \quad V = (1 - \mu^2) \mathcal{H}(\psi, \chi) \quad (2.32)$$

を計算すれば良い.

## 準備 2: 球面調和関数展開による擬スペクトル法の導入

球面上に定義される予報変数  $\zeta, D, T, \eta$  (ここでは, 代表して  $q$  と書く) が, 球面調和関数  $Y_n^m(\lambda, \mu)$  を用いて,

$$q(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \tilde{q}_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \tilde{q}_n^m P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (2.33)$$

のように関数展開されるとする. ここで,  $P_n^m$  は, 2 に規格化されたルジャンドル陪関数である. また,  $M, N$  は展開の切断波数であり, 三角形切断を用いる場合には,

全波数の切断波数を  $N_{tr}$  とすると  $M = N_{tr}, N = N_{tr}$  である\*2. スペクトル係数  $\tilde{q}_n^m$  は、球面調和関数正変換

$$\tilde{q}_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 q(\lambda, \mu) (Y_n^m)^* d\mu d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \right] P_n^m(\mu) d\mu \quad (2.34)$$

から計算される. 変換の過程に含まれる積分は、以下の方法で数値的に評価される. はじめに、(2.34) のフーリエ正変換の部分は、離散フーリエ変換 (実際には高速フーリエ変換) を用いて、

$$G^m(\mu_j) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} q(\lambda_i, \mu_j) e^{-im\lambda_i} \quad (2.35)$$

と計算される. そして、ルジャンドル正変換の部分は、ガウス・ルジャンドルの積分公式を用いて、

$$\tilde{q}_n^m = \sum_{j=1}^J w_j G^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \quad (2.36)$$

と計算される. ここで、 $w_j$  はガウス重みであり、

$$w_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_J}{(\mu - \mu_j) P_J'(\mu_j)} d\mu \quad (2.37)$$

によって与えられる. 逆変換も同様にして、

$$G^m(\mu_j) = \sum_{n=|m|}^N \tilde{q}_n^m P_n^m(\mu_j), \quad (2.38)$$

$$q_{ij} \equiv q(\lambda_i, \mu_j) = \sum_{i=0}^{I-1} G^m(\mu_j) e^{im\lambda_i}, \quad (2.39)$$

と計算される. ここで、下付き添え字の  $ij$  は、 $(\lambda_i, \mu_j)$  における物理空間上での格子点値であることを示す.

次に、水平微分に関する項の正変換を示す. はじめに、経度微分  $\partial/\partial\lambda$  および緯度微分  $\partial/\partial\phi$  が作用する項の正変換を考えよう. まず球面調和関数に基づく正変換 (2.34) を行い、部分積分を実行した後に、積分の評価に (2.36), (2.36) を用いれば、経度微分および緯度微分が作用する項のスペクトル変換は、

$$\left( \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right)_n^m = \frac{1}{I} \sum_{i,j} im q_{ij} Y_n^m(\lambda_i, \mu_j) w_j, \quad (2.40)$$

\*2軸対称モデルとして用いる場合は、 $M = 0, N = N_{tr}$  である.

$$\left(\frac{\widetilde{\partial q}}{\partial \phi}\right)_n^m = -\frac{1}{I} \sum_{i,j} q_{ij} e^{-im\lambda_j} (1 - \mu_j^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} \Big|_j w_j \quad (2.41)$$

によって求められることが分かる<sup>\*3</sup>. ここで、後者の部分積分において、 $q$ が $\mu = \pm 1$ においてゼロであることを仮定している. また、ルジャンドル陪関数の微分は、漸化式

$$(1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} = -n\varepsilon_{n,n+1} P_{n+1}^m + (n+1)\varepsilon_{m,n} P_{n-1}^m \quad (2.42)$$

によって厳密に評価できる. ここで、

$$\varepsilon_{m,n} = \left(\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}\right)^{1/2}$$

である. 同様にして、演算子  $\mathcal{H}$  が作用する項  $\mathcal{H}(A, B)$  の正変換は、

$$\left[\mathcal{H}(\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{B})\right]_n^m = \frac{1}{I} \sum_{i,j} \left[ imA_{ij} Y_n^m(\lambda_i, \mu_j) + B_{ij} e^{-im\lambda_i} (1 - \mu_j^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} \Big|_j \right] \frac{w_j}{1 - \mu_j^2} \quad (2.43)$$

によって求めることができる. ここで、 $A, B$  は  $\mu = \pm 1$  においてゼロであることを仮定している.

擬スペクトル法の長所は、非線形項に現れる積 (例えば、 $F_A$  に含まれる  $\zeta U$ ) を物理空間で評価することで、波数空間において直接計算する場合に比べて計算量を大幅に減らすことが出来る点である<sup>\*4</sup>. ただし、擬スペクトル法的に非線形項を評価する場合には、それにより生じるエイリアシング誤差を取り除く必要がある. 三角切断波数  $N_{tr}$  の球面調和関数展開を考えると、二つの変数の積から生じるエイリアシング誤差を完全に取り除くために、 $J \geq (3N_{tr} + 1)/2$  が満たされるように格子点数を設定する (3/2-rule) ことが広くなされる.

しかし、上のように 3/2-rule を適用する場合には、格子データをスペクトルデータに正変換する過程で情報が落ちるため、逆変換によって再び格子データに戻しても元の値には戻らない. 特に、解像度が十分でない設定において物理場の中に急

<sup>\*3</sup>ここで記述した空間微分の正変換の手順は、(本質的には同じではあるが) モデルの実際の実装と少し異なる. 実際のプログラム上では、水平微分を計算するために、SPMODEL が提供する微分計算用のサブルーチン (w\_DivLambda\_xy, w\_DivMu\_xy 等) を呼び出す. SPMODEL の内部では、ispack の対応するサブルーチンを呼び出すことで、はじめに格子データをスペクトルデータに変換し、さらにその結果を用いて水平微分のスペクトルデータを計算している.

<sup>\*4</sup>例えば、自由度が  $M$  個ある一次元問題では、波数空間において直接計算する場合の計算量は  $O(M^2)$  である. 一方で、まずスペクトルデータを逆変換し、物理空間で積を計算した後に、正変換してスペクトルデータに戻す (変換には FFT を用いるとする) 場合には、 $O(M \log M)$  の計算量で済む.

勾配がある場合には、変換の過程で高次のスペクトル係数の情報が落ちると、逆変換後の格子データに深刻なギブス振動が現れてしまう。海惑星の海洋計算では、海水温は海水の真下ではほぼ氷点であるのに対し、氷線緯度を境に南北に急激に変化する分布を持つために、このギブス振動が海水下の海洋混合層の温度場に顕著に現れる。さらに、海洋の表面温度の振動は二次的に海水厚さの分布にも深刻な影響を与える。そのため、本海洋モデルでは、この問題を回避するために  $J = N_{tr}$  と設定することを基本とするが、エイリアシング誤差に伴う非線形不安定を抑制するために4階微分の拡散と等価なフィルタを導入する。この方法は、super spectral viscosity method や、選点法において exponential filter を導入する方法と等価である。

### 方程式系の水平離散化

ここでは、上で導入した球面調和関数展開を用いて水平離散化を行う。(2.28)における渦度方程式、発散方程式、表面変位に対する方程式、トレーサーの時間発展式に対して正変換を適用すると、

渦度方程式:

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}_n^m}{\partial t} = - \left[ \mathcal{H}(\widetilde{F_A}, \widetilde{F_B}) \right]_n^m, \quad (2.44a)$$

発散方程式:

$$\frac{\partial \tilde{D}_n^m}{\partial t} = + \left[ \mathcal{H}(\widetilde{F_B}, -\widetilde{F_A}) \right]_n^m - \frac{n(n+1)}{a^2} (\widetilde{F_C})_n^m, \quad (2.44b)$$

表面変位に対する方程式:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \tilde{\eta}_n^m}{\partial t} = - \left[ \mathcal{H}((\varepsilon_2 \eta + H) \widetilde{U_{barot}}, (\varepsilon_2 \eta + H) \widetilde{V_{barot}}) \right]_n^m + \varepsilon_1 (\widetilde{P - E})_n^m, \quad (2.44c)$$

トレーサー ( $T = \Theta, S$ ) の時間発散式:

$$\frac{\partial (\widetilde{e_3 T})_n^m}{\partial t} = - \left[ \mathcal{H}(T \widetilde{e_3 U}, T \widetilde{e_3 V}) \right]_n^m - \left[ \frac{\partial (\omega T)}{\partial s} \right]_n^m + (\widetilde{e_3 \mathcal{D} T})_n^m \quad (2.44d)$$

$p_h$  の診断式:

$$\frac{\partial (p_h)_{ij}}{\partial s} = \frac{\rho'(\Theta_{ij}, S_{ij}, -\rho_0 g z_{ij}(s))}{\rho_0} (e_3)_{ij} \quad (2.44e)$$

$\omega$  の診断式:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial s} = - \left[ \mathcal{H}(\widetilde{e_3 U}, \widetilde{e_3 V}) \right]_{ij} + \varepsilon_1 \frac{\partial (e_3)_{ij}}{\partial t} \quad (2.44f)$$

を得る. ここで, 演算子  $\mathcal{H}$  が作用する項は, 共通して (2.43) を用いて計算される. ただし, (2.44f) の右辺 1 項目において, (2.43) から得られた空間微分項のスペクトルデータは, 逆変換により格子点データに戻されているとする.

鉛直渦度・水平発散のスペクトルデータから水平速度 ( $U, V$ ) の格子データを求める計算は以下のように行う. はじめに, (2.31) において  $\mathcal{L}^{-1}$  を作用させて,  $\tilde{\zeta}_n^m, \tilde{D}_n^m$  から流線関数と速度ポテンシャルのスペクトルデータを求める.

$$\tilde{\psi}_n^m = \frac{a}{n(n+1)} \tilde{\zeta}_n^m, \quad \tilde{\chi}_n^m = \frac{a}{n(n+1)} \tilde{D}_n^m. \quad (2.45)$$

次に, これらを用いて, (2.32) の水平微分を波数空間で評価すれば,  $U, V$  のスペクトルデータは,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n^m &= -(n+2)\varepsilon_{m,n+1} \psi_{n+1}^m + (n-1)\varepsilon_{m,n} \psi_{n-1}^m + im\chi_n^m, \\ \tilde{V}_n^m &= im\psi_n^m + (n+2)\varepsilon_{m,n+1} \chi_{n+1}^m - (n-1)\varepsilon_{m,n} \chi_{n-1}^m \end{aligned} \quad (2.46)$$

と計算される. 最後に, これらを逆変換すれば,  $U, V$  の格子データが得られる.

### 2.3.2 鉛直離散化: 有限体積法の場合

#### 鉛直座標系, 鉛直格子

鉛直座標系は前節で導入した  $s$  座標系であり, 計算領域の鉛直方向は  $K$  個の不等間隔の格子セルによって分割される. 格子セル  $k$  において, 上下界面の  $s$  座標はそれぞれ  $s_{k-1/2}, s_{k+1/2}$  と書き, その鉛直幅は  $\Delta s_k = s_{k-1/2} - s_{k+1/2}$  と書く. また, セルの上下界面の中点をセル中心と呼び, その  $s$  座標は  $s_k$  と書く.

変数の鉛直配置は C-grid 型の変数配置を採用し, 鉛直速度はセル界面に定義される一方で, それ以外の変数はセル中心に定義される.

#### 準備: 有限体積法の導入

鉛直離散化に有限体積法を適用するために, ここでは有限体積法の基本的な考え方を記述する. はじめに, 検査セル  $V$  におけるセル平均量

$$\bar{q}_k \equiv \frac{\int_V q dV}{\int_V dV}$$

を定義する. 特に, 鉛直一次元問題に対してセル平均量の定義は,

$$\bar{q}_k = \frac{1}{h_k} \int_{s_{k+1/2}}^{s_{k-1/2}} (qe_3) ds$$

となる. ここで,  $h_k$  は検査セルの幾何的長さ (層の厚さ) である. 有限体積法の定式化の特徴は, 以下に書かれるように, このセル平均量の時間発展を計算する所であり, その定式化の特性により  $q$  (の一次のモーメント) は局所的・広域的に保存する. 例えば, フラックス形式で書かれた鉛直一次元の移流拡散方程式

$$\frac{\partial(e_3 T)}{\partial t} = -\frac{\partial(\omega T)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{A^{vT}}{e_3} \frac{\partial T}{\partial s} \right) + e_3 \mathcal{D}^T \quad (2.47)$$

を考える. 検査セルに渡って積分し, ガウスの定理を適用すれば, 近似なしに検査セル  $k$  に対する方程式

$$\frac{\partial(h_k \bar{q}_k)}{\partial t} = \left[ -\omega T + \frac{A^{vT}}{e_3} \frac{\partial T}{\partial s} \right]_{s_{k+1/2}}^{s_{k-1/2}} + h_k \overline{\mathcal{D}^T}_k \quad (2.48)$$

が得られる. 右辺におけるセル界面の移流フラックスや拡散フラックスは, 近隣のセル平均値に基づいて近似的に計算される. このとき, 有限体積法の数値誤差の収束性や数値的に表現される移流等の特性は, セル界面のフラックスの求め方によって決まる.

本モデルでは, 伝統的な海洋大循環モデルにおける数値解法の技術を直接利用するために, 古典的な低次の有限体積法を適用することにする<sup>\*5</sup>. その場合には, 典型的に, 鉛直移流項において高々空間2次精度の風上フラックス, 鉛直拡散項において空間1次精度の拡散フラックスを用いる. 具体的なフラックスの計算方法については, 次の少々節を参照されたい. また,

$$\bar{q}_k = q_k + O((\Delta z_k)^2)$$

であるため, 空間二次精度までの有限体積法ではセル平均値とセル中心における点値を区別する必要はない. さらに,  $(e_3)_k$  を

$$(e_3)_k = \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)_k \approx \frac{h_k}{\Delta s_k} + O((\Delta s)^2)$$

と近似するのであれば, 空間二次精度の範囲において, (2.48) は,

$$\frac{\partial[(e_3)_k \bar{q}_k]}{\partial t} = \frac{1}{\Delta s_k} \left[ -\omega T + \frac{A^{vT}}{e_3} \frac{\partial T}{\partial s} \right]_{s_{k+1/2}}^{s_{k-1/2}} + (e_3)_k (\mathcal{D}^T)_k \quad (2.49)$$

<sup>\*5</sup>近年では, 高次の空間精度を持つ有限体積法や不連続 Galerkin 法が, 大気大循環モデルや海洋大循環モデルにおいて用いられることがある. 本モデルでは, 伝統的に多くの海洋大循環モデルが用いてきた低次精度の有限体積法を用いる.

と書き換えても良く、保存型有限差分法を適用した場合と等価な離散式が得られる。次の少々節で示すように、水平方向の運動量方程式以外の方程式は、(2.49) に示す方針で鉛直離散化される。一方で、水平方向の運動量方程式のベクトル不変形で書いてあり、移流項はフラックス形式ではないので、ここでは [Arakawa and Lamb \(1977\)](#) に基づく方法で鉛直離散化する。

### 方程式系の鉛直離散化

以下の記述では、変数の定義位置が水平方向には同じであることを仮定し、水平位置を示す格子インデックスは省略する。この仮定はスペクトル法を用いる場合には当てはまるが、C-grid 型の有限体積法を用いる場合には当てはまらない。後者の場合は、セル中心値とセル界面値の間の水平補間が実際は必要である。

セル中心値からセル界面値、あるいはセル界面値からセル中心値を求める計算は、次のようになされる。線形内挿を用いる場合は、

$$\overline{A}^{s,lin} = \frac{\Delta s_{k+p}^L A_{k+p-1/2} + \Delta s_{k+p}^U A_{k+p+1/2}}{\Delta s_{k+p}^L + \Delta s_{k+p}^U} \quad (p = 0, \frac{1}{2}) \quad (2.50)$$

によって行われる。ここで、 $\Delta s_{k+p}^U = s_{k+p-1/2} - s_{k+p}$ 、 $\Delta s_{k+p}^L = s_{k+p} - s_{k+p+1/2}$  であり、 $(\overline{\quad})^s$  は鉛直補間値であることを示す。 $p = 0$  のときはセル界面値からセル中心値への線形補間を表す一方、 $p = 1$  のときはセル中心値からセル界面値への線形補間を表し、前者の場合は単なる算術平均となる。

鉛直レベル  $s_{k+p}$  における鉛直微分値は、

$$\delta_s[A] = \frac{A_{k+p-1/2} - A_{k+p+1/2}}{s_{k+p-1/2} - s_{k+p+1/2}} \quad (p = 0, \frac{1}{2}) \quad (2.51)$$

によって近似される。 $p = 0$  (セル中心で微分値を評価) の場合は空間 2 次精度が保証されるが、 $p = 1/2$  (セル界面で微分値を評価) の場合は一般には空間 1 次精度である。

次に、水平方向の運動量方程式の鉛直移流項は [Arakawa and Lamb \(1977\)](#) に基づいて鉛直離散化を行い、それ以外は (2.49) に例を示した有限体積法に基づいて鉛直離散化を行うと、

水平方向の運動量方程式:

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} = - \left( \overline{\left( \frac{\omega}{e_3} \delta_s[u] \right)}_k^{s,lin} \right) + \left[ \frac{A^{vm}}{e_3} \delta_s[u] \right]_{k+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + (\overline{F'_U})_k, \quad (2.52a)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} = - \left( \frac{\omega}{e_3} \delta_s[v] \right)_k^{s,lin} + \left[ \frac{A^{vm}}{e_3} \delta[s] \right]_{k+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + (\overline{F'_V})_k, \quad (2.52b)$$

トレーサー ( $T = \Theta, S$ ) に対する方程式:

$$\frac{\partial [(e_3)_k \bar{T}_k]}{\partial t} = - \frac{1}{\Delta s_k} \left[ \omega \bar{T}^{s,QUICK} - \frac{A^{vT}}{e_3} \delta_s[T] \right]_{k+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + (e_3)_k (\overline{F'_T})_k \quad (2.52c)$$

$p_h$  の診断方程式:

$$\frac{[p_h]_{k+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta s_k} = - (e_3)_k \frac{(\overline{\rho'})_k}{\rho_0} g \quad (2.52d)$$

$\omega_h$  の診断方程式:

$$\frac{[\omega]_{k+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta s_k} = - (e_3)_k (\overline{D})_k - \varepsilon_2 \frac{\partial (e_3)_k}{\partial t} \quad (2.52e)$$

を得る. ここで,  $F'_U, F'_V, F'_T$  は鉛直移流項と鉛直粘性項以外の寄与を表す. 各項の鉛直離散化の特徴や詳細を以下に記述する.

水平運動量の鉛直移流項のセル平均値は, 各セルの上下の界面で  $\omega_{k+\frac{1}{2}} (\delta_s[u])_{k+\frac{1}{2}}$  を計算し, その後セル中心へ線形補間することで求められる. このように鉛直移流項を評価する場合には, 摩擦や強制がない場合には系の水平方向の運動エネルギーの合計が保存される (Arakawa and Lamb 1977) という利点があるが, 空間精度の観点では一般には (鉛直格子セルが不等間隔の場合) 1 次精度である.

鉛直粘性フラックス (および鉛直拡散フラックス) は,

$$\left( \frac{A^{vm}}{e_3} \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{k+\frac{1}{2}} = \frac{A^{vm}_{k+\frac{1}{2}}}{e_{3,k+\frac{1}{2}}} (\delta_s[u])_{k+\frac{1}{2}}.$$

と近似する. 前述したように  $\delta_s[u]_{k+\frac{1}{2}}$  の空間精度は一般には 1 次精度しかないが, 鉛直粘性項を陰的に時間積分するときの係数行列が三重対角行列となるために, 陰的な時間積分に伴う計算コストが小さい. ステンシルを上下に 1 点ずつ増やせば, 鉛直粘性フラックスを空間 2 次精度で評価することも可能であるが, 陰的な時間積分に伴う計算コストを増やすため, ここでは (2.3.2) の方法を用いる.

トレーサーの鉛直移流フラックスの評価には, Quadratic Upstream Interpolation for Convective Knimeatics (QUICK スキーム) (Leonard 1979) を用いる. この方法では, 風上方向に寄った 3 つの近隣セルの値から二次関数を構築することによって, セル界面でのトレーサの値が,

$$\bar{T}_{k+\frac{1}{2}}^{s,QUICK} = \bar{T}_k^{s,lin} - \frac{\Delta s_k \Delta s_{k+1}}{4} C_{k+\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

と計算される。ここで、

$$C_{k+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\Delta s_{k+1} (\delta_s [\delta_s [T]])_{k+1}}{2\overline{\Delta s}_{k+1}^{s,lin}} \quad (\equiv C_{m,k+\frac{1}{2}}) & (\omega_{k+\frac{1}{2}} > 0) \\ \frac{\Delta s_k (\delta_s [\delta_s [T]])_k}{2\overline{\Delta s}_k^{s,lin}} \quad (\equiv C_{p,k+\frac{1}{2}}) & (\omega_{k+\frac{1}{2}} < 0) \end{cases}$$

である。簡単な場合として、もし格子セルの幅が等間隔であれば、 $\omega_{k+1/2} < 0$  のときに、(2.53) は、

$$\overline{T}_{k+\frac{1}{2}}^{s,QUICK} = \frac{6T_k + 3T_{k+1} - T_{k-1}}{8}$$

となる。最終的な鉛直移流フラックスの表現としては、以下のように流れの向きの場合分けが陽に現れない形式で書くことができる。

$$\begin{aligned} (\omega \overline{T}^{s,QUICK})_{k+\frac{1}{2}} &= \omega_{k+\frac{1}{2}} \left[ \overline{T}_{k+\frac{1}{2}}^{s,lin} - \frac{\Delta s_{k+1} \Delta s_k}{8} (C_m + C_p)_{k+\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \left| \omega_{k+\frac{1}{2}} \right| \frac{\Delta s_{k+1} \Delta s_k}{8} (C_m - C_p)_{k+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

QUICK スキームの精度は、セル界面への補間に二次関数を用いるので、セル平均値と点値の間の変換が考慮されるならば 3 次精度を有する。しかし、今の場合には、他の項の鉛直離散表現との兼ね合いから、鉛直移流項の離散化の精度は高々 2 次精度であれば良いので、(2.53) においてもセル平均値と点値を区別しないことにする<sup>\*6</sup>。

鉛直レベル  $k+1/2$  での静水圧は、(2.52d) を最上層から  $k$  層まで順番に足すことによって、

$$(p_h)_{k+\frac{1}{2}} = \sum_{k'=1}^k \left[ \frac{\overline{\rho}_{k'}}{\rho_0} g (e_3)_{k'} (e_3)_{k'} \Delta s_{k'} \right] \quad (2.55)$$

と求められる。ここで、定義により海面で  $p_h$  はゼロであることを適用した。一方、鉛直レベル  $k-1/2$  での鉛直速度は、(2.52e) を最下層から  $k$  層まで順番に和を取ることによって、

$$(\omega)_{k-\frac{1}{2}} = \sum_{k'=k}^{K_b} \left[ \left( (\overline{D})_{k'} - \varepsilon_1 \frac{\partial (e_3)_{k'}}{\partial t} \right) (e_3)_{k'} \Delta s_{k'} \right] \quad (2.56)$$

と計算される。ここで、海底面の法線方向の速度成分はゼロである条件 ( $\omega_{K_b} = 0$ ) を適用した。

<sup>\*6</sup>2 次精度の誤差の収束性が担保されれば良いという観点では、 $\omega_{k+1/2} \overline{T}_k^{lin,s}$  もまた 2 次精度である。しかし、このような中心フラックスは、十分に解像できない分布を移流させるときに、風上系のフラックスと比べると移流の表現が著しく悪く、振動的な解を得る。そのため、ここでは QUICK スキームを用いる。

## 2.4 パラメータの設定例

海洋モデルのパラメータ設定の例として、リスト2.1に、[河合佑太 \(2018\)](#)で行なった海惑星の気候実験における設定を示す。なお、海洋海氷モデルに入力する設定ファイルの中で、海洋モデルと関係する部分のみを以下では示している。

リスト 2.1: 海洋モデルの設定ファイルのテンプレート。ただし、`#var#`のように書かれた部分は実験ケース等ごとに適切な値が入る。

```
&DOGCM_nml
  OCN_do = .true.,
  SICE_do = .true.,
  exp_name = '#DOGCM_nml_EXP_NAME#',
/
!= 各過程で使用するスキームの選択 -----
&GovernEq_nml
  DynEqTypeName = 'HydroBoussinesq', ! 力学
  EOSTypeName   = 'EOS_JM95',       ! 海水の状態方程式
  LPhysNames    = 'LMixMOM, LMixTRC, RediGM', ! 水平方向の物理
  VPhysNames    = 'VMixMOM, VMixTRC, Convect', ! 鉛直方向の物理
  SolverTypeName = 'HSPM-VFVM',     ! 空間スキーム
/
!= 境界条件の設定 -----
&BoundaryCondition_nml
  KinBCSurface = 'Rigid',
  DynBCSurface = 'SpecStress',
  DynBCBottom  = 'NoSlip',
  ThermBCSurface = '#BoundaryCondition_nml_ThermBCSurface#',
    ! 結合 run では PrescFlux,
    ! 海洋海氷モデル単体 run では PrescFlux_Han1984
  ThermBCBottom = 'Adiabat',
  SaltBCSurface = 'PrescFlux',
  SaltBCBottom  = 'Adiabat',
/
!= 物理定数の設定 -----
&Constants_nml
  RPlanet = 6.37d6,
  Omega   = 7.29d-5,
  Grav    = 9.8d0,
  hViscCoef = 3d5,
  vViscCoef = 1d-3,
  hDiffCoef = 0d3,
  vDiffCoef = 3d-5,
  albedoOcean = 0d0,
  LatentHeat  = 2.4253d6,
  RefSalt     = 35d0,
/
!= 格子の設定 -----
&Grid_nml
  IM = 1, ! 経度格子点数.
  JM = 64, ! 緯度格子点数.
```

```

    KM = 60, ! 鉛直層数.
/
&Grid_Spm_nml
  NM = 63, ! 最大全波数.
/
!= 周期的同期結合と関連した処理や実験ケースの設定 -----
&Exp_APECoupleClimate_nml
  RunCycle          = #Exp_APECPLClim_nml_RunCycle#,
  RunTypeName       = '#Exp_APECPLClim_nml_RunTypeName#',
    ! 結合 run では Coupled,
    ! 海洋海氷モデル単体 run では Standalone
  SfcBCDataDir      = '#Exp_APECPLClim_nml_SfcBCDataDir#',
  SfcBCMeanInitTime = #Exp_APECPLClim_nml_SfcBCMeanIniTime#,
  SfcBCMeanEndTime  = #Exp_APECPLClim_nml_SfcBCMeanEndTime#,
  RestartDataDir    = '#Exp_APECPLClim_nml_RestartDataDir#',
  RestartMeanInitTime = #Exp_APECPLClim_nml_RestartMeanInitTime#,
  RestartMeanEndTime = #Exp_APECPLClim_nml_RestartMeanEndTime#,
  OcnInitSalt       = 35d0, [psu]
/
!= 鉛直混合の設定 -----
&SGSPhys_VMixing_nml
  VMixCoef_scheme_name = 'Simple'
/
!= 水平混合の設定 -----
&RediGM_nml ! Redi, GM スキーム
  DiffCoefRedi      = 800.0,
  DiffCoefGM        = 800.0,
  InteriorTaperingName = 'DM95'
  SlopeMax          = 4d-3,
  Sd                = 1d-3,
  PBLTaperingName   = 'LDD97'
/
&LPhys_DIFF_nml ! 水平超粘性
  NumDiffOrdH       = 4, ! 超粘性の次数.
  NumDiffTimeVal    = 50.0, ! 最大波数に対する e-folding time
  NumDiffTimeUnit   = 'day', ! e-folding time の単位
/
!= 時間スキーム・時間管理の設定 -----
&TemporalInteg_nml
  cal_type          = 'noleap',
  barocTimeIntModeName = 'TimeIntMode_LFAM3', ! 時間スキーム
  DelTimeVal        = #TemporalInteg_nml_DelTimeHour#,
    ! 基本的に, 結合runでは 4 h, 海洋海氷モデル単体runでは 12 h
  DelTimeUnit       = 'hour',
  ReStartTimeVal    = #TemporalInteg_nml_RestartTimeVal#,
  ReStartTimeUnit   = 'day',
  InitYear          = #TemporalInteg_nml_InitYear#, InitMonth=1, InitDay=1,
    InitHour=0,
  InitMin           = 0, EndYear =#TemporalInteg_nml_EndYear#, EndMonth =1,
  EndDay            = #TemporalInteg_nml_EndDay#, EndHour=0, EndMin=0,
/
!* セミ・インプリシットスキームに含まれる係数の設定 -----
&SemiImplicitScheme_nml

```

```

VDiffTermACoef      = 0.5d0,
CoriolisTermACoef   = 0.5d0,
/
!= ファイル関連の設定 -----
!* ヒストリデータ出力の全体設定
&gtool_historyauto_nml
  IntValue           = #gtool_historyauto_nml_IntValue#, ! 出力間隔の
    数値
  IntUnit            = 'day', ! 出力間隔の
    単位
  OriginValue        = #gtool_historyauto_nml_OriginValue#,
  OriginUnit         = 'day',
  TerminusValue      = #gtool_historyauto_nml_TerminusValue#,
  TerminusUnit       = 'day',
  FilePrefix         = '',
/
!* リスタートデータの入力・出力の設定
&OGCM_IO_Restart_nml
  OutputFileName     = '#0cnRestartFile_nml_OutputFileName#',
  InputFileName      = '#0cnRestartFile_nml_InputFileName#',
  IntValue           = #0cnRestartFile_nml_IntValue#,
  IntUnit            = 'day'
/
!* ヒストリデータ出力の個別設定
&gtool_historyauto_nml
  Name = 'U, V, OMG, PTemp, Salt, H, HydPres, ConvIndex',
  Precision='float'
/
&gtool_historyauto_nml
  Name = 'SfcPres, SfcHFlx0, SfcHFlx_ns, SfcHFlx_sr, DSfcHFlxDTs,
    FreshWtFlxS',
  Precision='float',
  TimeAverage = .true.
/
&gtool_historyauto_nml
  Name = 'a2o_WindStressX, a2o_WindStressY, a2o_SenHFlx,
    a2o_LatHFlx, a2o_LDwRF1x, a2o_LUwRF1x, a2o_SDwRF1x,
    a2o_SUwRF1x, a2o_DSfcHFlxDTs, a2o_RainFall, a2o_SnowFall,
    a2o_Evap, a2s_Evap, a2o_SfcHFlxMod',
  Precision = 'double',
  TimeAverage = .true.
/

```

## 第3章 海氷モデル

本節では, 本研究で用いた海氷モデルの詳細を記述する.

### 3.1 モデルの基礎

#### 3.1.1 基礎方程式系

海氷モデルの基礎方程式系は, 海洋モデルと同様に水平直交曲線座標系において,

$$\frac{\partial h_S}{\partial t} = -\frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial(e_2 u^* h_S)}{\partial i} + \frac{\partial(e_1 v^* h_S)}{\partial j} \right] + \mathcal{S}(h_S), \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial h_I}{\partial t} = -\frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial(e_2 u^* h_I)}{\partial i} + \frac{\partial(e_1 v^* h_I)}{\partial j} \right] + \mathcal{S}(h_I), \quad (3.1b)$$

$$\rho_I \frac{\partial E_I}{\partial t} = -\frac{v^*}{a} \frac{\partial E_I}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{\text{sice}} \frac{\partial T_I}{\partial z} + I \right). \quad (3.1c)$$

と書かれる. ここで,  $h_S$  は雪層の厚さ,  $h_I$  は氷層の厚さ,  $E_I$  は氷層のエンタルピー,  $T_I$  は氷層内の温度,  $\rho_I$  は氷の密度,  $u^*, v^*$  は海氷の東西・南北輸送速度,  $k_{\text{sice}}(z)$  は海氷の熱伝導係数,  $I(z)$  は海氷内へ貫入する短波放射フラックスである. また,  $\mathcal{S}(h_S), \mathcal{S}(h_I)$  はそれぞれ, 雪層や氷層の生成融解量を表す項である.

海氷表面において, 大気海氷間のエネルギー収支式

$$F_s^\uparrow - F_{\text{sice, top}}^\uparrow = \begin{cases} 0 & (T_s < T_f) \\ -M_{\text{top}} & (T_s = T_f) \end{cases} \quad (3.2)$$

が満たされなければならない. ここで,  $F_s^\uparrow$  は,

$$F_s^\uparrow = -(1 - \alpha_i) F_R^\downarrow + I^\downarrow - F_L^\downarrow + \epsilon_L \sigma T_s^4 + F_{SH}^\uparrow + F_{LH}^\uparrow$$

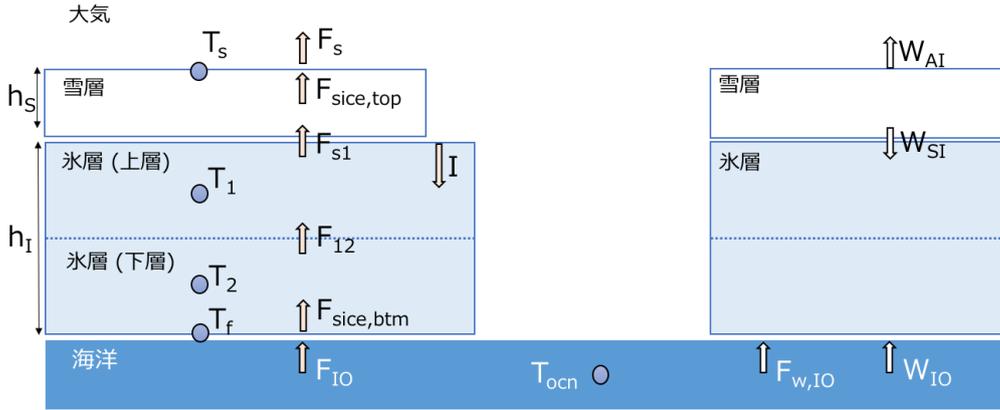


図 3.1: 海氷モデルの模式図.

であり,  $F_R^\downarrow, I^\downarrow, F_L^\downarrow, F_{SH}^\uparrow, F_{LH}^\uparrow, F_{sice,top}^\uparrow$  は, それぞれ下向き短波放射フラックス, 海氷内へ貫入する短波放射フラックス, 下向き長波放射フラックス, 顕熱フラックス, 潜熱フラックス, 海氷表面における海氷内の熱伝導フラックスを表す. また,  $M_{top}$  は海氷表面における (単位面積・単位時間あたりの) 海氷の融解エネルギーである.

海氷底面において, 海氷の温度は常に氷点  $T_f$  である. また, そこでは, 海氷海洋間のエネルギー収支式

$$-F_{sice,btm}^\uparrow + F_{IO} = M_{btm} \quad (3.3)$$

が満たされなければならない. ここで,  $F_{sice,btm}^\uparrow, F_{IO}$  はそれぞれ, 海氷底面での海氷内の熱伝導フラックス, 海洋からの熱フラックスである. そして,  $M_{top}$  は海氷底面における (単位面積・単位時間あたりの) 海氷の融解エネルギーである.

### 3.1.2 熱力学過程

海氷モデルの熱力学過程は, [Winton \(2000\)](#) によって提案された三層の海氷熱力学モデルに基づく (図 3.1). 氷層の上下層 (それぞれ添字を 1, 2 とする) に対する海氷のエンタルピーの方程式は,

$$E_{I,1} = C_i(T_{I,1} + \mu S_I) - L_i(1 + \mu S_I/T_{I,1}), \quad (3.4a)$$

$$E_{I,2} = C_i(T_{I,2} + \mu S_I) - L_i \quad (3.4b)$$

によって与えられる. ここで,  $S_I$  は海氷の塩分,  $C_i$  は内部融解を除外した氷の比熱,  $L_i$  は氷の融解に伴う潜熱,  $\mu$  は氷点の塩分依存性に伴う定数である. 氷層上層・下層の温度  $T_{I,1}, T_{I,2}$  は, (3.4) から診断的に計算される. 一方で, 雪層の単位質量あ

たりのエンタルピーは、常に

$$E_S = -L_i$$

とし、雪層内部の温度は考慮されない。

一タイムステップ内で熱力学過程は、大まかには、以下のステップに分けられる。

1. 鉛直熱拡散項の陰的な時間積分
2. 海氷の融解量, 生成量の計算
3. 海氷内部の厚さの調整

鉛直熱拡散項の表現は鉛直離散化や時間離散化の方法と深く関係するので、その詳細は第 3.2.1 節および第 3.3.2 節で記述する。以下では、残りの二つのステップについて記述する。

### 海氷の融解・生成量の計算

鉛直熱拡散項を評価することで得られた海氷上下端での鉛直熱伝導フラックスを用いて、海氷上下端での融解生成量を計算する。

海氷上端における単位面積、単位時間あたりの融解エネルギーは、

$$M_{\text{top}} = F_{\text{sice,top}}^{\uparrow}(T_s^*, T_{I,1}^*) - F_s^{\uparrow}(T_s^*)$$

と計算される。ここで、 $()^*$  は、鉛直熱拡散項を陰的に一タイムステップ時間積分することによって得られた温度であることを示す。 $T_s^*$  が雪の融点 (雪が存在する場合) あるいは海氷の融点 (雪が存在しない場合) よりも低くければ  $M_{\text{top}} = 0$  であるが、等しい場合には  $M_{\text{top}} > 0$  であり、海氷上端で融解が起こる。このとき、 $\Delta t$  間の単位面積あたりの融解エネルギーは  $M_{\text{top}} \Delta t$  であり、これがゼロになるまで海氷の最上層から順番に融解させる。この際、降雪や昇華による海氷上端での質量変化も考慮する。

海氷下端における単位面積・単位時間あたりの融解エネルギーは、

$$M_{\text{btm}} = F_{IO} - F_{\text{sice,btm}}^{\uparrow}(T_{I,2}^*)$$

と計算される。海洋からの熱フラックスは、

$$F_{IO} = \rho_W C_{po} c_t (T_{\text{ocn}} - T_f)$$

の形式で与える. ここで,  $T_{\text{ocn}}$  は海洋モデルの第一層目の温度,  $\rho_W$  は海水の密度,  $C_{po}$  は海水の比熱,  $c_t$  はバルク輸送係数である.  $M_{\text{btm}} < 0$  の場合は下端で海氷が生成される. このとき,  $\Delta t$  間の下端での海氷の生成量は,

$$\Delta h_{I,2} = M_{\text{btm}} \Delta t / [\rho_I E_{I,2}(T_f, S_i)]$$

によって与えられる. 一方,  $M_{\text{btm}} > 0$  の場合は, 海氷下端で融解が起こる. 海氷上端での融解と同様に,  $M_b \Delta t$  がゼロになるまで海氷の最下層から順番に融解させる.

### 海氷内部の厚さの調整

海面よりも低い位置にある雪層を氷層上層へと変換する. 雪層と氷層上層の厚さの変化は, アルキメデスの原理から, それぞれ,

$$\begin{aligned} \Delta h_S &= -\max \left[ \left( h_{S,\text{old}} - \frac{\rho_W - \rho_I}{\rho_S} h_{I,\text{old}} \right) \frac{\rho_I}{\rho_W}, 0 \right], \\ \Delta h_I &= \max \left[ \left( h_{S,\text{old}} - \frac{\rho_W - \rho_I}{\rho_S} h_{I,\text{old}} \right) \frac{\rho_S}{\rho_W}, 0 \right] \end{aligned}$$

と計算される<sup>\*1</sup>. ここで,  $\rho_W$  は海水の密度,  $h_{I,\text{old}}, h_{S,\text{old}}$  である. 変換後の氷層上層のエンタルピーや温度は, 氷層の等分化で行われる方法と同様の方法で決められる (以下参照).

熱力学過程の最後に, 氷層の上下層の厚さを等しくする. 上下層の間で質量を移動させるときに, 質量を与える側の層の温度は変えないが, 質量をもらう側の層の温度は, もとの各層が占める割合でエンタルピーを平均することで決められる. 例えば, 上層の方が薄い場合には, 新しい上層を構成する元の上下層の割合をそれぞれ  $f_1, 1 - f_1$  とすると, 上層の新しいエンタルピーは,

$$E_{I,1}(T_{I,1}^{\text{new}}) = (1 - f_1) E_{I,1}(T_{I,1}^{\text{old}}) + f_1 E_{I,2}(T_{I,2}^{\text{old}})$$

と書くことができる. これを解けば, 上層の新しい温度は,

$$T_{I,1}^{\text{new}} = \frac{T^* - [(T^*)^2 + 4\mu S_I L_i / C_i]^{1/2}}{2}$$

<sup>\*1</sup>海面よりも低い位置にある雪層の厚さを  $\Delta h_S$ , その部分が氷層に変換されたときの氷層の厚さの増加を  $\Delta h_I$  とすると, アルキメデスの原理および質量保存則から,

$$\rho_W (h_{I,\text{old}} + \Delta h_I) = \rho_S h_{S,\text{old}} + \rho_I h_{I,\text{old}}, \quad \rho_S \Delta h_S = \rho_I \Delta h_I$$

が満たされなければならない. これらの式から,  $\Delta h_S, \Delta h_I$  が決定される.

と与えられる。ここで,

$$\tilde{T} = f_1 \left( T_{I,1}^{\text{old}} - \frac{L_i \mu S_I}{C_i T_{I,1}^{\text{old}}} \right) + (1 - f_1) T_{I,2}^{\text{old}}$$

である。一方で, 下層の方が薄い場合には, 新しい下層を構成する元の上下層の割合をそれぞれ  $f_1, 1 - f_1$  とすると, 下層の新しい温度は, 同様に考えることで,

$$T_{I,2}^{\text{new}} = \tilde{T}$$

によって与えられることが分かる。ただし,  $T_{I,2}^{\text{new}}$  は氷の融点を超える場合があり得る。この場合には, 氷の融点を超過した分のエネルギーを上層に渡すことで下層の氷の温度を調整する。

### 3.1.3 力学過程

本モデルでは現状, 海氷の力学は陽には取り扱わない。しかし, 海氷の水平輸送を全く考慮しない場合は, 海氷場がしばしば平衡状態に落ち着かないため, 海氷の水平速度を, 海氷厚さの水平拡散の形式で,

$$u^* = \frac{K_h^s}{e_1 m_{\text{sice}}} \frac{\partial m_{\text{sice}}}{\partial i}, \quad v^* = \frac{K_h^s}{e_2 m_{\text{sice}}} \frac{\partial m_{\text{sice}}}{\partial j} \quad (3.5)$$

とパラメータ化する。ここで,  $K_h^s$  は水平拡散係数,  $m_{\text{sice}} = \rho_S h_S + \rho_I h_I$  は海氷の単位面積あたりの質量である。

## 3.2 空間離散化

### 3.2.1 鉛直離散化

(3.1) に含まれる鉛直熱拡散項は, 有限体積法を用いて,

$$\frac{\rho_I h_I}{2} \left( \frac{dE_{I,1}}{dt} \right)_{\text{thermodyn}} = K_{s1}(T_s - T_{I,1}) - K_{12}(T_{I,1} - T_{I,2}) + I, \quad (3.6a)$$

$$\frac{\rho_I h_I}{2} \left( \frac{dE_{I,2}}{dt} \right)_{\text{thermodyn}} = K_{12}(T_{I,1} - T_{I,2}) - 2K_{12}(T_{I,2} - T_f) \quad (3.6b)$$

と鉛直離散化する。ここで、上式に含まれる  $K_{s1}, K_{12}$  は、

$$K_{s1} = \frac{4k_I k_S}{k_S h_I + 4k_I h_S}, \quad K_{12} = \frac{2k_I}{h_I}$$

によって与えられ、 $k_S$  は雪の熱伝導率、 $k_I$  は氷の熱伝導率である。  $K_{s1}$  の表現は、氷層上端での熱伝導フラックスと、雪層下端での熱伝導フラックスが等しいと仮定することによって決定される\*2。

### 3.2.2 水平離散化

海氷の方程式系における力学項 (現状は水平移流項のみ) の水平離散化に、有限体積法を適用する。  $q = h_S, h_I, \rho_I h_I E_{I,1}/2, \rho_I h_I E_{I,2}/2$  とすると、

$$\left( \frac{dq}{dt} \right)_{\text{dyn}} = - \left[ \frac{\delta_i (e_2 u^* \bar{q}^{i,UP1}) + \delta_j (e_2 v^* \bar{q}^{j,UP1})}{e_1 e_2} \right]_{i,j} \quad (3.7a)$$

と書かれる。ここで、 $\bar{q}^{i,UP1}, \bar{q}^{j,UP1}$  は、1次精度の風上フラックスを与える補間を表し、例えば、前者は、

$$\bar{q}^{i,UP1} = \frac{q_{i,j} + q_{i+1,j}}{2} + |u_{i+\frac{1}{2},j}^*| (q_{i,j} - q_{i+1,j})$$

と与えられる。海氷の水平速度のパラメタリゼーション (3.5) は、海水厚さ (厳密には質量) の式に対して水平拡散と等価となるように、

$$(u^*)_{i+\frac{1}{2},j} = K_h^s \left( \frac{\delta_i [m_{\text{seice}}]}{e_1 \tilde{m}_{\text{seice}}} \right)_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (v^*)_{i,j+\frac{1}{2}} = K_h^s \left( \frac{\delta_j [m_{\text{seice}}]}{e_2 \tilde{m}_{\text{seice}}} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

によって与えられる。ここで、 $\tilde{m}_{\text{seice}}$  は、例えば  $i$  方向に対して、

$$(\tilde{m}_{\text{seice}})_{i+\frac{1}{2},j} = \max [(\tilde{m}_{\text{seice}})_{i,j}, (\tilde{m}_{\text{seice}})_{i+1,j}]$$

のように定義される。

\*2氷層上端での熱伝導フラックスと、雪層下端での熱伝導フラックスが等しい条件は、雪層と氷層の境界の温度を  $T^*$  とすると、

$$K_s \frac{T_s - T^*}{h_S} = K_i \frac{T^* - T_{I,1}}{h_i/4}$$

と書かれる。この式から、 $T^* = (K_s h_i T_s + 4K_i h_S T_{I,1}) / (4K_i h_S + K_s h_i)$  が得られる。したがって、氷層上層の上端から雪層を通過する熱伝導フラックスの表現として、

$$K_s \frac{T_s - T^*}{h_s} = \frac{4K_i K_s}{K_s h_I + 4K_i h_S} (T_s - T_{I,1})$$

が得られ、右辺の因子を  $K_{s1}$  と置いていることが分かる。

## 3.3 時間離散化

### 3.3.1 時間スキームの概要

#### 熱力学過程

鉛直熱拡散項と関係した氷層のエンタルピーの時間変化を、以下の形式で陰的に評価する.

$$\frac{\rho_I h_I}{2} \left( \frac{dE_{I,k}}{dt} \right)_{\text{thermodyn}} = \frac{\rho_I h_I}{2\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{\partial E_{I,k}}{\partial T_{I,k}} \right) \frac{dT_{I,k}}{dt} dt = \mathcal{D}_{\text{vdiff}}^{vT_I}(T_{I,1}^*, T_{I,2}^*, T_s^*)$$

ここで、 $k = 1, 2$  であり、また  $\mathcal{D}_{\text{vdiff}}^{vT_I}(T_I^*)$  は、鉛直離散化した鉛直熱拡散項を表す。この時に、海氷表面での熱収支式を連立することによって、海氷の表面温度  $T_s^*$  も決定される。

次に、上で計算された鉛直熱伝導フラックスから、海氷上端での融解量、海氷下端での生成融解量が、(3.2) と (3.1.2) によって計算される。この過程において、海氷上端の積雪や昇華が考慮される。

最後に、海氷内部の厚さの調整が行われる。このとき、雪層から氷層への変化や氷層の上下層の等分化が行われ、それに伴い氷層の温度も変化する。

#### 力学過程

熱力学過程後の変数の値を用いて、移流項に伴う海水場の時間変化を陽的に評価する。  $q = h_S, h_I, \rho_I h_I E_{I,1}/2, \rho_I h_I E_{I,2}/2$  とすると、

$$\frac{q^{n+1} - q^*}{\Delta t} = \left( \frac{dq}{dt} \right)_{\text{dyn}}(h_S^*, h_I^*, q^*)$$

と書かれる。力学過程において、氷層のエンタルピーの時間発展式は、保存形式であることに注意が必要である。

### 3.3.2 時間スキームの詳細

#### 鉛直熱拡散方程式の時間離散化

海氷の鉛直熱拡散と関係する方程式は、

$$\frac{\rho_I h_I^n}{2} \left( C + \frac{L\mu S_i}{T_{I,1}^* T_{I,1}^n} \right) \frac{T_{I,1}^* - T_{I,1}^n}{\Delta t} = K_{s1}^n (T_s^* - T_{I,1}^*) - K_{12}^n (T_{I,1}^* - T_{I,2}^*) + I, \quad (3.9a)$$

$$\frac{\rho_I h_I^n}{2} C \frac{T_{I,2}^* - T_{I,2}^n}{\Delta t} = K_{12}^n (T_{I,1}^* - T_{I,2}^*) - 2K_{12}^n (T_{I,2}^* - T_f) \quad (3.9b)$$

と時間離散化される<sup>\*3</sup>。また、(3.9)に加えて、時刻 $t^n$ 周りで海面熱フラックスを線形化した、海氷面で融解が起きない場合の熱収支式

$$A + BT_s^* = K_{s1} (T_{I,1}^* - T_s^*) \quad (3.10)$$

を連立させる。ここで、

$$A = F_s(T_s^n) - T_s^n \left( \frac{\partial F_s}{\partial T_s} \right)^n, \quad B = \left( \frac{\partial F_s}{\partial T_s} \right)^n$$

とおいた。後に記述するように、この方程式系で決定される海表面温度が、雪もしくは海氷の融点を超える場合には、(3.10)を連立せずに、海氷面温度を固定した問題に変更する。

Winton (2000)では、以下に示すように、(3.9)を解析的に解くことで、 $T_{I,1}^*$ の表現を陽に導いている。はじめに、(3.9)(b)から、

$$T_{I,2}^* = \frac{2\Delta t K_{12}^n (T_{I,1}^* + 2T_f) + \rho_I h_I C_i T_{I,2}^n}{6\Delta t K_{12}^n + \rho_I h_I C_i} \quad (3.11)$$

が得られる。(3.10)と(3.11)を用いて、(3.9)(a)に現れる $T_s^*$ と $T_{I,2}^*$ を消去すると、二次方程式 $A_1(T_{I,1}^*)^2 + B_1 T_{I,1}^* + C_1 = 0$ が得られ、 $T_{I,1}^*$ は、

$$T_{I,1}^* = -\frac{B_1 + (B_1^2 - 4A_1 C_1)^{1/2}}{2A_1} \quad (3.12)$$

<sup>\*3</sup>(3.9)(a)の左辺括弧内の表現を得るために、

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t^*}^{t^n} \left( C + L_i \frac{\mu S_i}{T_{I,1}^2} \right) \frac{dT_{I,1}}{dt} dt = \left( C + \frac{L\mu S_i}{T_{I,1}^* T_{I,1}^n} \right) \frac{T_{I,1}^* - T_{I,1}^n}{\Delta t}$$

であることが用いられる。

と与えられる。ここで,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\rho_I h_I}{2\Delta t} C_i + K_{12} \frac{4\Delta t K_{12}^n + \rho_I h_I C_i}{6\Delta t K_{12}^n + \rho_I h_I C_i} + \frac{K_{s1}^n B}{K_{s1}^n + B}, \\
 B_1 &= -\frac{\rho_I h_I}{2\Delta t} \left( C_i T_{I,1}^n - \frac{L_i \mu S_I}{T_{I,1}^n} \right) - I \\
 &\quad - K_{12} \frac{4\Delta t K_{12}^n T_f + \rho_i h_i C_i T_{I,2}^n}{6\Delta t K_{12}^n + \rho_i h_i C_i} + \frac{K_{s1}^n A}{K_{s1}^n + B}, \\
 C_1 &= -\frac{\rho_I h_I}{2\Delta t} L_i \mu S_I
 \end{aligned}$$

である。これらの係数の符号を考慮すれば、二次方程式のもう一つの解は正であり、物理的に不適切であることが分かる。以上から、はじめに (3.12) から  $T_{I,1}^*$  が得られれば、(3.11) から  $T_{I,1}^*$ 、(3.10) から  $T_s^*$  が求まる。

もし、(3.12) から得られた  $T_s^*$  が、雪の融点 (雪が存在する場合) あるいは海氷の融点 (雪が存在しない場合) を超えているならば、海氷の表面温度を  $T_s^* = 0$  (雪が存在する場合) あるいは  $T_s^* = -\mu S_i$  (雪が存在しない場合) と固定した問題に変更して、鉛直熱拡散方程式を解き直す。この場合の二次方程式の係数は、

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\rho_I h_I}{2\Delta t} C + K_{12} \frac{4\Delta t K_{12}^n + \rho_I h_I C_i}{6\Delta t K_{12}^n + \rho_I h_I C_i} + K_{s1}^n, \\
 B_1 &= -\frac{\rho_I h_I}{2\Delta t} \left( C_i T_{I,1}^n - \frac{L_i \mu S_I}{T_{I,1}^n} \right) - I \\
 &\quad - K_{12} \frac{4\Delta t K_{12}^n T_f + \rho_I h_I C_i T_{I,2}^n}{6\Delta t K_{12}^n + \rho_I h_I C_i} - K_{s1}^n T_s^*
 \end{aligned}$$

である。ただし、 $C_1$  は変わらない。

ここで陰的に求められた熱伝導フラックスを用いて、海氷上下端での生成融解量が計算される。

### 3.4 パラメータの設定例

海氷モデルのパラメータ設定の例として、リスト?に、河合佑太 (2018) で行なった海惑星の気候実験における設定を示す。なお、海洋海氷モデルに入力する設定ファイルの中で、海氷モデルと関係する部分のみを以下では示している。

リスト 3.1: 海氷モデルの設定ファイルのテンプレート。ただし、#var#のように書かれた部分は実験ケース等ごとに適切な値が入る。

```

&DOGCM_nml
  OCN_do = .true.,
  SICE_do = .true.,
  exp_name = '#DOGCM_nml_EXP_NAME#',
/
!= 格子の設定 -----
&SeaIce_Grid_nml
  IM = 1,
  JM = 64
/
!= 物理定数の設定 -----
&SeaIce_Admin_Constants_nml
  AlbedoOcean = 0d0,
  EmissivOcean = 1d0,
  EmissivSnow = 1d0,
  EmissivIce = 1d0,
  IceMaskMin = 0.99999999999999999999999999999999d0,
  IceThickMin = 1d-2,
  SIceHDiffCoef = #SeaIce_Admin_Constants_nml_SIceHDiffCoef#d0,
                  ! 海氷厚さの水平拡散係数
/
!= 表面アルベドの計算方法の設定
-----
&SeaIce_Boundary_SfcAlbedo_nml
  SIceSfcAlbedoName = 'I07SGS',
  AlbedoSnowWarm = 0d0,
  AlbedoSnowCold = 0.5d0,
  TLVTempAlbedoSnow = -10d0,
  SFCALBEDO_I07SGS_FlagIceAreaFrac = .true.,
                                      ! 表面アルベドの工夫を適用するかのフラグ
/
!= ファイル関連の設定 -----
!* ヒストリデータ出力の全体設定
&SeaIce_IO_History_nml
  IntValue = #gtool_historyauto_nml_IntValue#, ! 出力間隔の
  数値
  IntUnit = 'day', ! 出力間隔の
  単位
  FilePrefix = '',
/
!* リスタートデータの入力・出力の設定
&SeaIce_IO_Restart_nml
  OutputFileName = '#SIceRestartFile_nml_OutputFileName#',
  InputFileName = '#SIceRestartFile_nml_InputFileName#',
  IntValue = #SIceRestartFile_nml_IntValue#,
  IntUnit = 'day'
/
!* ヒストリデータ出力の個別設定
&SeaIce_IO_History_nml
  Name = 'SIceEn, SIceV, SIceCon, SnowThick, IceThick, SIceTemp,
  SIceSfcTemp, SfcAlbedoAI',
/
&SeaIce_IO_History_nml

```

```
Name = 'Wice, SfcHFlxAI, DelSfcHFlxAI, SfcHFlxAIO_ns,  
        SfcHFlxAIO_sr, DSfcHFlxAIDTs, SfcHFlxAO, DSfcHFlxAODTs',  
TimeAverage = .true.
```

## 参考文献

- Arakawa, A. and V. R. Lamb, 1977: Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model.
- Danabasoglu, G. and J. C. Mc Williams, 1995: Sensitivity of the global ocean circulation to parameterizations of mesoscale tracer transports. *Journal of Climate*, **8**, 2967–2987.
- Dukowicz, J. K. and R. D. Smith, 1994: Implicit free-surface method for the bryan-cox-semtner ocean model. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, **99**, 7991–8014.
- Gent, P. R. and J. C. McWilliams, 1990: Isopycnal mixing in ocean circulation models. *Journal of Physical Oceanography*, **20**, 150–155.
- Griffies, S. M., 1998: The Gent–McWilliams Skew Flux. *Journal of Physical Oceanography*, **28**, 831–841.
- Large, W. G., G. Danabasoglu, S. C. Doney, and J. C. McWilliams, 1997: Sensitivity to surface forcing and boundary layer mixing in a global ocean model: Annual-mean climatology. *Journal of Physical Oceanography*, **27**, 2418–2447.
- Large, W. G., J. C. McWilliams, and S. C. Doney, 1994: Oceanic vertical mixing: A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization. *Reviews of Geophysics*, **32**, 363–403.
- Leonard, B. P., 1979: A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **19**, 59–98.
- Redi, M. H., 1982: Oceanic isopycnal mixing by coordinate rotation. *Journal of Physical Oceanography*, **12**, 1154–1158.
- Shchepetkin, A. F. and J. C. McWilliams, 2005: The regional oceanic modeling system (roms): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model. *Ocean Modelling*, **9**, 347–404.

Winton, M., 2000: A reformulated three-layer sea ice model. *Journal of atmospheric and oceanic technology*, **17**, 525–531.

河合佑太, 2018: 大気海洋海水結合モデルの開発と海惑星気候に対する海洋大循環の影響に関する数値実験. 神戸大学博士論文, [https://www.gfd-dennou.org/GFD\\_Dennou\\_Club/dc-arch/prepri/2018/kobe-u/ykawai\\_Dthesis/paper/src/dthesis\\_ja\\_main\\_latest.pdf](https://www.gfd-dennou.org/GFD_Dennou_Club/dc-arch/prepri/2018/kobe-u/ykawai_Dthesis/paper/src/dthesis_ja_main_latest.pdf).