磁場と自転がある場合の恒星振動
— Ap 星の振動 —

高田 将郎

東京大学大学院理学系研究科天文学教室

1993 年 7 月 23 日 (金)

CONTENTS

- 高速振動する Ap 星 1
- 取り扱い 4
- 理論的予想 14
- Asteroseismology of roAp 16

高速振動する Ap 星

観測事実

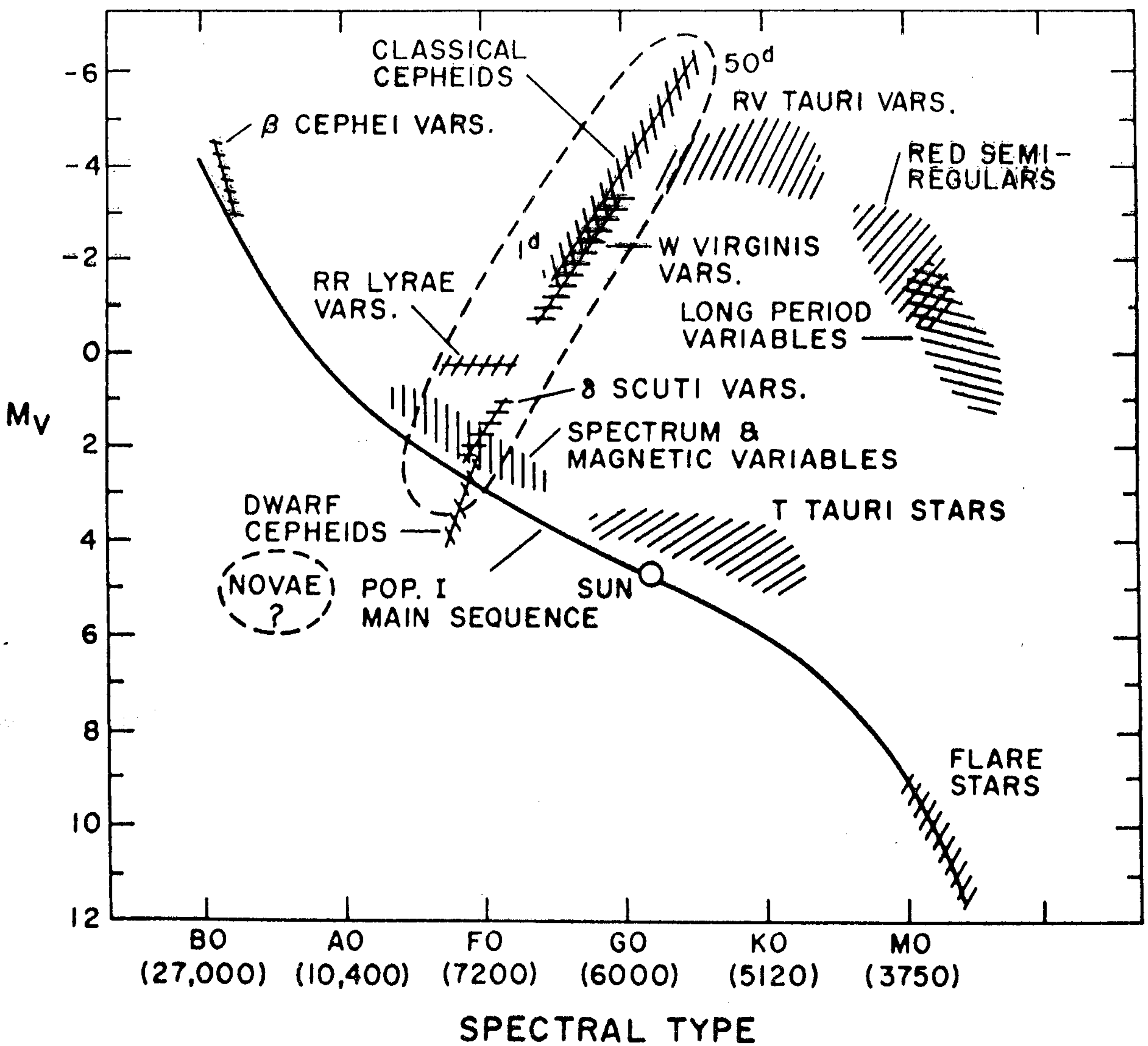
Ap 星

- 主系列あるいはそれより少し進化した段階の A 型星
- 希土類元素 (Sr,Cr,Eu など) のラインが強い
- 強い磁場 (数百〜数千 gauss) を持ち正弦的な時間変化を示す

振動する Ap 星

1978 年 Kurtz が発見。現在までに 14 個見つかっている。

- 短周期 (4〜15 分)，小振幅 (数 mmag)
  楯座δ星 (δ Sct) の典型的な振動周期は 2 時間
- 振動振幅が磁場と同位相で正弦的に変化
- パワー・スペクトルの微細構造


CLASSICAL CEPHEIDS
50^d
RV TAURI VARS.
β CEPHEI VARS.
RED SEMI-REGULARS
1^d
W VIRGINIS VARS.
RR LYRAE VARS.
LONG PERIOD VARIABLES
δ SCUTI VARS.
SPECTRUM & MAGNETIC VARIABLES
T TAURI STARS
DWARF CEPHEIDS
NOVAE ?
POP. I MAIN SEQUENCE
SUN
FLARE STARS
M_V
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
BO (27,000)
AO (10,400)
FO (7200)
GO (6000)
KO (5120)
MO (3750)
SPECTRAL TYPE

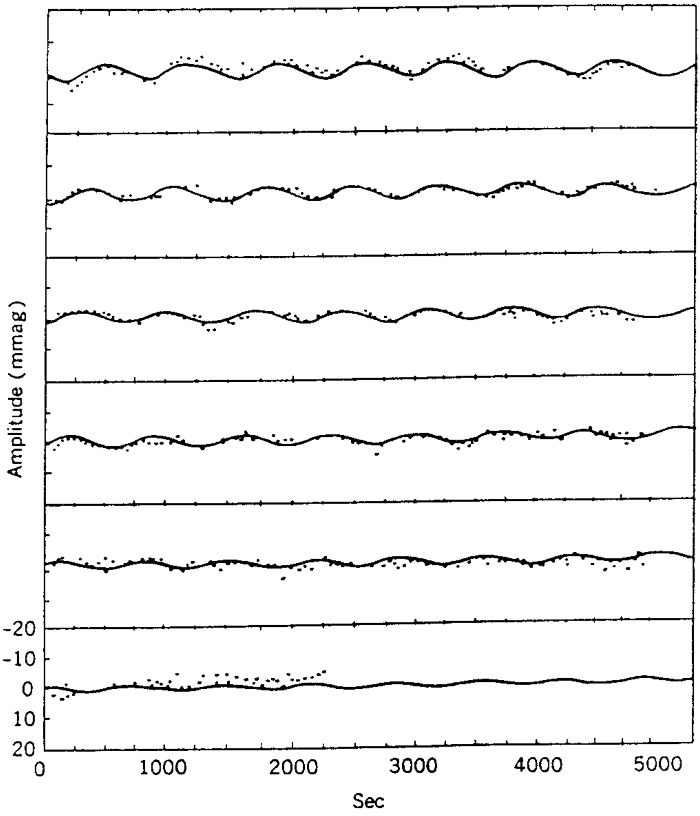


Fig. 9.1 The light curve of HD 83368 (dots). The abscissa is 5,000 s long and the ordinates 40 mmag high with tick marks at 10 mmag intervals. The continuous light curves have been folded into 5,000 s consecutive sections which should be read from left to right, top to bottom, just like lines of print (after Kurtz, 1982).

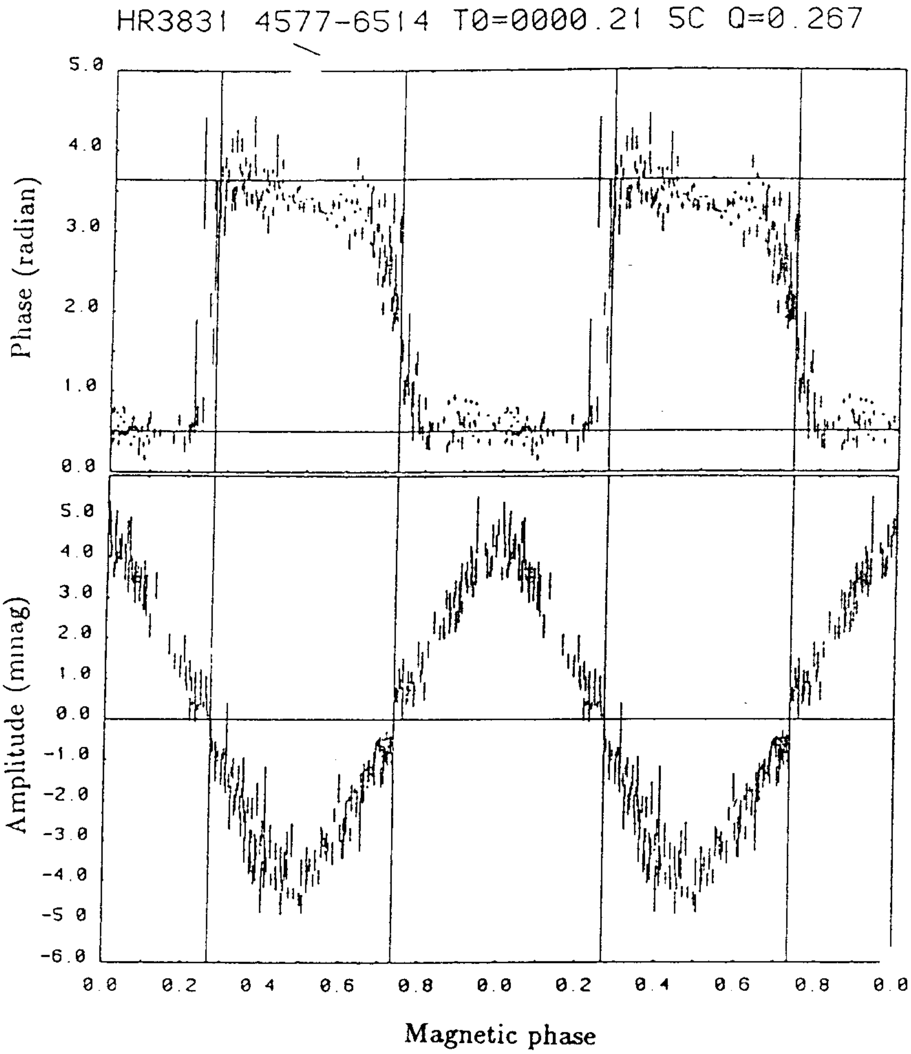


Fig. 2. The upper panel: The phase of the oscillation of HR 83368 as a function magnetic phase. The lower panel: Time variation in the amplitude $A(t)$ of the oscillat of HD 83368 as a function of rotation phase, where the luminosity variation is expres as $\Delta L(t)/L = A(t)\sin(2\pi\nu t)$. After Kurtz (unpublished).

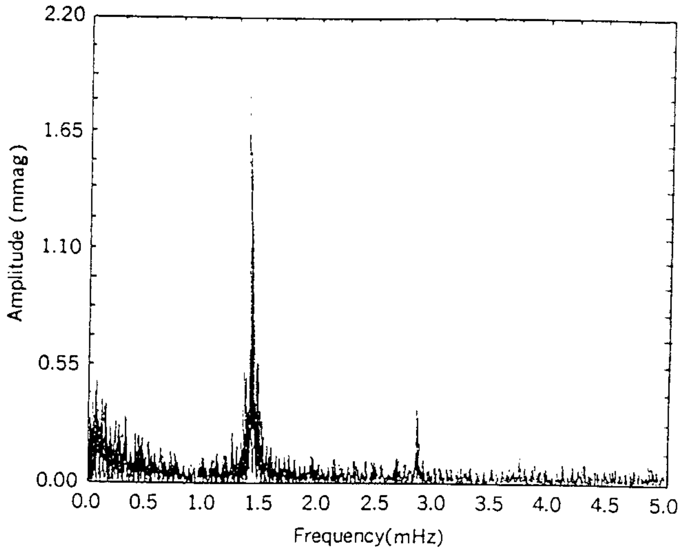


Fig. 9.2 An amplitude spectrum for HD 83368. Significant amplitude can be seen at both at 1.4 and 2.8 mHz. The low frequency high amplitude noise is due to fluctuation in sky transparency during the observations (after Kurtz, 1982).

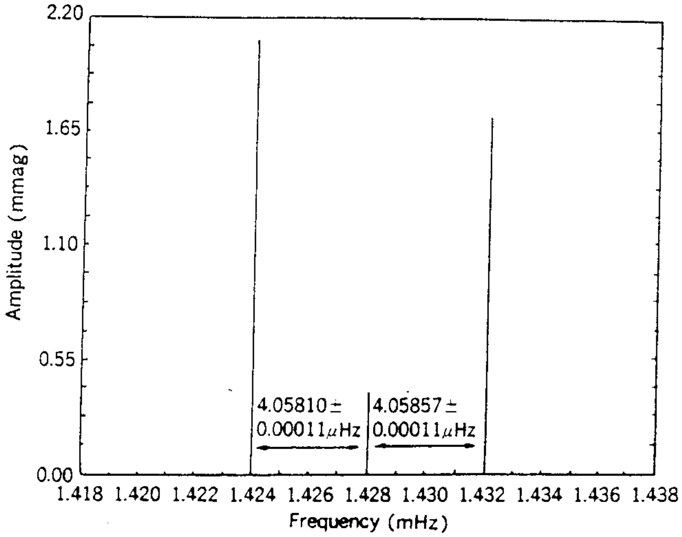
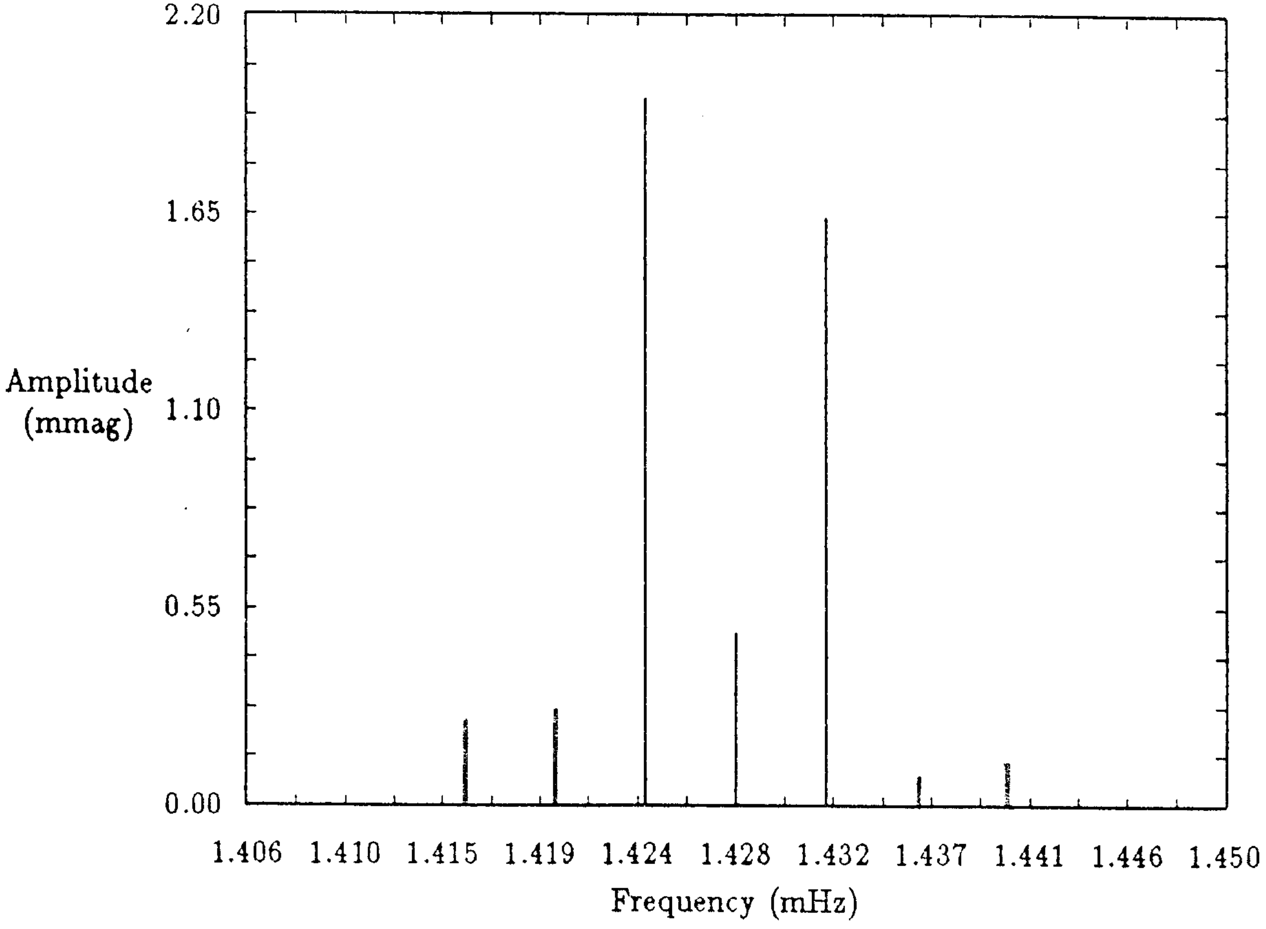
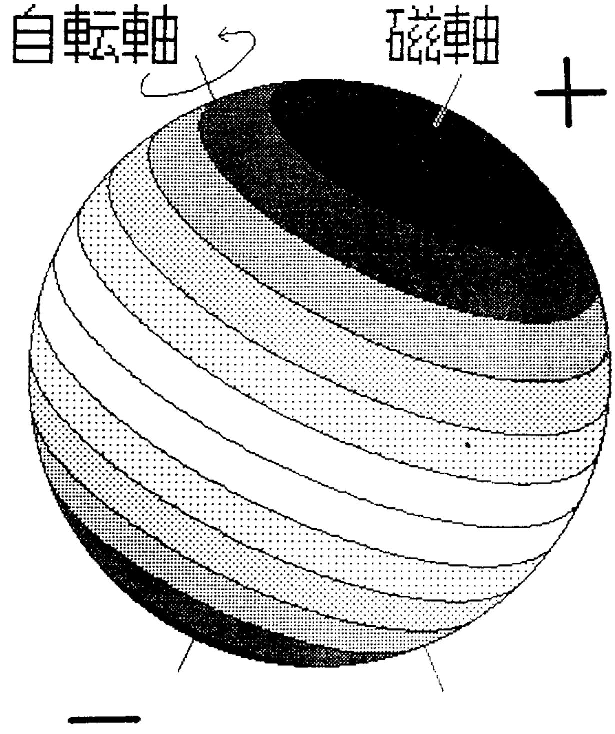


Fig. 9.4 A schematic amplitude spectrum for HD 83368 showing the frequency triplet.

図 1: パワー・スペクトルの例 (HD 83368)



Oblique Pulsator モデル



取り扱い

仮定

- 線形

$$\xi \propto \exp(i\omega t)$$

- 断熱

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\delta\rho}{\rho}$$

- 剛体回転

$$\boldsymbol{\Omega}(r, \theta, \phi) = \boldsymbol{\Omega}(= \text{const.})$$

- ポロイダル磁場

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \nabla \left(\frac{Y_{n0}}{r^{n+1}} \right)$$

- MHD 近似

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

方程式

ラグランジュ的変位

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi$$

オイラー的摂動

$$p = p_0 + p'$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$$

- 連続の式

$$\rho' + \xi \cdot \nabla \rho_0 = -\rho_0 \nabla \cdot \xi$$

- 運動方程式

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla p' + \mathbf{j}' \times \mathbf{B}_0 - \rho' \mathbf{g} - \rho_0 \mathbf{g}' + 2\rho_0 \mathbf{\Omega} \times \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\mathbf{j}' = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}'$$

- 断熱の式

$$p' + \xi \cdot \nabla p_0 = -\Gamma_1 p_0 \nabla \cdot \xi$$

- MHD の方程式

$$\mathbf{B}' = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\xi)+\omega\mathcal{M}(\xi)+\mathcal{B}(\xi)=\omega^2\xi}$$

- ガス圧

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\xi) &= \frac{1}{\rho^2}(\nabla p)\nabla\cdot(\rho\xi)\\ &\quad -\frac{1}{\rho}\nabla(\xi\cdot\nabla p)\\ &\quad -\frac{1}{\rho}\nabla(\Gamma_1 p\nabla\cdot\xi)\\ &\quad +\nabla\left\{G\int\frac{\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot[\rho(\mathbf{r}')\xi(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}d^3\mathbf{r}'\right\}\end{aligned}$$

- コリオリ力

$$\mathcal{M}(\xi)=2i\,(\Omega\times\xi)$$

- ローレンツ力

$$\mathcal{B}(\xi)=-\frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{B}\times[\nabla\times\{\nabla\times(\mathbf{B}\times\xi)\}]$$

磁場，自転のない場合の振動

$$\mathcal{L}(\xi) = \omega^2 \xi$$

固有関数をベクトル球面調和関数で展開

$$\xi(r,\theta,\phi,t) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \xi^{(u)}_{nJM}(r,\theta,\phi) e^{i\omega_{nJ}t}$$

固有値 ω は M に関して縮退している。

$$\begin{aligned}\xi^{(u)}_{nJM}(r,\theta,\phi) \equiv\ & S^{(u)}_{nJM}(r)\mathbf{Y}_{J\,J-1\,M}(\theta,\phi) \\ & + T^{(u)}_{nJM}(r)\mathbf{Y}_{J\,J+1\,M}(\theta,\phi)\end{aligned}$$

$\mathbf{Y}_{J\,J\pm1\,M}(\theta,\phi)$: spheroidal component

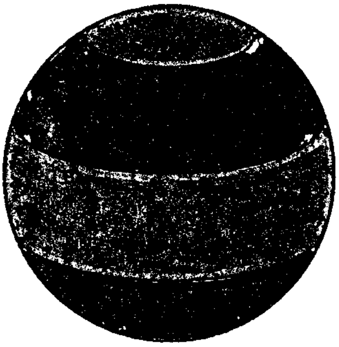
$\mathbf{Y}_{J\,J\,M}(\theta,\phi)$: toroidal component → なし

$$\Downarrow$$

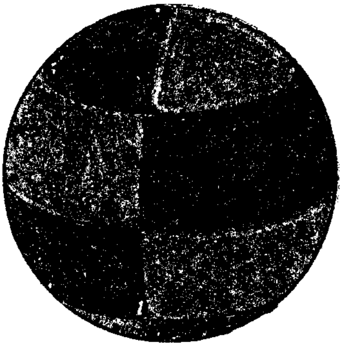
スカラー関数 $S^{(u)}_{nJM}(r)$, $T^{(u)}_{nJM}(r)$ を求める。

ベクトル球面調和関数の例 1

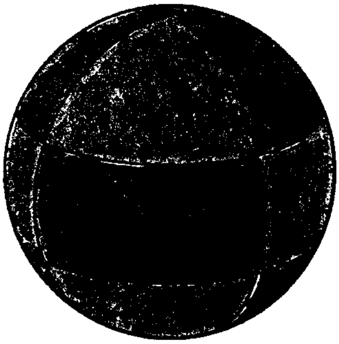
spheroidal mode



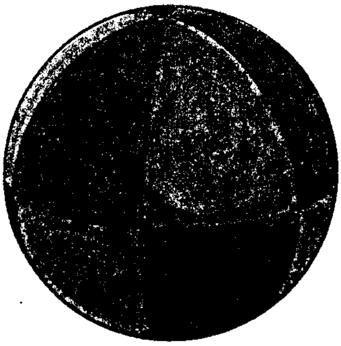
$J = 4 \quad M = 0$



$J = 4 \quad M = 1$



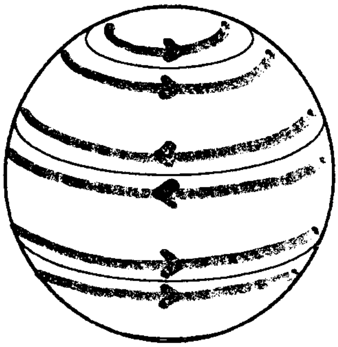
$J = 4 \quad M = 2$



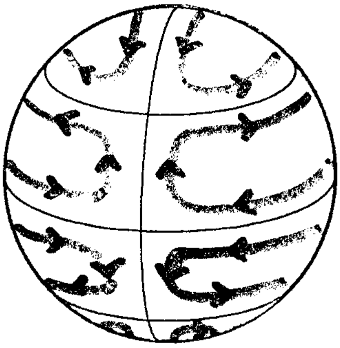
$J = 4 \quad M = 3$

ベクトル球面調和関数の例 2

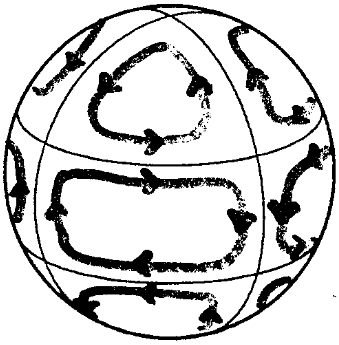
toroidal mode



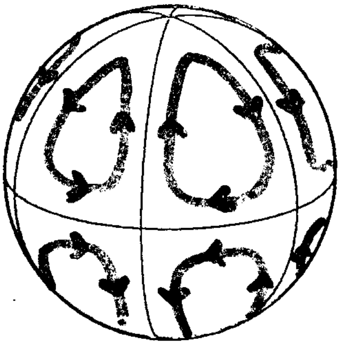
$J=4\quad M=0$



$J=4\quad M=1$



$J=4\quad M=2$



$J=4\quad M=3$

磁場，自転の影響の取り扱い ～ 摂動論

磁場，自転の影響は小さいものとする。

$$\mathcal{L}(\xi) \gg \mathcal{B}(\xi),\ \ \omega\mathcal{M}(\xi)$$

摂動を受ける前の固有関数として $\xi^{(u)}_{nJM}e^{i\omega_{nJ}t}$ を用いる。
摂動を受けた後の固有関数を $\xi e^{i\omega t}$ とする。

$$\begin{aligned}\xi &= \xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \cdots \\ \omega &= \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi^{(0)} &= \sum_{M=-J}^{J} \alpha_M \xi^{(u)}_{nJM} \\ \xi^{(1)} &= \sum_{M'} \sum_{n',J'}{}' \beta_{n'J'M'} \xi^{(u)}_{n'J'M'}\end{aligned}$$

行列要素

$$\langle n'\ J'\ M' \mid \mathcal{A} \mid n\ J\ M\rangle \equiv \int_0^M \xi^{(u)*}_{n'J'M'} \cdot \mathcal{A}(\xi^{(u)}_{nJM})\,dM_r$$

縮退のある場合の摂動論に従えば，α_M は行列

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{M''M} &= \frac{1}{2}\langle n\ J\ M'' \mid \mathcal{M} \mid n\ J\ M\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\omega^{(0)}_{nJ}}\langle n\ J\ M'' \mid \mathcal{B} \mid n\ J\ M\rangle\end{aligned}$$

の固有ベクトル，$\omega^{(1)}$ は固有値である。

$$\begin{aligned}\beta_{n'J'M'} &= \frac{1}{{\omega^{(0)}_{n'J'}}^{2} - {\omega^{(0)}_{nJ}}^{2}}\langle n'\ J'\ M \mid n'\ J'\ M\rangle^{-1} \\ &\quad \times \sum_M \alpha_M \Big(\omega^{(0)}_{nJ}\langle n'\ J'\ M' \mid \mathcal{M} \mid n\ J\ M\rangle \\ &\quad + \langle n'\ J'\ M' \mid \mathcal{B} \mid n\ J\ M\rangle\Big)\end{aligned}$$

行列要素

- $\langle n'\,J'\,M' \,|\, \mathcal{M} \,|\, n\,J\,M \rangle$

  0 でない要素

$$\begin{aligned} J' &= J-1,\ J,\ J+1 \\ M' &= M \end{aligned}$$

- $\langle n'\,J'\,M' \,|\, \mathcal{B} \,|\, n\,J\,M \rangle$

  磁場が k 重極子まで成分を持つ場合，0 でない要素

$$\begin{aligned} J' &= J-k,\ \cdots,\ J+k \\ M' &= M \end{aligned}$$

選択則

磁場が k 重極子まで成分を持つ場合,

$$\xi_{nJM} \Longrightarrow \begin{cases} \xi_{n'\,J-k\,M'} \\ \quad\vdots \\ \xi_{n'\,J+k\,M'} \end{cases} \quad (M' = -J,\ \cdots,\ J)$$

特に,

- 双極子磁場の場合

  $J-2,\ J-1,\ J,\ J+1,\ J+2$ が選択される。摂動を受ける前の状態が spheroidal component の場合，偶奇性の議論から、 $J-2,\ J,\ J+2$ は spheroidal component であり、$J-1,\ J+1$ は toroidal component である。

$$\xi_{nJM}\ \ (\text{spheroidal}) \Longrightarrow \begin{cases} \xi_{n'\,J-2\,M'} & (\text{spheroidal}) \\ \xi_{n'\,J-1\,M'} & (\text{toroidal}) \\ \xi_{n'\,J\,M'} & (\text{spheroidal}) \\ \xi_{n'\,J+1\,M'} & (\text{toroidal}) \\ \xi_{n'\,J+2\,M'} & (\text{spheroidal}) \end{cases}$$

$$(M' = -J,\ \cdots,\ J)$$

パワー・スペクトル

光度変化に寄与するのは spheroidal component のみ

磁場の軸に関して

- 1 つのパターン $J,\ M$
- 1 つの角振動数 ω

を持つ振動

⇓

地球から観測すると

- $2J+1$ 個のパターン $J,\ M=-J,\cdots,J$

  $\cdots$ 自転軸、磁場の軸、視線方向の不一致の効果
- $2J+1$ 個の角振動数 $\omega-J\Omega,\cdots,\omega+J\Omega$

  $\cdots$ 自転の効果

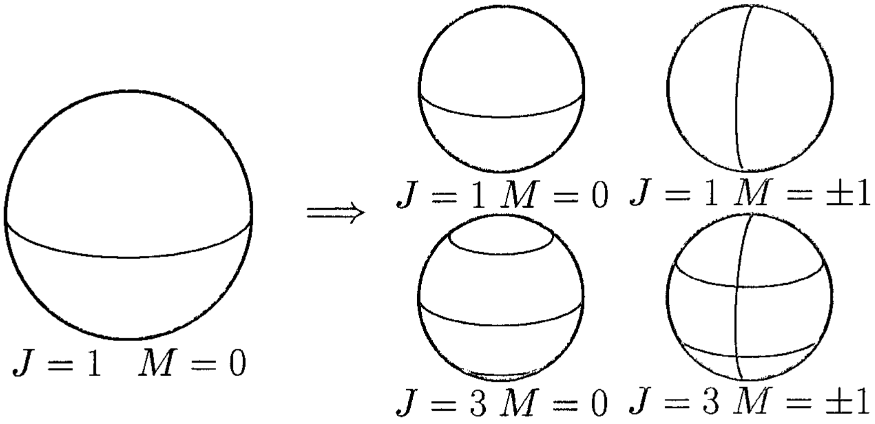
を持つ振動

$\Longrightarrow$ 微細構造の $2J+1$ 重項が出現

理論的予想

振動パターン

spheroidal component のみ考えると、$J=1\quad M=0$ の振動が双極子磁場によって $J=1,3\quad M=-1,0,1$ のパターンを持つ振動になる。但し、振動数は一つ。


$J=1\quad M=0$
$\Longrightarrow$
$J=1\ M=0$
$J=1\ M=\pm1$
$J=3\ M=0$
$J=3\ M=\pm1$

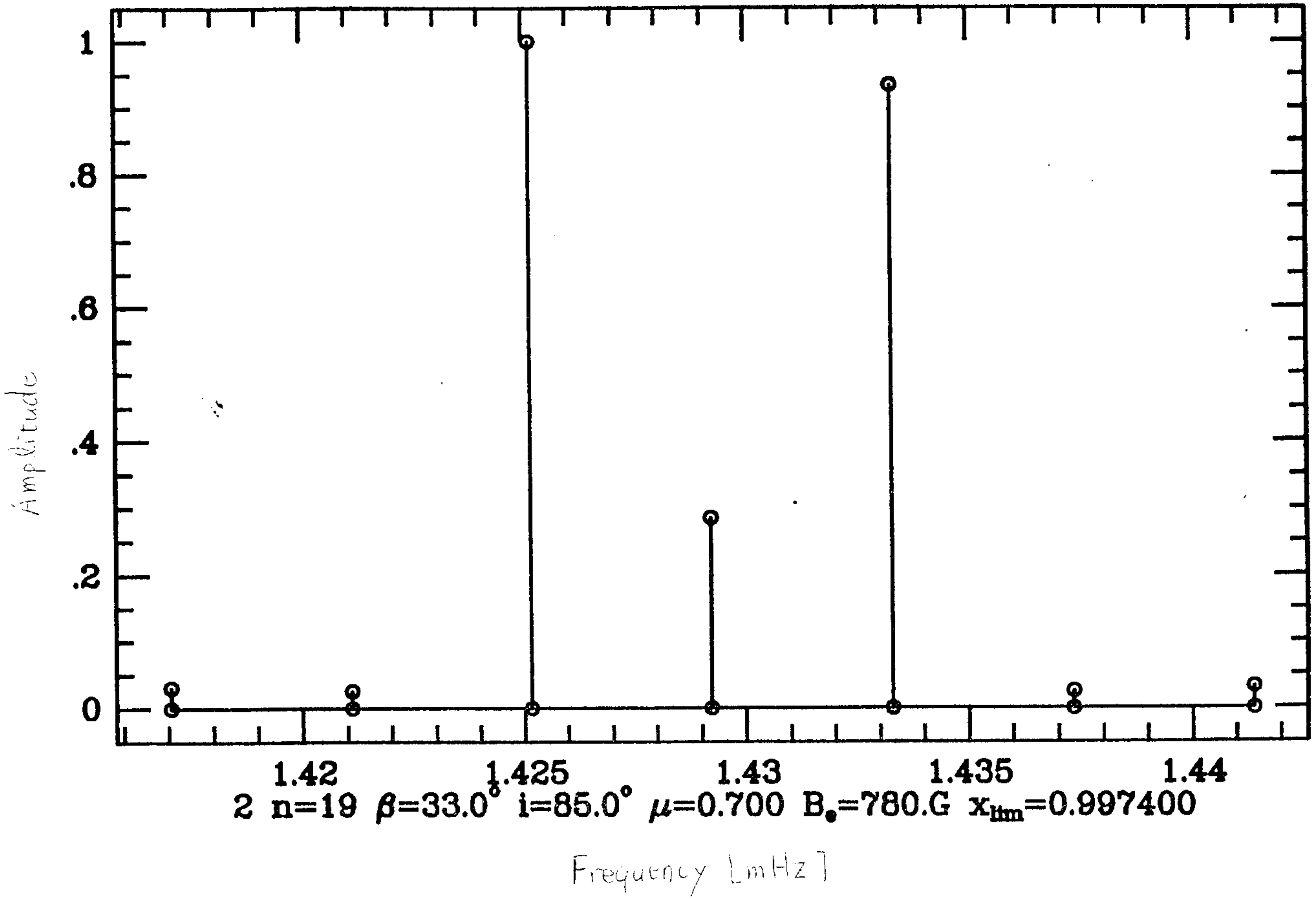
パワー・スペクトル

パターン		観測される角振動数
$J=1$	$\Longrightarrow$	$\omega-\Omega,\ \omega,\ \omega+\Omega$
$J=3$	$\Longrightarrow$	$\omega-3\Omega,\ \omega-2\Omega,\cdots,\omega+2\Omega,\ \omega+3\Omega$

$$\Longrightarrow \boxed{7\text{ 重項}}$$

具体的なパワー・スペクトルの形は星の幾何学的配置、磁場の強さ、星の内部構造に依存する。

理論的に得られるパワースペクトル



ASTEROSEISMOLOGY OF roAp

パワー・スペクトルから得られる情報

- 磁場と自転軸のなす角度 β、自転軸と視線方向のなす角度 i
- 磁場の強さ (自転角速度 Ω を仮定する必要あり)

現在の観測では精度の点で現実的な答は得られない。

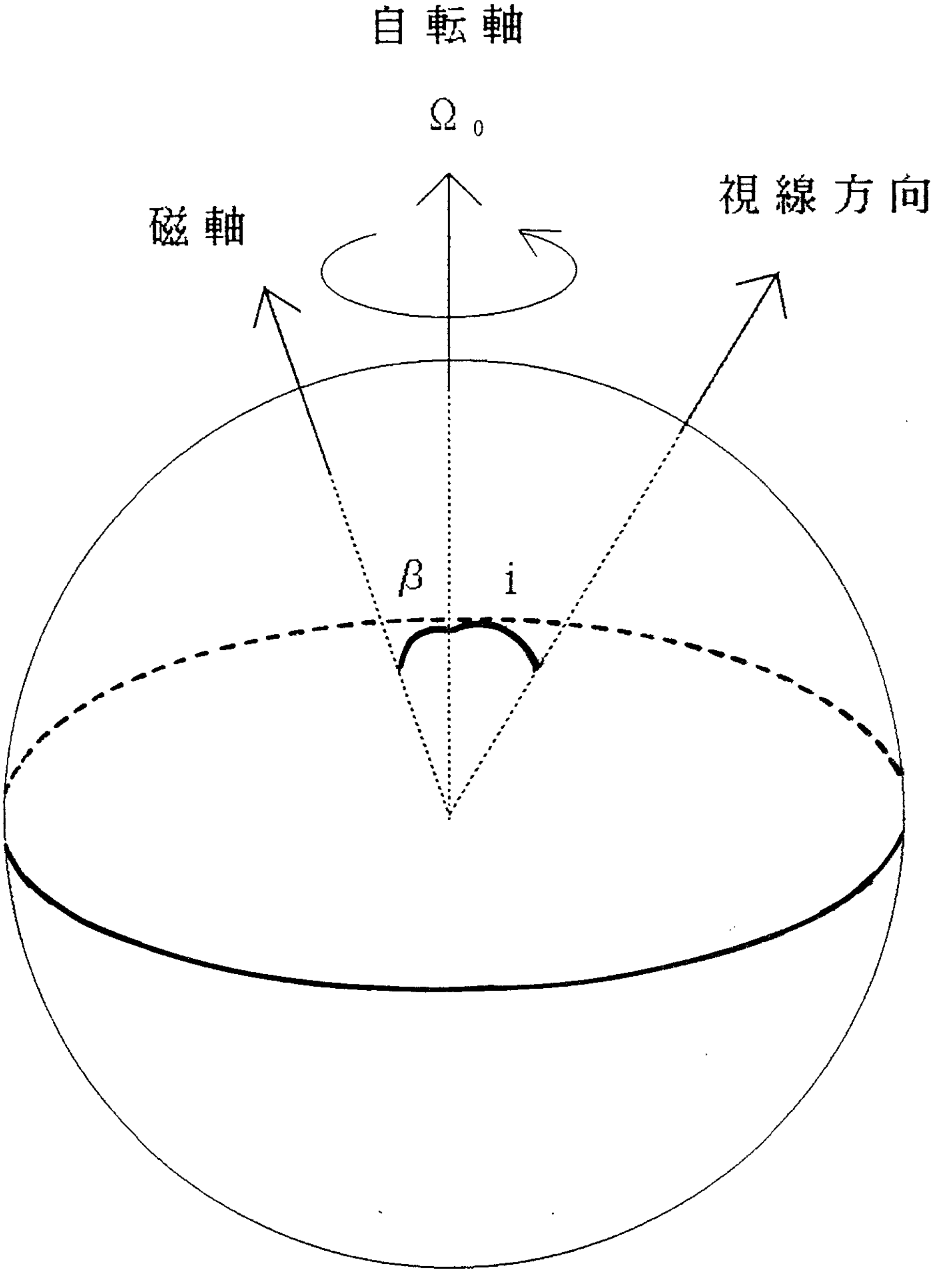
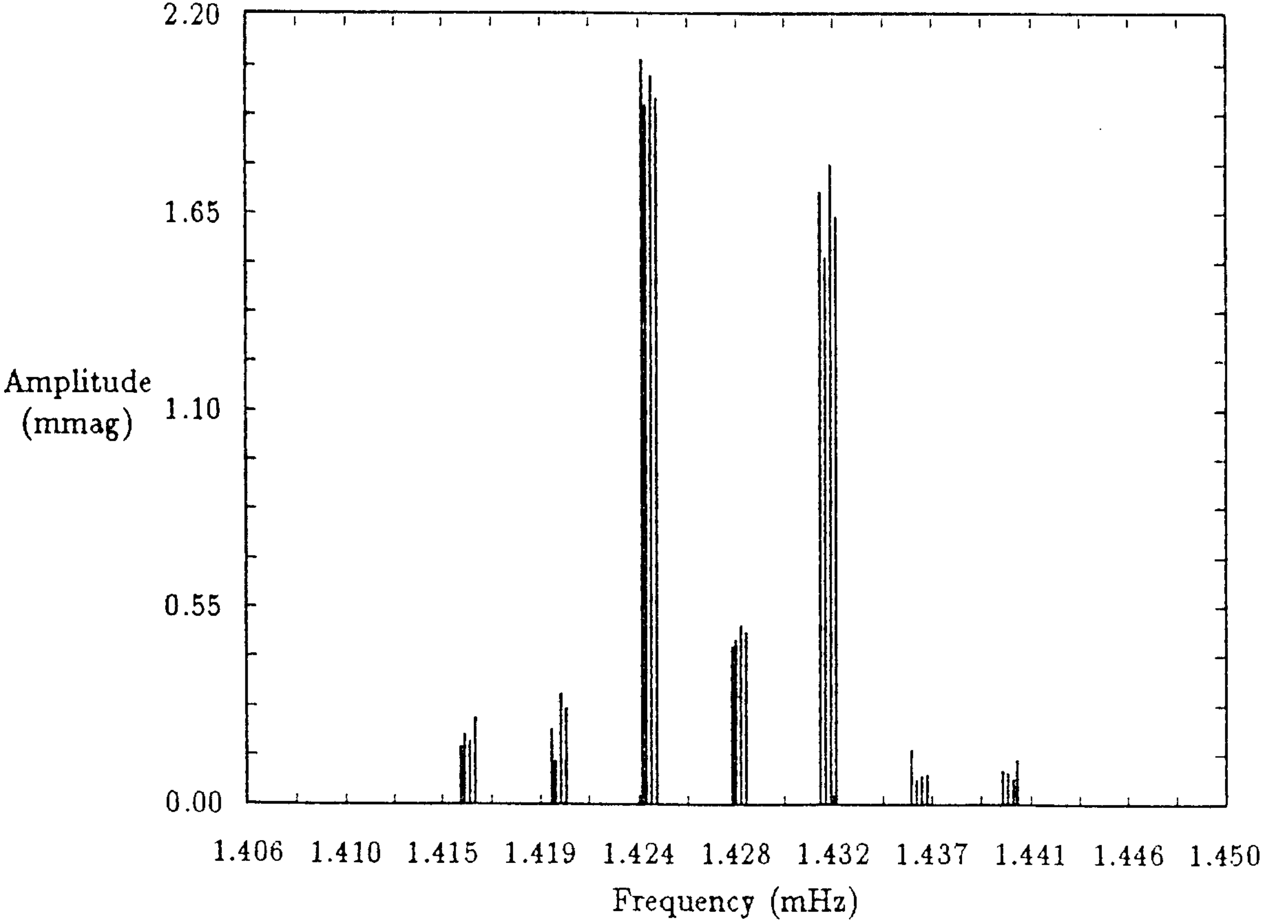

自転軸
Ω_0
磁軸
視線方向
β
i

図 4: 観測されたパワー・スペクトル (HD 83368): 各成分に対し 4 つの観測結果 (1981,1986,1990,1991) が示されている。特に振幅が小さい成分について観測ごとの相対的な値の違いが大きくなっていることがわかる。



$$
\begin{aligned}
\frac{A_1+A_{-1}}{A_0} &= \frac{N_1(1+\tilde{\beta}_{1,0})\sin\beta\sin i + N_3\frac{3}{128}\tilde{\beta}_{3,0}(\sin\beta+5\sin 3\beta)(\sin i+5\sin 3i)}{N_1(1+\tilde{\beta}_{1,0})\cos\beta\cos i + N_3\frac{1}{64}\tilde{\beta}_{3,0}(5\cos 3\beta+3\cos\beta)(5\cos 3i+3\cos i)} \\
&\simeq \tan\beta\tan i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_2+A_{-2}}{A_0} &= \frac{N_3\frac{15}{4}\tilde{\beta}_{3,0}\sin^2\beta\cos\beta\sin^2 i\cos i}{N_1(1+\tilde{\beta}_{1,0})\cos\beta\cos i + N_3\frac{1}{64}\tilde{\beta}_{3,0}(5\cos 3\beta+3\cos\beta)(5\cos 3i+3\cos i)} \\
&\simeq \frac{15}{4}\frac{N_3}{N_1}\beta_{n-1,3,0}\sin^2\beta\sin^2 i \\
&= \frac{15}{4}\frac{N_3}{N_1}\frac{1}{\omega_{n,1}^{(0)2}-\omega_{n-1,3}^{(0)2}}\frac{1}{I_{n-1,3}}\left[\int_0^M \boldsymbol{\xi}_{n-1,3,0}\cdot\mathcal{B}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}_{n,1,0})dM_r\right]\sin^2\beta\sin^2 i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_3+A_{-3}}{A_0} &= \frac{N_3\frac{5}{8}\tilde{\beta}_{3,0}\sin^3\beta\sin^3 i}{N_1(1+\tilde{\beta}_{1,0})\cos\beta\cos i + N_3\frac{1}{64}\tilde{\beta}_{3,0}(5\cos 3\beta+3\cos\beta)(5\cos 3i+3\cos i)} \\
&\simeq \frac{5}{8}\frac{N_3}{N_1}\beta_{n-1,3,0}\sin^2\beta\tan\beta\sin^2 i\tan i \\
&= \frac{5}{8}\frac{N_3}{N_1}\frac{1}{\omega_{n,1}^{(0)2}-\omega_{n-1,3}^{(0)2}}\frac{1}{I_{n-1,3}}\left[\int_0^M \boldsymbol{\xi}_{n-1,3,0}\cdot\mathcal{B}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}_{n,1,0})dM_r\right]\sin^2\beta\tan\beta\sin^2 i\tan i
\end{aligned}
$$

$$
\frac{A_3+A_{-3}}{A_2+A_{-2}} = \frac{1}{6}\tan\beta\tan i,
$$

$$
\frac{A_3+A_{-3}}{A_2+A_{-2}}\Big/\frac{A_1+A_{-1}}{A_0} \simeq \frac{1}{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_1-A_{-1}}{A_1+A_{-1}} &= \frac{N_1\left(\frac{C_{n,1}\Omega}{\omega_0^{(1)\mathrm{mag}}-\omega_1^{(1)\mathrm{mag}}}\sin\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{\beta}_{1,1}\right)\sin i - N_3\frac{3}{64}\tilde{\beta}_{3,1}(5\cos 2\beta+3)(\sin i+5\sin 3i)}{N_1(1+\tilde{\beta}_{1,0})\sin\beta\sin i + N_3\frac{3}{128}\tilde{\beta}_{3,0}(\sin\beta+5\sin 3\beta)(\sin i+5\sin 3i)} \\
&\simeq \frac{C_{n,1}\Omega}{\omega_0^{(1)\mathrm{mag}}-\omega_1^{(1)\mathrm{mag}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_2-A_{-2}}{A_2+A_{-2}} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\tilde{\beta}_{3,1}}{\tilde{\beta}_{3,0}}\frac{1}{\sin\beta} \\
&\simeq \frac{\sqrt{6}}{3}\frac{C_{n,1}\Omega}{\omega_0^{(1)\mathrm{mag}}-\omega_1^{(1)\mathrm{mag}}}\frac{\int_0^M \boldsymbol{\xi}_{n-1,3,1}\cdot\mathcal{B}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}_{n,1,1})dM_r}{\int_0^M \boldsymbol{\xi}_{n-1,3,0}\cdot\mathcal{B}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}_{n,1,0})dM_r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_3-A_{-3}}{A_3+A_{-3}} &= -\sqrt{3}\frac{\tilde{\beta}_{3,1}}{\tilde{\beta}_{3,0}}\frac{1}{\sin\beta} \\
&\simeq \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{C_{n,1}\Omega}{\omega_0^{(1)\mathrm{mag}}-\omega_1^{(1)\mathrm{mag}}}\frac{\int_0^M \boldsymbol{\xi}_{n-1,3,1}\cdot\mathcal{B}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}_{n,1,1})dM_r}{\int_0^M \boldsymbol{\xi}_{n-1,3,0}\cdot\mathcal{B}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}_{n,1,0})dM_r}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{A_3-A_{-3}}{A_3+A_{-3}}\Big/\frac{A_2-A_{-2}}{A_2+A_{-2}} = \frac{3}{2}
$$