

SPMODEL サンプルプログラム

水路領域

2次元ブシネスク方程式モデル:
重力流の計算

gravcurrent1.f90

小高 正嗣, 竹広 真一

2026年7月8日

目次

1	概要	2
2	支配方程式系	3
2.1	支配方程式系	3
2.2	境界条件	4
3	使用モジュールとその他の設定	5
4	数値実験	6
5	参考文献	8
	謝辞	9

1 概要

SPMODEL サンプルプログラム『gravcurrent1.f90』に用いられている基礎方程式と境界条件, および, このプログラムを用いた数値実験の方法について解説する. 基礎方程式は2次元のブシネスク方程式系である. 計算はスペクトル法を用いて行い, 展開関数は水平方向にはフーリエ級数, 鉛直方向にはチェビシェフ多項式を用いる. スペクトル変換と逆変換および微分演算には, SPMODEL ライブラリ (spml) を用いている. 数値実験では重力流の計算を行った.a

プログラム名

gravcurrent1.f90

プログラム取得元

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/2d-channel-et/boussinesq/gravcurrent/SIGEN.htm>

SPMODEL サンプルプログラム目次

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/sample.htm>

SPMODEL の使い方

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel>

2 支配方程式系

ここでは支配方程式系と境界条件を記す.

2.1 支配方程式系

支配方程式系は 2 次元のブシネスク方程式系である.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho}{\rho_0} g + \nu \nabla^2 v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = \kappa \nabla^2 \rho. \quad (4)$$

$$(5)$$

各記号の定義は表 1 に表す.

渦度 ζ と流線関数 ψ

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (6)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (7)$$

を導入し, 渦度と密度の予報方程式として支配方程式系を表すと以下のようになる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \nu \nabla^2 \zeta, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + J(\psi, \rho) = \kappa \nabla^2 \rho. \quad (9)$$

ここで $J(A, B)$ はヤコビアン

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$$

である.

記号	変数/物理定数
x	水平座標
z	鉛直座標
t	時間
u	x 方向速度
v	y 方向速度
ρ_0	平均密度
ρ	密度
ψ	流線関数
ζ	渦度
g	重力加速度
ν	動粘性係数
κ	拡散係数

表 1: 変数, 物理定数の定義

2.2 境界条件

境界条件は水平に周期境界条件, 鉛直方向には $z = 0, y_m$ に置いた剛体壁面で $v = 0$, 応力なし, 熱フラックスなしとする. すなわち水平境界条件は計算領域をそれぞれ x_m とすると

$$\zeta(x + x_m, z) = \zeta(x, z) \quad (10)$$

などと表される. 鉛直境界条件は $z = 0, y_m$ において,

$$\psi = \text{Const.}, \quad (11)$$

$$\zeta = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

である. 境界で与える ψ の値は簡単のため 0 とした.

3 使用モジュールとその他の設定

スペクトル変換と逆変換, 微分演算は SPMODEL ライブラリ (spml) の `et_module` に含まれる関数を用いて行う. フーリエ変換とチェビシェフ変換, それらの逆変換の際の数値積分は台形公式を用いて行う. spml が下位で使用する ISPACK の仕様から, 格子点数 I, J は偶数で, かつ $I/2, J/2 = 2^a 3^b 5^c$ (a, b, c は 0 または整数) でなければならない. 非線形項の計算によって生じるエリアジングを防ぐため, 格子点数 I, J と切断波数 K, L は $I > 3K, J > 3K/2$ を満たすように与える.

4 数値実験

数値実験では重力流の室内実験を模した計算を行う。初期条件として以下のような密度分布を持つ静止した流体を考える。

$$\rho = \rho_0 + \frac{\delta\rho}{2} \left[\tanh\left(\frac{x-x_1}{\sigma}\right) - \tanh\left(\frac{x-x_2}{\sigma}\right) \right] \quad (14)$$

パラメータは表 2 にまとめた値を用いる。

格子点数 I, J と切断波数 K, L はそれぞれ $I = 128, J = 64, K = L = 42$ とする。時間格子間隔 Δt は 10^{-4} sec, 計算ステップ数は 300,000 ステップである。

図 1 に計算された密度分布の時間変化を示した。室内実験との対比がしやすいように $0 \leq x \leq 60$ cm までの範囲を示してある。

パラメータ	数値
ρ_0	1000 kgm ⁻³
$\delta\rho$	1 kgm ⁻³
g	9.8 msec ⁻²
ν	10 ⁻⁷ m ² sec ⁻¹
κ	10 ⁻¹¹ m ² sec ⁻¹
x_m	0.2 m
y_m	1.2 m
x_1	$x_m/2 + 0.01$ m
x_2	$x_m/2 - 0.01$ m
σ	0.02 m

表 2: 使用したパラメータの値

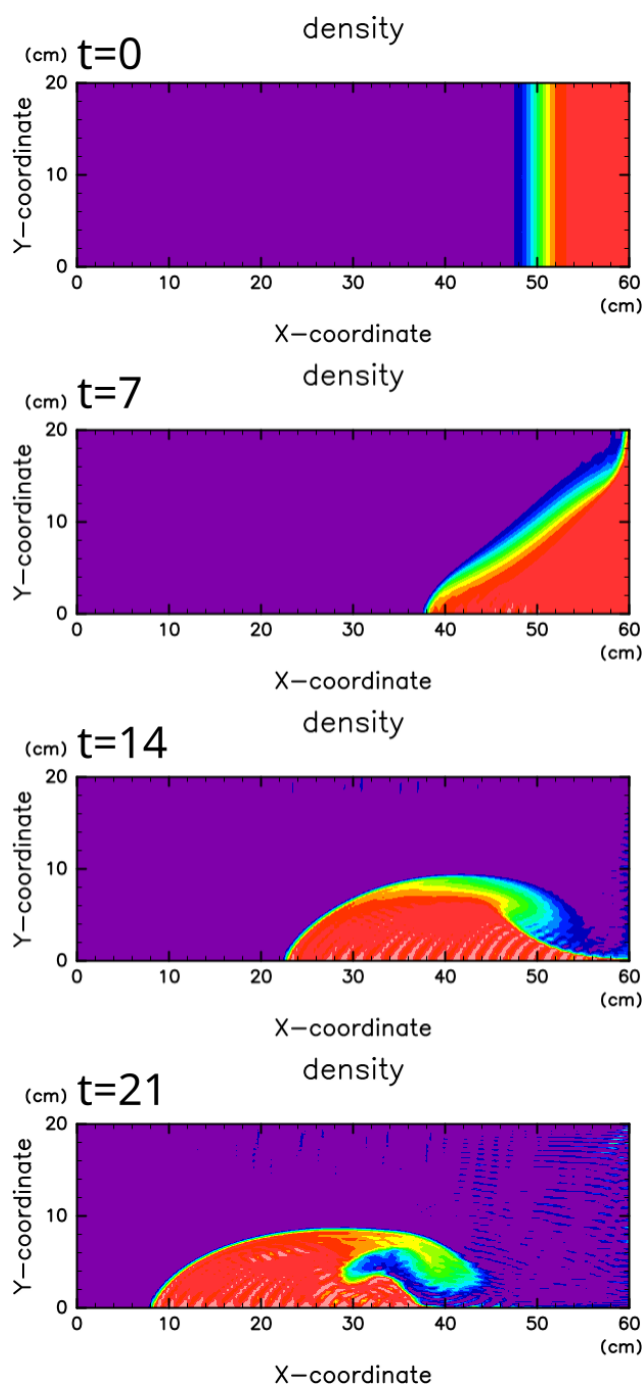


図 1: 密度分布の時間変化. 左上から右下へと順に $t = 0.0$ から 7.0 sec 毎の結果. $0 \leq x \leq 60$ cm までの範囲を示した. 寒色から暖色へと色が変化するにつれて密度が高い.

5 参考文献

竹広真一, 石岡圭一, 森川靖大, 小高正嗣, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2004: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), <http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/>, 地球流体電脳倶楽部.

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/>

において公開されているものである (© 地球流体電脳倶楽部スペクトルモデルプロジェクト spmodel@gfd-dennou.org 2002.). 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない. なお, 利用する際には今一度自ら内容を確認することをお願いする (無保証無責任原則).

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

spmodel@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いです.