

ブシネスク流体プリミティブ方程式系 を解くスペクトルモデルの構築と 自転軸対称ハドレー循環に関する 数値実験の追試

2022/11/16

流体地球物理学教育研究分野 M2

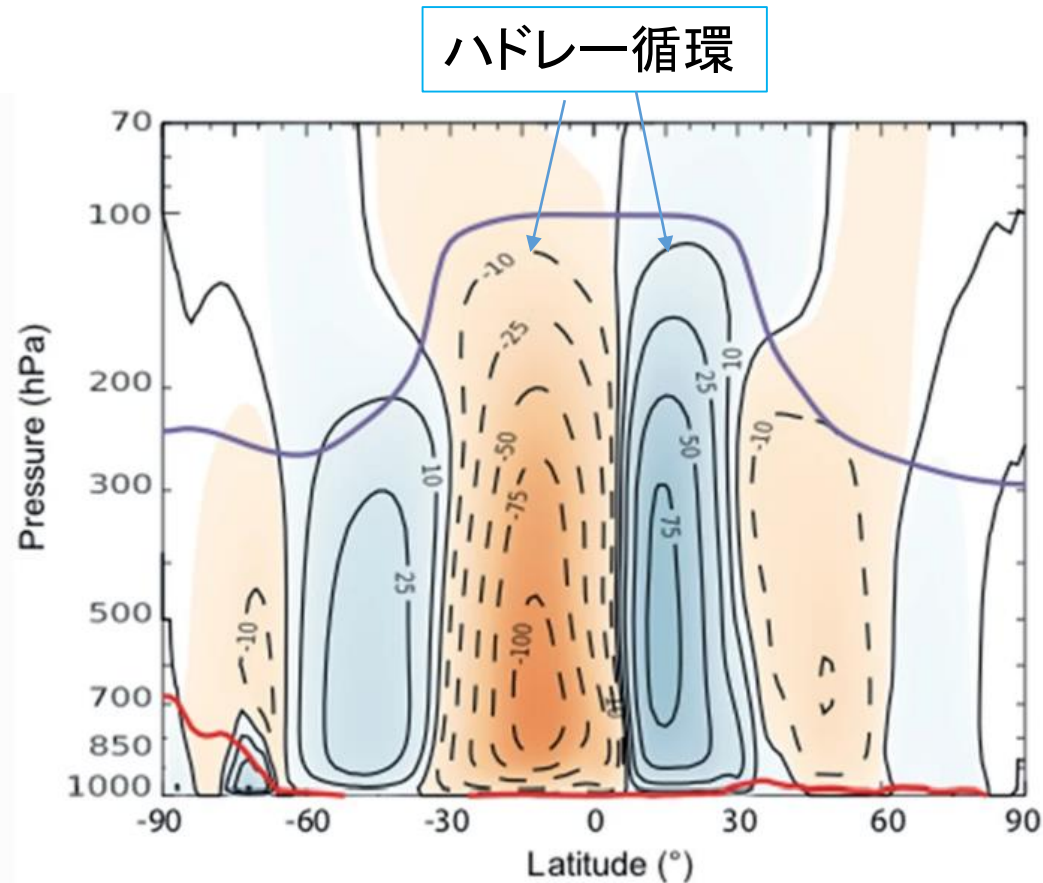
岡田和真

目次

1. はじめに
2. 数値モデルの概要
 - 2-1. 支配方程式系からモデル支配方程式系へ
 - 2-2. 空間離散化
 - 水平方向: 球面調和関数, 鉛直方向: チェビシェフ多項式
 - 2-3. 時間離散化
 - クランクニコルソン & アダムズバッシュフォース法
3. 追試
 - 加熱中心が赤道上有にある場合 (Held and Hou (1980))
 - 加熱中心が赤道外にある場合 (Lindzen and Hou (1988))
4. まとめと今後の方針
5. 参考文献

1. ハドレー循環

- 地球には「ハドレー循環」と呼ばれる大気の大規模な運動が存在する
 - ハドレー循環: 熱帯付近で上昇した空気が極側へ移動し、亜熱帯付近で下降する流れ



左図*: 質量流線関数 (単位: 10^9 kg s^{-1})

- 等値線に沿う流れ
 - 青色: 時計回りの流れ
 - オレンジ色: 反時計回りの流れ
- ECMWF (ヨーロッパ中期予報センター) が作成した再解析データ (ERA-I) の 1979-2017 年分の年平均, 東西平均データ (地球大気)

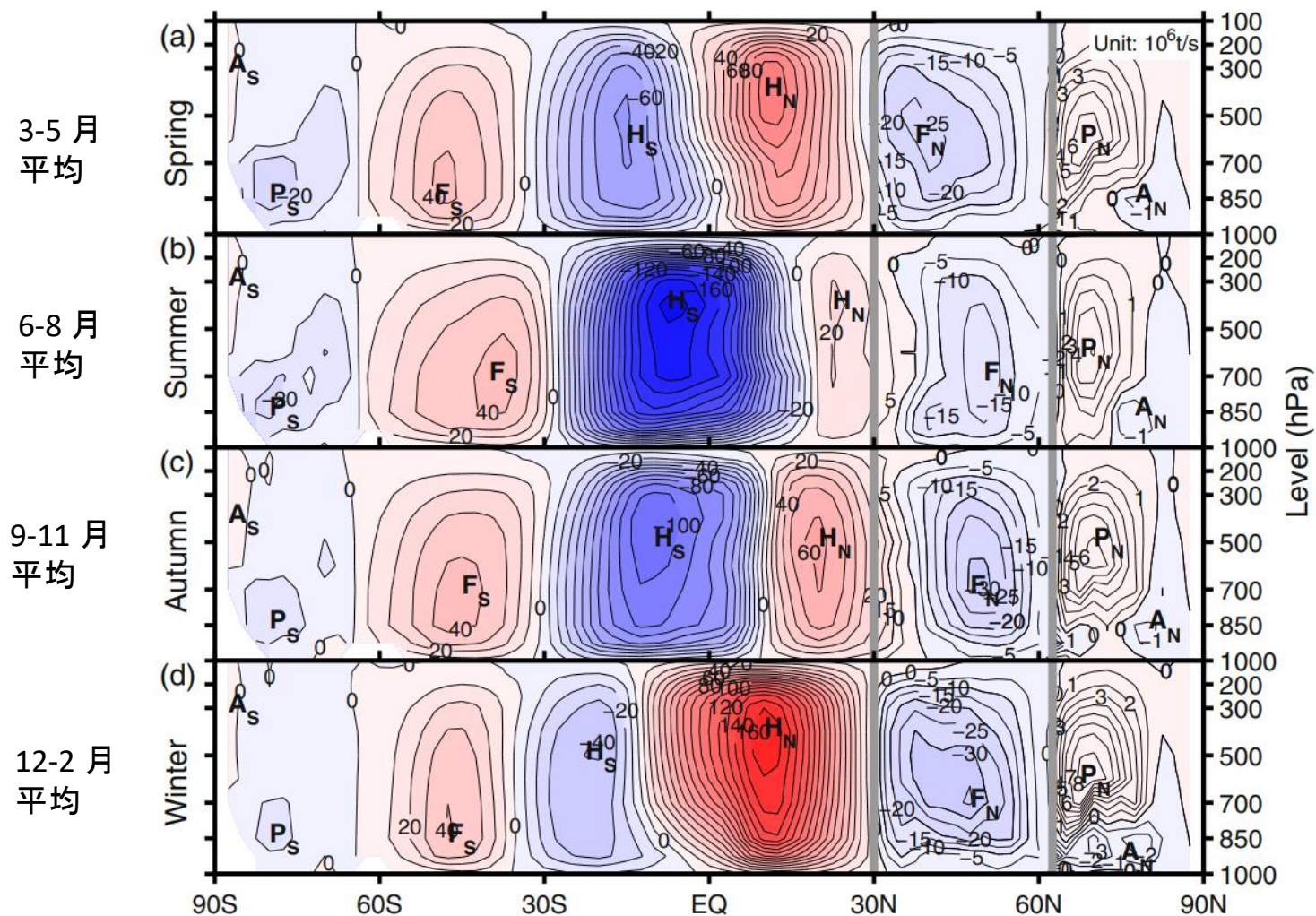
*

Christopher Lucas, Irina Rudeva, Hanh Nguyen, Ghyslaine Boschat, Pandora Hope (2021) から引用

URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00382-021-05903-9#Sec2>

1. ハドレー循環

□ 地球大気のハドレー循環 (の幅や強さ) には季節変化がある



左図*: 質量流線関数 (単位: 10^9 kg s^{-1})

➤ 等値線に沿う流れ

- 赤色: 時計回りの流れ
- 青色: 反時計回りの流れ

➤ NCEP1 再解析データの 1981-2010 年分の各季節平均, 東西平均

* Weihong Qian, Kaijun Wu, Haoyuan Liang (2015) から引用
URL: [PDF Arctic and Antarctic cells in the troposphere \(researchgate.net\)](https://www.researchgate.net/publication/275011111)

1. ハドレー循環研究に関して

- ハドレー循環の力学構造 (幅, 強さ) を理解するための研究は古くからある
- それらのハドレー循環研究において用いられた系に注目すると以下の二つがある
 - 非自転軸対称な系 (空間三次元)
 - 自転軸対称な系 (東西方向に一様)
- 現実の地球大気場は非自転軸対称である. そのため, 現実の地球大気におけるハドレー循環の構造を理解するには, 非軸対称擾乱が与える影響を考慮する必要がある.
- その一方で, 軸対称循環を研究することには以下のような意義がある*
 1. 低緯度での大気の大規模な流れ (貿易風など) は軸対称の枠組みでもよく記述できる.
 2. 軸対称場と現実の大気場を比較することで非軸対称的な構造の役割への洞察を深めることができる

1. ハドレー循環に関する研究

□ 軸対称ハドレー循環の力学構造を調べた以下の論文に注目した

- Held and Hou (1980)
- Lindzen and Hou (1988)
- Fang and Tung (1998)

- これらの論文では、ほとんど同じ設定でハドレー循環が調べられている
- 自転軸対称 (経度方向に一様), 緯度高度の空間二次元
 - 乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系
 - ニュートン加熱冷却による熱強制: ハドレー循環を駆動

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \dots - \frac{\theta - \theta_E}{\tau}$$

θ : モデル内温位場
 θ_E : 放射平衡温位場
 τ : 緩和時定数

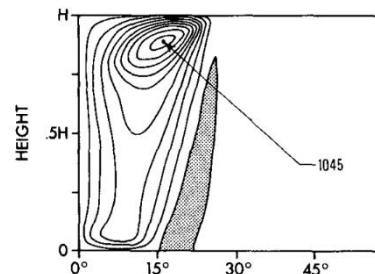
- 一方で, 上記三つの論文では異なる θ_E が与えられている
- 結果として得られるハドレー循環の構造も大きく異なる.

* ニュートン加熱冷却: 太陽による放射強制による効果を簡単に取り入れるための非断熱加熱項. 放射平衡温位場を与えて, その温位場と, モデル内の温位場の差に比例する項で表現される.

1. ハドレー循環に関する研究

- Held and Hou (1980): 加熱中心が赤道にある場合のハドレー循環を調べた。年平均して得られる地球大気のような、赤道対称なハドレー循環が得られた。

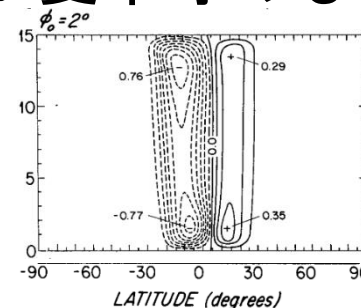
$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3\sin^2\phi - 1) + \Delta_v\left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\right)$$



- 数値計算から得られた
流線関数

- Lindzen and Hou (1988): 加熱中心が赤道外にある場合のハドレー循環を調べた。現実の地球大気のように、冬半球のハドレー循環が夏半球のものより強くなる。

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3(\sin\phi - \sin\phi_0)^2 - 1) + \Delta_v\left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\right)$$



- 左図: 質量流線関数
(単位: 10^9 kg s^{-1})

- Fang and Tung (1998): 加熱中心の緯度が時間変化する場合のハドレー循環を調べた。地球大気におけるハドレー循環のように季節変化する。

1. 研究目的とセミナーの内容

- 研究目的: 季節変化する場合のハドレー循環の力学的構造 (幅, 強さ) を調べる
 - 研究方針:
 1. 数値モデルの構築を行う
 2. 構築した数値モデルで追試を行う
 3. 季節変化する場合のハドレー循環の力学的構造を調べる
- 本セミナーの構成
 - 数値モデルの概要
 - Held and Hou (1980) の追試
 - Lindzen and Hou (1988) の追試

目次

1. はじめに
2. 数値モデルの概要
 - 2-1. 支配方程式系からモデル支配方程式系へ
 - 2-2. 空間離散化
 - 水平方向: 球面調和関数, 鉛直方向: チェビシェフ多項式
 - 2-3. 時間離散化
 - クランクニコルソン & アダムズバッシュフォース法
3. 追試
 - 加熱中心が赤道上有にある場合 (Held and Hou (1980))
 - 加熱中心が赤道外にある場合 (Lindzen and Hou (1988))
4. まとめと今後の方針
5. 参考文献

2-1. 支配方程式

ブシネスク流体プリミティブ方程式系

東西流運動方程式:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\Omega v \sin \phi - \frac{uv \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

南北流運動方程式:
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2\Omega u \sin \phi + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

静力学平衡の式
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\Theta_0}$$

熱力学方程式:
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\theta) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\theta \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) = -\frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \nu_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

非圧縮の式:
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

λ : 経度, ϕ : 緯度, z : 地表面からの高度, t : 時刻

$\mathbf{u} = (u, v, w)$: 東西, 南北, 鉛直風速度, θ : 温位, Φ : ジオポテンシャル

Ω : 自転角速度, a : 惑星半径, τ : 緩和時定数

θ_E : 放射平衡温位場, Θ_0 : θ_E の全球平均, ν_V : 鉛直拡散係数

2-1. トロイダル・ポロイダル展開

□ 非圧縮 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) なので, 以下のようにトロイダル・ポロイダル展開できる

$$\mathbf{u} = -\nabla \times \psi \mathbf{k} + \nabla \times \nabla \times \chi \mathbf{k}$$

ψ : トロイダルポテンシャル, χ : ポロイダルポテンシャル
 \mathbf{k} : z 軸方向の単位ベクトル

➤ 成分表示された速度場:

$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right)$$
$$v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right)$$
$$w = -\frac{1}{a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos \phi}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right) \right\} = -\nabla_H^2 \chi$$

□ 東西流, 南北流運動方程式を鉛直渦度, 水平発散に関する式に変形する

$$\zeta = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi) = \nabla_H^2 \psi$$
$$D = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_H^2 \chi$$

2-1. モデル支配方程式

モデル支配方程式*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu} + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 (\Phi + \text{KE}) + \nu_V \frac{\partial^2 D}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\Theta_0}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U\theta) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V\theta) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) - \frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \nu_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$U = u \cos \phi, \quad V = v \cos \phi, \quad \mu = \sin \phi$$

$$A = (\zeta + 2\Omega\mu)U + w \frac{\partial V}{\partial z}, \quad B = (\zeta + 2\Omega\mu)V - w \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\text{KE} = \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)}, \quad \nabla_H^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

発散方程式を両辺鉛直微分して, 静力学平衡の式を用いる
 ⇒ 静力学平衡の式を陽に解く必要がなくなる

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu} + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial D}{\partial z} \right) = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 \left(g \frac{\theta}{\Theta_0} + \frac{\partial}{\partial z} \text{KE} \right) + \nu_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial D}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U\theta) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V\theta) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) - \frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \nu_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

* 導出は https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf を参考にした。

2-1. 数値計算手法

□ この三本の方程式に対して, 時間発展計算を行う

➤ 空間離散化: スペクトル展開

- 水平方向: 球面調和関数
- 鉛直方向: チェビシェフ多項式

➤ 鉛直境界条件の取り扱い: チェビシェフタウ法を用いる

➤ 時間離散化: 鉛直拡散項にはクランクニコルソン法*, それ以外の項には2次のアダムズバッシュフォース法を組み合わせさせたセミインプリシット法

□ 上記の時間離散化法のため以下のようにしておく

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= G^\zeta + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) &= G^\chi + \nu_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= G^\theta + \nu_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G^\zeta &\equiv -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu} \\ G^\chi &\equiv \frac{1}{a(1-\mu^2)} \nabla_H^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \nabla_H^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \left(g \frac{\theta}{\Theta_0} + \frac{\partial}{\partial z} \text{KE} \right) \\ G^\theta &\equiv -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U\theta) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V\theta) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) - \frac{\theta - \theta_E}{\tau}\end{aligned}$$

* チェビシェフ多項式を用いるスペクトル法で(チェビシェフ展開を用いる軸方向の)拡散を含む時間発展方程式を陽的に安定に時間積分することは困難である(石岡(2004)). そのため, 陰的公式(ここではクランクニコルソン法)を用いる.

2-2. スペクトル展開

□ 各変数を以下のようにスペクトル展開する

$$\zeta(\lambda_i, \mu_j, x_k, t) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n \zeta_{n,m,l}(t) Y_{n,m}(\lambda_i, \mu_j) T_l(x_k)$$

n : 水平全波数, m : 東西波数, l : 鉛直波数
 M : 東西切断波数, L : 鉛直切断波数

• 展開係数

$$\zeta_{n,m,l}(t)$$

• 球面調和関数

$$Y_{n,m}(\lambda, \mu) = P_{n,m} e^{im\lambda}$$

i : 虚数単位
 e : 自然対数の底

• チェビシエフ多項式

$$T_l(x) = \cos(l\vartheta); \quad x = \cos \vartheta \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

• 格子点の取り方

- $\lambda_i = \frac{2\pi i}{I} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, I-1)$
 - μ_j : ルジャンドル多項式 $P_J(\mu)$ の J 個の零点 $(j = 1, 2, 3, \dots, J)$
 - $x_k = \cos \vartheta_k; \quad \vartheta_k = \frac{K-k}{K} \pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K)$
- $$z_k = \frac{1+x_k}{2} H$$

• \sum'' は初項と末項を 1/2 倍して和をとることを意味

2-2. チェビシェフ展開された関数の微分

ある関数 $f(x)$ が以下のようにチェビシェフ多項式を展開されているとする

$$f(x) = \sum_{l=0}^L a_l T_l(x)$$

一階微分した関数も

$$\frac{df}{dx} = \sum_{l=0}^L a_l^{(1)} T_l(x)$$

と展開できると仮定しておく。

そのとき、以下の左辺を計算すれば微分を評価できる

$$\begin{array}{ll} a_L^{(1)} = 0 & \vdots \\ a_{L-1}^{(1)} = L a_L & a_3^{(1)} = a_5^{(1)} + 2 \cdot 4 a_4 \\ a_{L-2}^{(1)} = 2(L-1) a_{L-1} & a_2^{(1)} = a_4^{(1)} + 2 \cdot 3 a_3 \\ a_{L-3}^{(1)} = a_{L-1}^{(1)} + 2(L-2) a_{L-2} & a_1^{(1)} = a_3^{(1)} + 2 \cdot 2 a_2 \\ \vdots & a_0^{(1)} = a_2^{(1)} + 2 \cdot 1 a_1 \end{array}$$

2-2. チェビシエフ展開された関数の微分

行列の積で表す

$$\begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{L-2}^{(1)} \\ a_{L-1}^{(1)} \\ a_L^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot 1 & 0 & 2 \cdot 3 & 0 & \cdots & 0 & 2(L-1) & 0 \\ & 0 & 2 \cdot 2 & 0 & 2 \cdot 4 & \cdots & 2(L-2) & 0 & L \\ & & 0 & 2 \cdot 3 & 0 & \cdots & 0 & 2(L-1) & 0 \\ & & & 0 & 2 \cdot 4 & \cdots & 2(L-2) & 0 & L \\ & \vdots & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 & 2(L-1) & 0 \\ & & & & & & & 0 & L \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{L-2} \\ a_{L-1} \\ a_L \end{pmatrix}$$

微分演算行列を E ,そして $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_L)^T$, $\mathbf{a}^{(1)} = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_L^{(1)})^T$ のように書くと

$$\mathbf{a}^{(1)} = E\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = E\mathbf{a}^{(1)} = E^2\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}^{(3)} = E\mathbf{a}^{(2)} = E^3\mathbf{a}$$

\vdots

$$\mathbf{a}^{(k)} = E^k\mathbf{a}$$

高階微分に対しても同様に計算できるものとする

2-2. スペクトル展開

スペクトル展開前:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= G^\zeta + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) &= G^\chi + \nu_V \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= G^\theta + \nu_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\end{aligned}$$

スペクトル展開後:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_{n,m,l}}{\partial t} &= g_{n,m,l}^\zeta + \nu_V \left(\frac{2}{H} \right)^2 \zeta_{n,m,l}^{(2)} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{H} \right)^2 \chi_{n,m,l}^{(2)} &= g_{n,m,l}^\chi + \nu_V \left(\frac{2}{H} \right)^4 \chi_{n,m,l}^{(4)} \\ \frac{\partial \theta_{n,m,l}}{\partial t} &= g_{n,m,l}^\theta + \nu_V \left(\frac{2}{H} \right)^2 \theta_{n,m,l}^{(2)}\end{aligned}$$



$$z = \frac{1+x}{2}H \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} \\ &= \left(\frac{2}{H} \right) \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

2-2. スペクトル展開

➤ 行列 \mathbf{E} を使って書き換える (n, m は省略)

$$\frac{\partial \zeta_l}{\partial t} = g_l^\zeta + \nu_V \left(\frac{2}{H}\right)^2 \zeta_l^{(2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{H}\right)^2 \chi_l^{(2)} = g_l^\chi + \nu_V \left(\frac{2}{H}\right)^4 \chi_l^{(4)}$$

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} = g_l^\theta + \nu_V \left(\frac{2}{H}\right)^2 \theta_l^{(2)}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = \mathbf{g}^\zeta + \nu \mathbf{E}^2 \boldsymbol{\zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^2 \boldsymbol{\chi} = \mathbf{g}^\chi + \nu \mathbf{E}^4 \boldsymbol{\chi}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} = \mathbf{g}^\theta + \nu \mathbf{E}^2 \boldsymbol{\theta}$$



$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_L)^T$$

$$\mathbf{a}^{(k)} = \mathbf{E}^k \mathbf{a}$$

$$\nu = \left(\frac{2}{H}\right)^2 \nu_V$$

2-3. 時間積分法

時間積分法: 線形 (拡散) 項にはクランクニ科尔ソン法, その他の項には二次のアダムズバッシュフォース法を用いる (セミインプリシット法)

(例)

$$\frac{dx}{dt} = g + f$$

f : 線形項

g : その他の項

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} (f(t+h) + f(t)) + \frac{h}{2} (3g(t) - g(t-h)) \quad (h: \text{時間刻み幅})$$

クランクニ科尔ソン法

アダムズバッシュフォース法

この時間積分法を以下の三つの式に適用する

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = g^\zeta + \nu E^2 \zeta$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E^2 \chi = g^\chi + \nu E^4 \chi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = g^\theta + \nu E^2 \theta$$

2-3. 時間離散化

時間離散化後

$$\zeta(t+h) = \zeta(t) + \frac{h}{2} (\nu \mathbf{E}^2 \zeta(t+h) + \nu \mathbf{E}^2 \zeta(t)) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\zeta(t) - \mathbf{g}^\zeta(t-h))$$

$$\mathbf{E}^2 \chi(t+h) = \mathbf{E}^2 \chi(t) + \frac{h}{2} (\nu \mathbf{E}^4 \chi(t+h) + \nu \mathbf{E}^4 \chi(t)) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\chi(t) - \mathbf{g}^\chi(t-h))$$

$$\theta(t+h) = \theta(t) + \frac{h}{2} (\nu \mathbf{E}^2 \theta(t+h) + \nu \mathbf{E}^2 \theta(t)) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\theta(t) - \mathbf{g}^\theta(t-h))$$

未知数を左辺に移項 (I : 単位行列)

$$\left(I - \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^2 \right) \zeta(t+h) = \left(I + \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^2 \right) \zeta(t) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\zeta(t) - \mathbf{g}^\zeta(t-h))$$




$$\left(\mathbf{E}^2 - \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^4 \right) \chi(t+h) = \left(\mathbf{E}^2 + \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^4 \right) \chi(t) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\chi(t) - \mathbf{g}^\chi(t-h))$$

$$\left(I - \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^2 \right) \theta(t+h) = \left(I + \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^2 \right) \theta(t) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\theta(t) - \mathbf{g}^\theta(t-h))$$

2-3. 時間発展計算方法

➤ 連立一次方程式 $Ax = b$ の形で書ける

$$\begin{pmatrix} A_{00} & \cdots & \cdots & A_{0L} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{L0} & \cdots & \cdots & A_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_L \end{pmatrix}$$

			
$\left(I - \frac{h\nu}{2} E^2 \right)$	$\zeta(t+h)$	$\left(I + \frac{h\nu}{2} E^2 \right) \zeta(t) + \frac{h}{2} (3g^\zeta(t) - g^\zeta(t-h))$	
$\left(E^2 - \frac{h\nu}{2} E^4 \right)$	$\chi(t+h)$	$\left(E^2 + \frac{h\nu}{2} E^4 \right) \chi(t) + \frac{h}{2} (3g^\chi(t) - g^\chi(t-h))$	
$\left(I - \frac{h\nu}{2} E^2 \right)$	$\theta(t+h)$	$\left(I + \frac{h\nu}{2} E^2 \right) \theta(t) + \frac{h}{2} (3g^\theta(t) - g^\theta(t-h))$	

➤ しかし, この連立一次方程式を解いても, 鉛直境界条件を満たす解とならない.

2-3. チェビシェフタウ法

□ チェビシェフ展開を使うスペクトル法では, 境界条件の取り扱い方で主にガラーキン法, タウ法, 選点法の三つがある.

➤ 本数値モデルではタウ法を用いる.

□ チェビシェフタウ法

例として以下の拡散方程式を解くことを考える

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-1 < x < 1, 0 < t)$$

$$\text{境界条件: } u(-1, t) = u(1, t) = 0$$

まず, 関数展開の段階では, 境界条件を満たすことを考えない.

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^L a_l(t) T_l(x)$$

常微分方程式から求まる波数の範囲を下げて, 下げた分は境界条件の式から決定する

常微分方程式:

$$\frac{da_l}{dt} = a_l^{(2)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, L-2)$$

境界条件:

$$\sum_{l=0}^L (-1)^l a_l = 0 \quad \sum_{l=0}^L a_l = 0$$

2-3. 時間発展計算方法

➤ 境界条件も含めた式にする

$$\begin{pmatrix} A_{00} & & \cdots & & & & A_{0L} \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \cdots & & \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{L-1} \\ a_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

常微分方程式

境界条件

➤ この連立一次方程式を LU 分解を用いて解く

2-3. 境界条件が Held and Hou (1980) の場合

(例) Held and Hou (1980) の場合

$$\text{上端 } (z = H) : \quad w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\text{下端 } (z = 0) : \quad w = 0; \quad \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \quad \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = Cv, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

ポテンシャルでの表現

$$\text{上端 } (z = H) : \quad \chi = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\text{下端 } (z = 0) : \quad \chi = 0; \quad \nu_V \frac{\partial \zeta}{\partial z} = C\zeta, \quad \nu_V \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = C \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$



境界条件による制約の数:

渦度: 2 つ

ポロイダルポテンシャル: 4 つ

温位: 2 つ

□ 常微分方程式からは以下を求める

$$\left(I - \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^2 \right) \zeta(t+h) = \left(I + \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^2 \right) \zeta(t) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\zeta(t) - \mathbf{g}^\zeta(t-h)) \quad (l = 0, 1, 2, \dots, L-2)$$

$$\left(\mathbf{E}^2 - \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^4 \right) \chi(t+h) = \left(\mathbf{E}^2 + \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^4 \right) \chi(t) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\chi(t) - \mathbf{g}^\chi(t-h)) \quad (l = 0, 1, 2, \dots, L-4)$$

$$\left(I - \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^2 \right) \theta(t+h) = \left(I + \frac{h\nu}{2} \mathbf{E}^2 \right) \theta(t) + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}^\theta(t) - \mathbf{g}^\theta(t-h)) \quad (l = 0, 1, 2, \dots, L-2)$$

2-3. 境界条件による制約

渦度:

上端 ($z = H$): $\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$
 下端 ($z = 0$): $\nu_V \frac{\partial \zeta}{\partial z} = C \zeta$



展開係数での表現:

$$1 \cdot 1 \zeta_1 + 2 \cdot 2 \zeta_2 + 3 \cdot 3 \zeta_3 + \dots + (L-1)(L-1) \zeta_{L-1} + \frac{L^2}{2} \zeta_L = 0$$

$$\left\{ \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 \right\} \zeta_0 - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 1 \cdot 1 \right\} \zeta_1 + \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 2 \cdot 2 \right\} \zeta_2 - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 3 \cdot 3 \right\} \zeta_3$$

$$+ \dots - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} (L-1)(L-1) \right\} \zeta_{L-1} + \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} \frac{L^2}{2} \right\} \zeta_L = 0$$

発散:

上端 ($z = H$): $\chi = 0; \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0$
 下端 ($z = 0$): $\chi = 0; \nu_V \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = C \frac{\partial \chi}{\partial z}$



展開係数での表現:

$$\chi_0 + 2\chi_2 + 2\chi_4 + \dots + \chi_L = 0$$

$$\chi_1 + \chi_3 + \chi_5 + \dots + \chi_{L-1} = 0$$

$$\chi_0^{(2)} + 2\chi_2^{(2)} + \dots + \chi_L^{(2)} - \left(\frac{C}{\nu_V} \right) \left(\frac{H}{2} \right) \left\{ \frac{1}{2} \chi_0^{(1)} - \chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} + \dots + \frac{1}{2} \chi_L^{(1)} \right\} = 0$$

$$\chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \dots + \chi_{L-1}^{(2)} + \left(\frac{C}{2\nu_V} \right) \left(\frac{H}{2} \right) \left\{ \frac{1}{2} \chi_0^{(1)} - \chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} + \dots + \frac{1}{2} \chi_L^{(1)} \right\} = 0$$

$$\chi_0^{(2)} + 2\chi_2^{(2)} + 2\chi_4^{(2)} + \dots + \chi_L^{(2)}$$

$$= (1^2)2 \cdot 2\chi_2 + (1^2 + 3^2)2 \cdot 4\chi_4 + (1^2 + 3^2 + 5^2)2 \cdot 6\chi_6 + \dots$$

$$+ \{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (L-3)^2\} 2(L-2)\chi_{L-2} + \{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (L-1)^2\} L\chi_L$$

$$\chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \chi_5^{(2)} + \dots + \chi_{L-1}^{(2)}$$

$$= (2^2)2 \cdot 3\chi_3 + (2^2 + 4^2)2 \cdot 5\chi_5 + (2^2 + 4^2 + 6^2)2 \cdot 7\chi_7 + \dots$$

$$+ \{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (L-4)^2\} 2(L-3)\chi_{L-3} + \{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (L-2)^2\} 2(L-1)\chi_{L-1}$$

$$\frac{1}{2} \chi_0^{(1)} - \chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} - \dots + \frac{1}{2} \chi_L^{(1)}$$

$$= 1^2 \chi_1 - 2^2 \chi_2 + 3^2 \chi_3 - 4^2 \chi_4 + 5^2 \chi_5 - 6^2 \chi_6 + \dots$$

$$- (L-2)^2 \chi_{L-2} + (L-1)^2 \chi_{L-1} - \frac{L^2}{2} \chi_L$$

温位:

上端 ($z = H$): $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$
 下端 ($z = 0$): $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$



展開係数での表現:

$$1^2 \theta_1 + 3^2 \theta_3 + 5^2 \theta_5 + \dots + (L-3)^2 \theta_{L-3} + (L-1)^2 \theta_{L-1} = 0$$

$$2^2 \theta_2 + 4^2 \theta_4 + 6^2 \theta_6 + \dots + (L-2)^2 \theta_{L-2} + \frac{L^2}{2} \theta_L = 0$$

2-3. 時間発展計算方法

➤ 連立一次方程式 $Ax = b$ の形で書ける

$$\begin{pmatrix} A_{00} & \cdots & \cdots & A_{0L} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{L0} & \cdots & \cdots & A_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_L \end{pmatrix}$$

赤枠に対しては、以下の式で置き換える (例: 渦度)

$$1 \cdot 1 \zeta_1 + 2 \cdot 2 \zeta_2 + 3 \cdot 3 \zeta_3 + \cdots + (L-1)(L-1) \zeta_{L-1} + \frac{L^2}{2} \zeta_L = 0$$

$$\left\{ \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 \right\} \zeta_0 - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 1 \cdot 1 \right\} \zeta_1 + \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 2 \cdot 2 \right\} \zeta_2 - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 3 \cdot 3 \right\} \zeta_3$$

$$+ \cdots - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} (L-1)(L-1) \right\} \zeta_{L-1} + \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} \frac{L^2}{2} \right\} \zeta_L = 0$$

\uparrow	\uparrow	\uparrow
$\left(I - \frac{h\nu}{2} E^2 \right)$	$\zeta(t+h)$	$\left(I + \frac{h\nu}{2} E^2 \right) \zeta(t) + \frac{h}{2} (3g^\zeta(t) - g^\zeta(t-h))$
$\left(E^2 - \frac{h\nu}{2} E^4 \right)$	$\chi(t+h)$	$\left(E^2 + \frac{h\nu}{2} E^4 \right) \chi(t) + \frac{h}{2} (3g^\chi(t) - g^\chi(t-h))$
$\left(I - \frac{h\nu}{2} E^2 \right)$	$\theta(t+h)$	$\left(I + \frac{h\nu}{2} E^2 \right) \theta(t) + \frac{h}{2} (3g^\theta(t) - g^\theta(t-h))$

- 境界条件を連立させたこの連立一次方程式を解く。
 - 最初のステップ目はオイラー法で解く

目次

1. はじめに
2. 数値モデルの概要
 - 2-1. 支配方程式系からモデル支配方程式系へ
 - 2-2. 空間離散化
 - 水平方向: 球面調和関数, 鉛直方向: チェビシェフ多項式
 - 2-3. 時間離散化
 - クランクニコルソン & アダムズバッシュフォース法
3. 追試
 - 3-1. 加熱中心が赤道上有にある場合 (Held and Hou (1980))
 - 3-2. 加熱中心が赤道外にある場合 (Lindzen and Hou (1988))
4. まとめと今後の方針
5. 参考文献

3-1. Held and Hou (1980) の追試

□ Held and Hou (1980) の追試を行う

- ブシネスク流体プリミティブ方程式系を自転軸対称 (経度方向に一様) な場合の設定にすれば, Held and Hou (1980) の方程式系と同じになる.

□ 数値モデルに関する相違点

➤ 空間離散化

- 本モデル: スペクトル法
 - 水平方向の変換, 微分等には spml を用いた
- Held and Hou (1980): 二次の有限差分

➤ 時間積分

- 本モデル: クランクニコルソン法と二次のアダムズバッシュフォース法を組み合わせたセミインプリシット時間積分
- Held and Hou (1980): Matsuno's explicit "simulated backward difference" method

3-1. 実験設定

➤ パラメータ設定

$$\Omega = 2\pi / (8.64 \times 10^4) \text{ s}^{-1}, \quad a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ m s}^{-2}, \quad H = 8.0 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\Theta_0 = 300 \text{ K}, \quad \Delta_H = 1/3, \quad \Delta_v = 1/8, \quad \tau = 20 \text{ days}$$

➤ 放射平衡温位場

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3} \Delta_H (3 \sin^2 \phi - 1) + \Delta_v \left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right)$$

➤ 実験設定

- 鉛直動粘性係数 $\nu_V = 0.5, 1, 2.5, 5, 10, 25 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ の場合について計算する
- 初期条件: 等温 ($\theta = 300 \text{ K}$), 静止大気 ($u = v = w = 0$)
- 解像度等:

水平切断波数	126	緯度格子点数	192		
鉛直切断波数	48	鉛直格子点数	49		
時間刻み幅	240 s	積分時間	1000 days	出力間隔	1 days

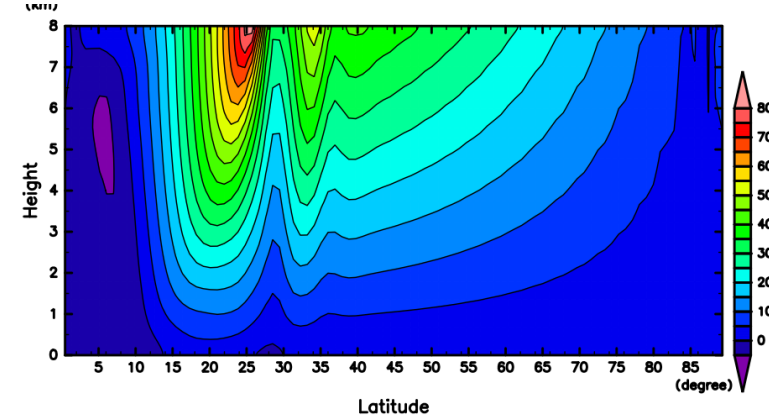
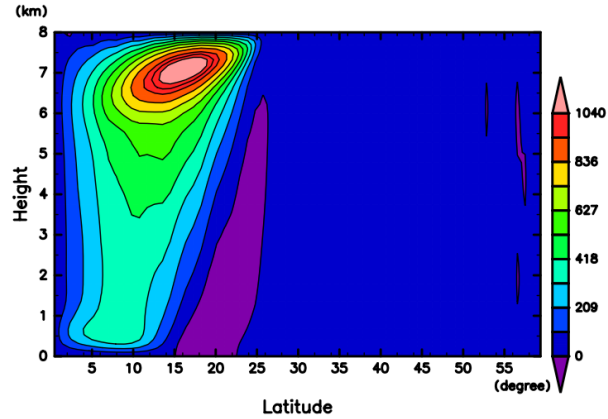
3-1. 子午面流線関数 & 東西風

$$\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

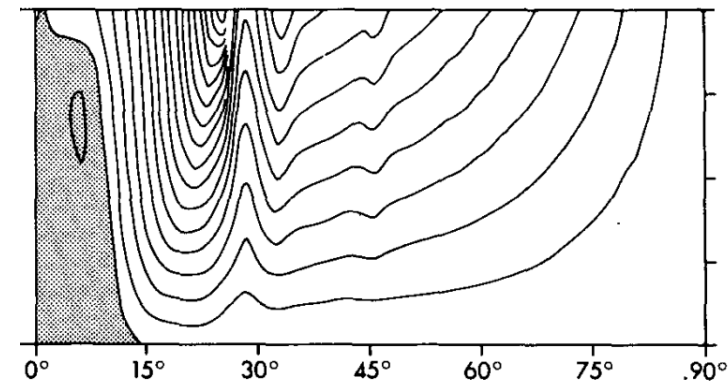
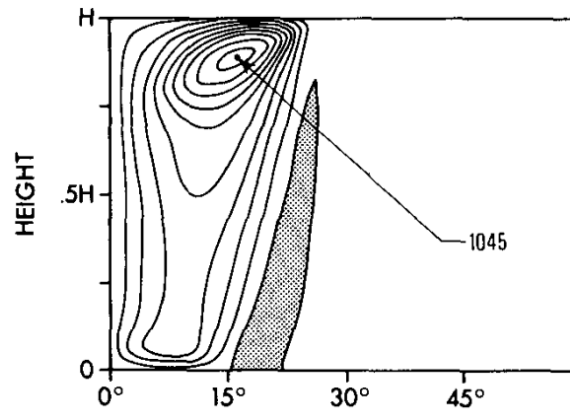
子午面流線関数 $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

東西風

追試結果



Held and Hou (1980)

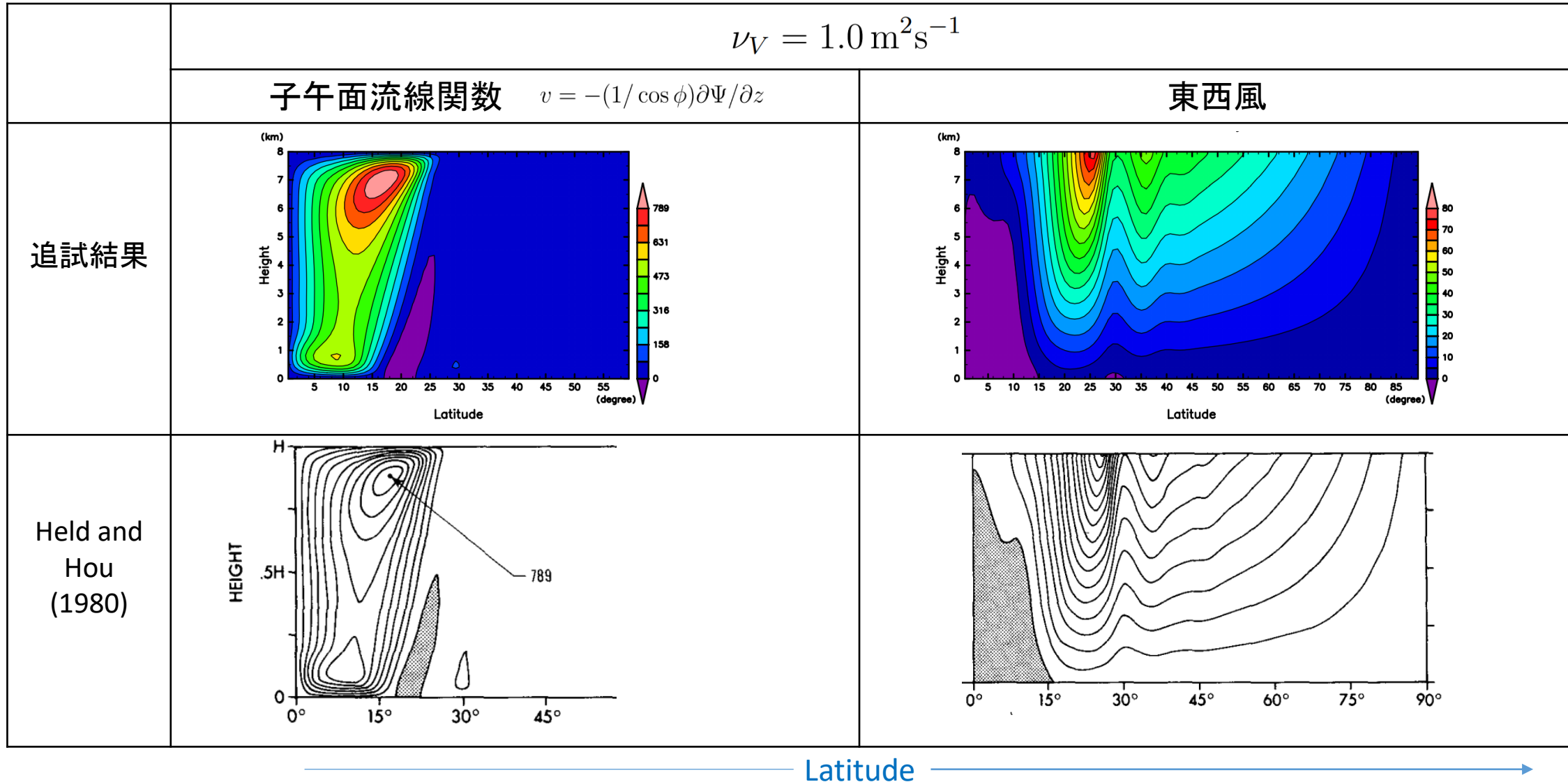


Latitude

Height

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日 のデータの平均

3-1. 子午面流線関数 & 東西風

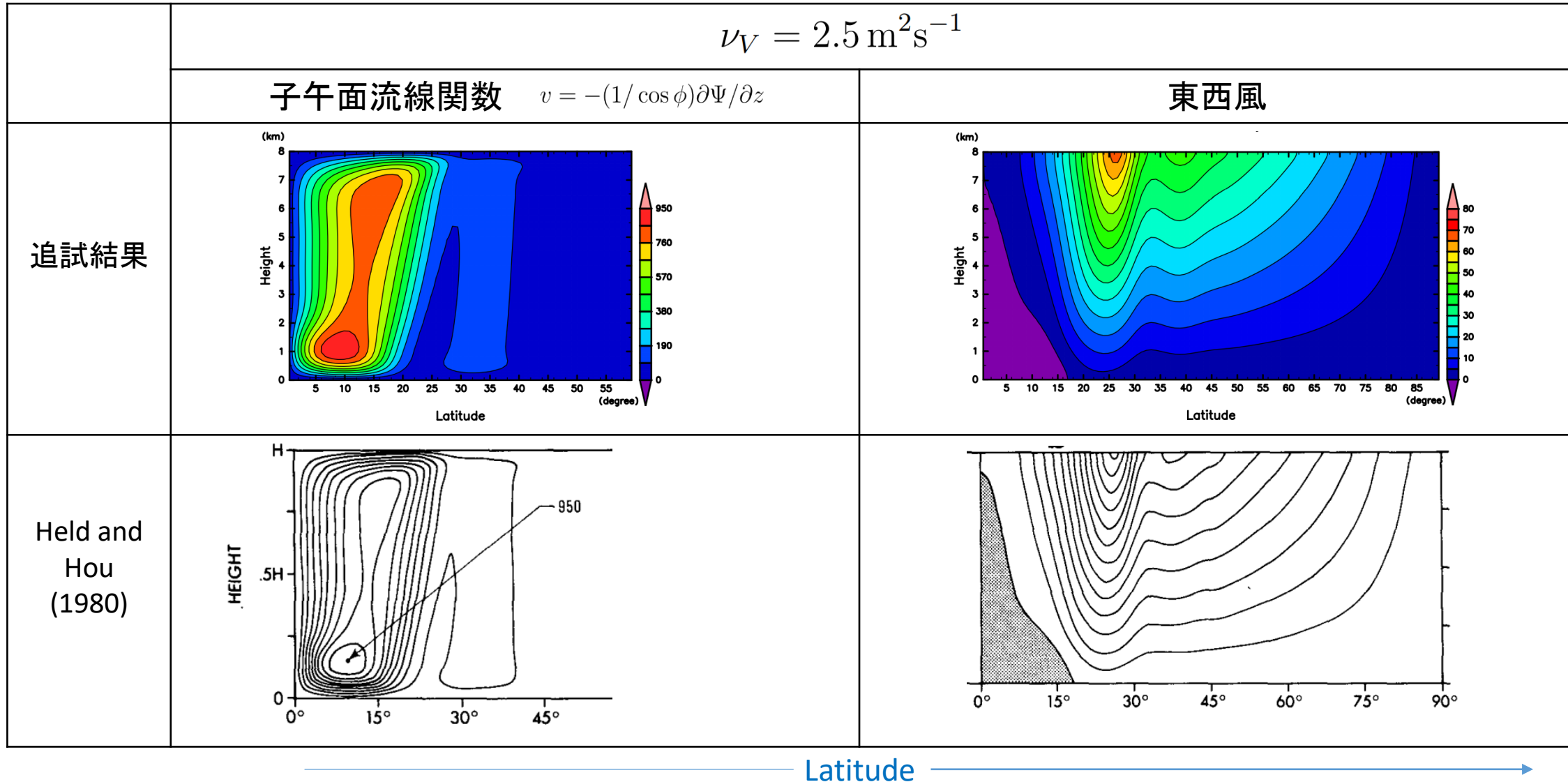


Height ↑

Latitude →

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日 のデータの平均

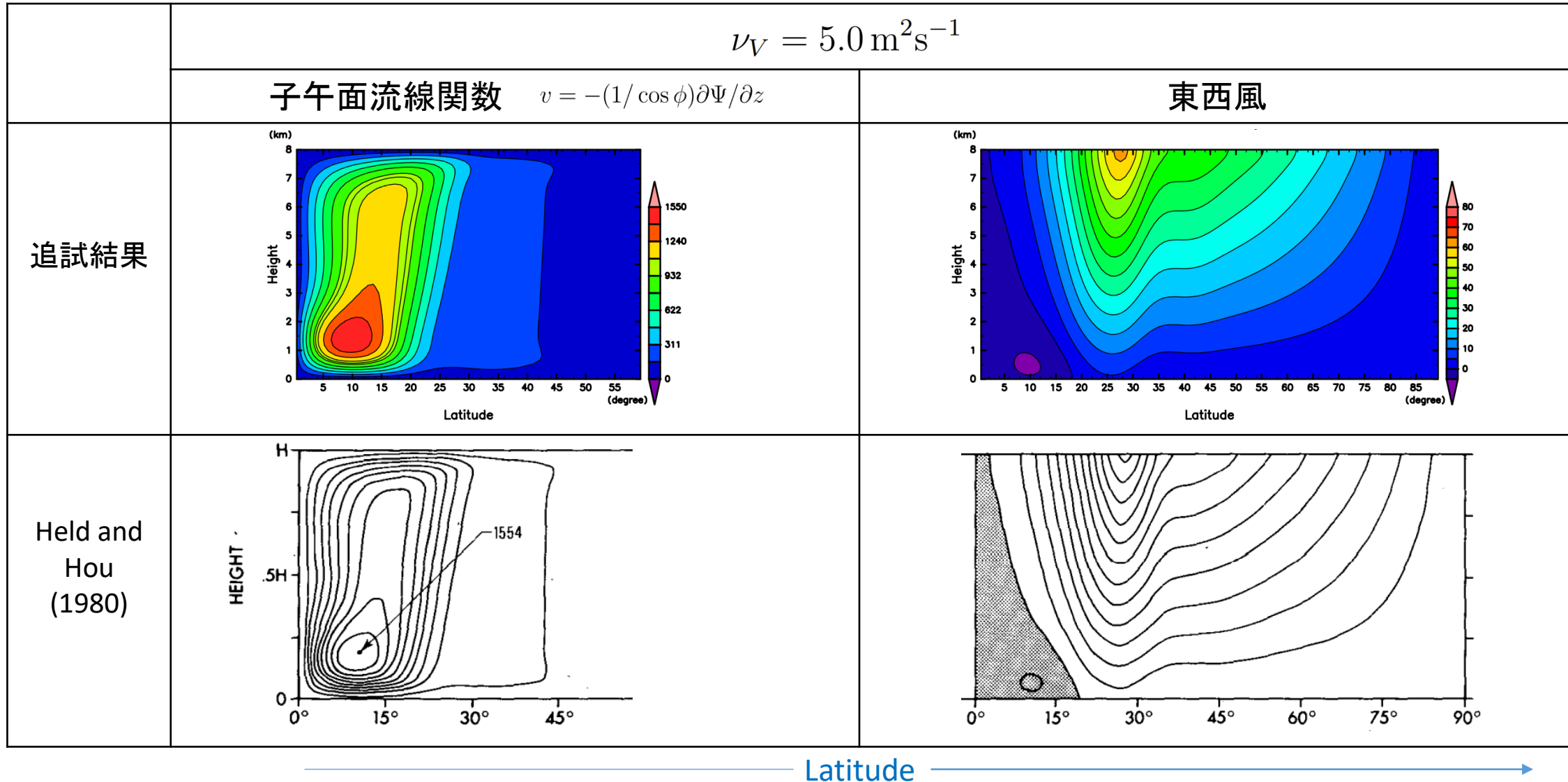
3-1. 子午面流線関数 & 東西風



Height

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日 のデータの平均

3-1. 子午面流線関数 & 東西風



Height

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日 のデータの平均

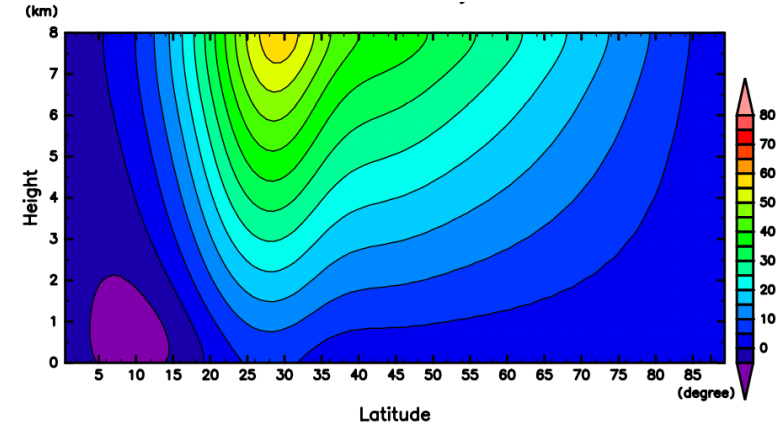
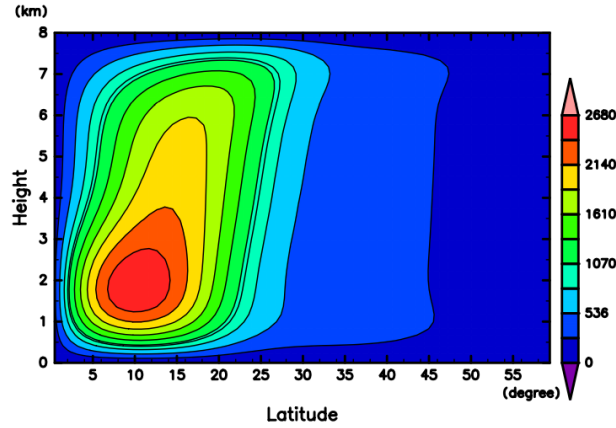
3-1. 子午面流線関数 & 東西風

$$\nu_V = 10.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

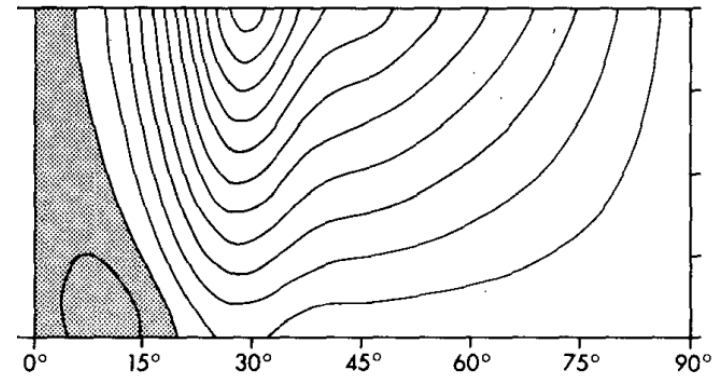
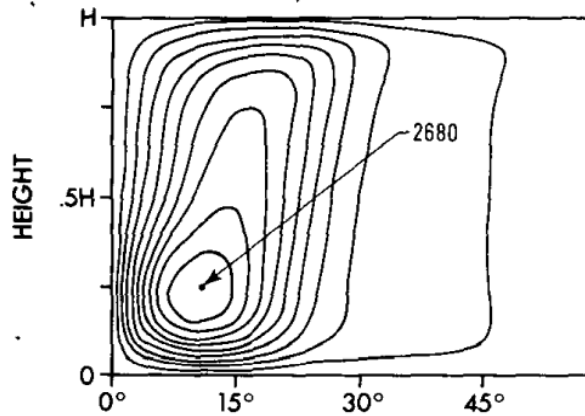
子午面流線関数 $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

東西風

追試結果



Held and Hou (1980)



Latitude

Height

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日 のデータの平均

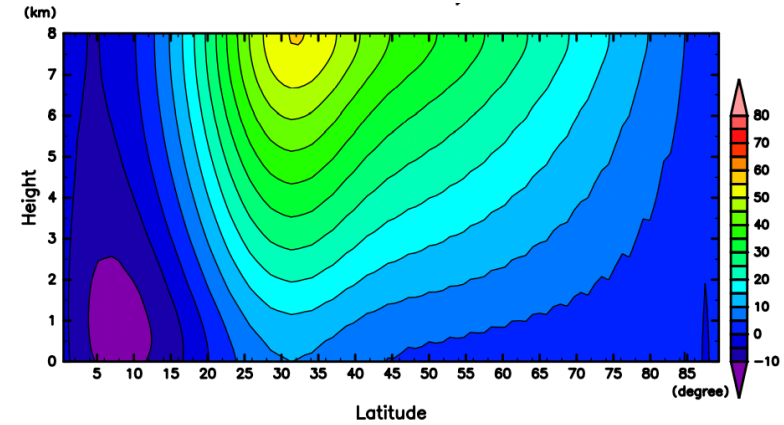
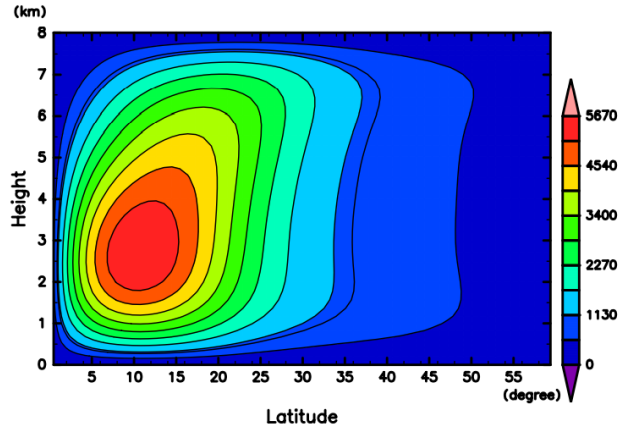
3-1. 子午面流線関数 & 東西風

$$\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

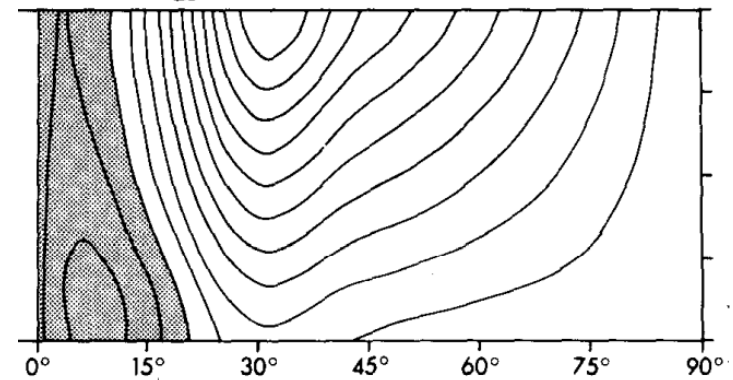
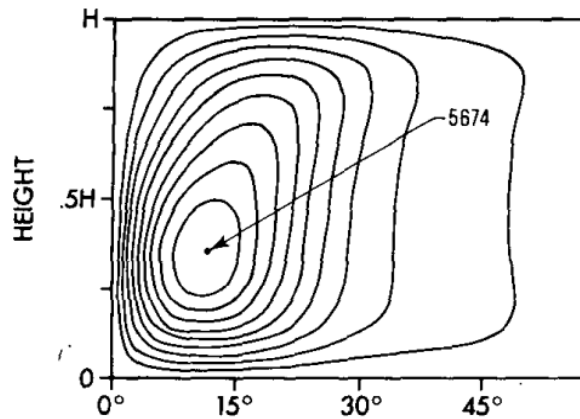
子午面流線関数 $v = -(1/\cos\phi)\partial\Psi/\partial z$

東西風

追試結果



Held and Hou (1980)



Latitude

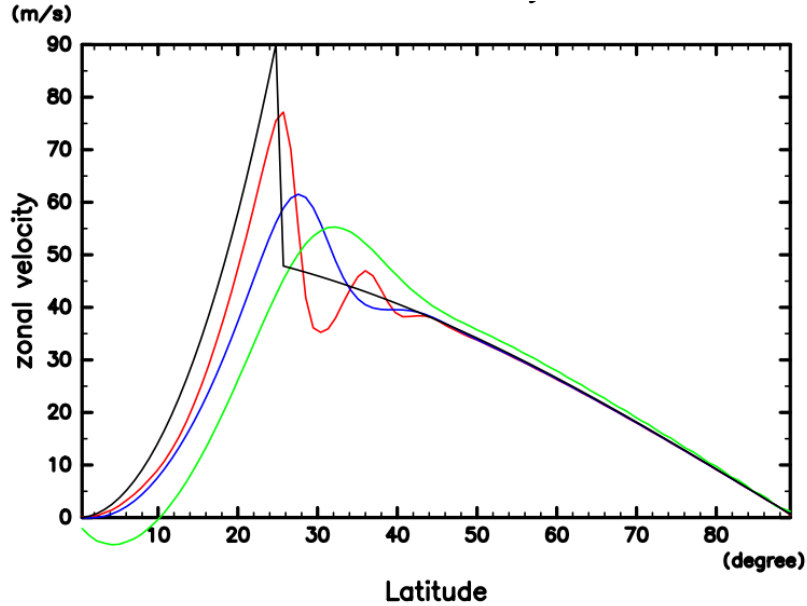
Height

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日 のデータの平均

3-1. 上部境界における東西風

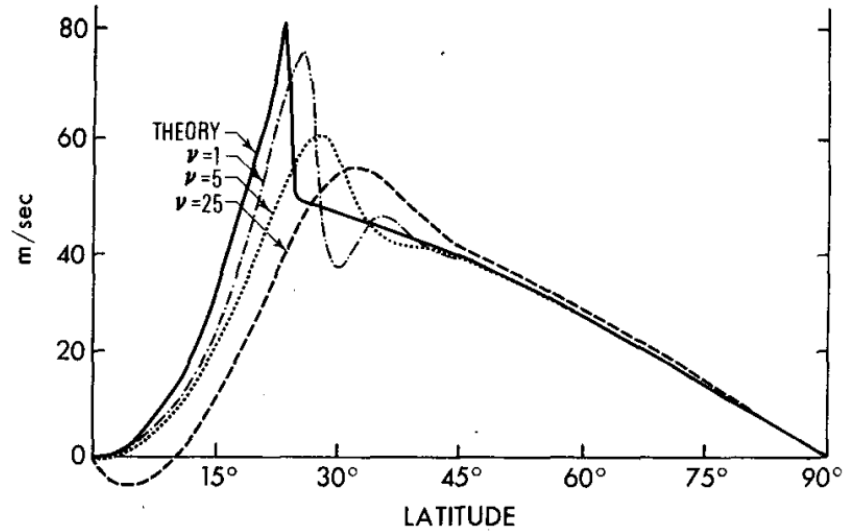
$u(\phi, H)$

追試結果



黒: 理論解, 赤: $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
 青: $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, 緑: $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

Held and Hou (1980)



理論解:

$$0 \leq \phi \leq \phi_H : u_M(\phi, H) = \Omega a \sin^2 \phi / \cos \phi$$

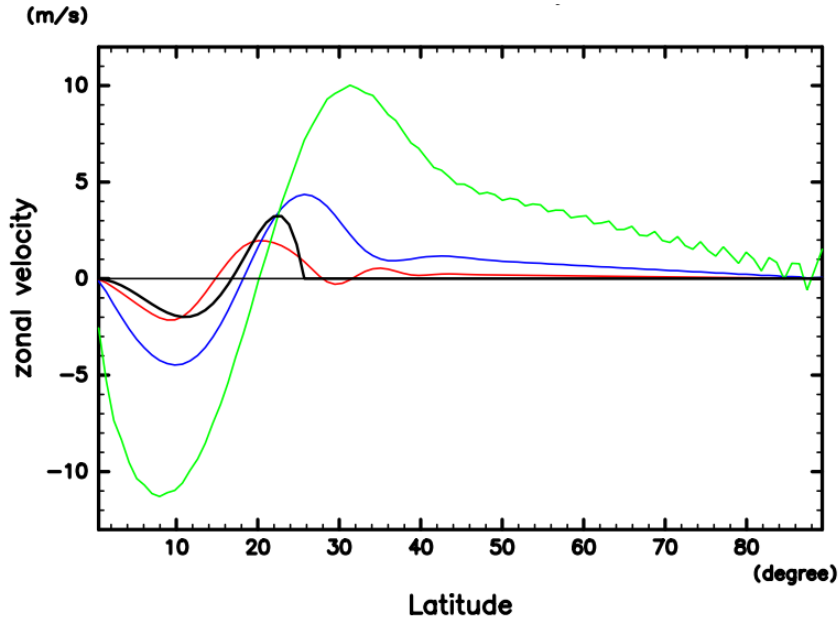
$$\phi_H < \phi : u_E(\phi, H) = \Omega a \cos \phi [(1 + 2R)^{1/2} - 1]$$

$$R = \frac{gH\Delta_H}{\Omega^2 a^2} \quad \phi_H = \left(\frac{5}{3} R \right)^{1/2}$$

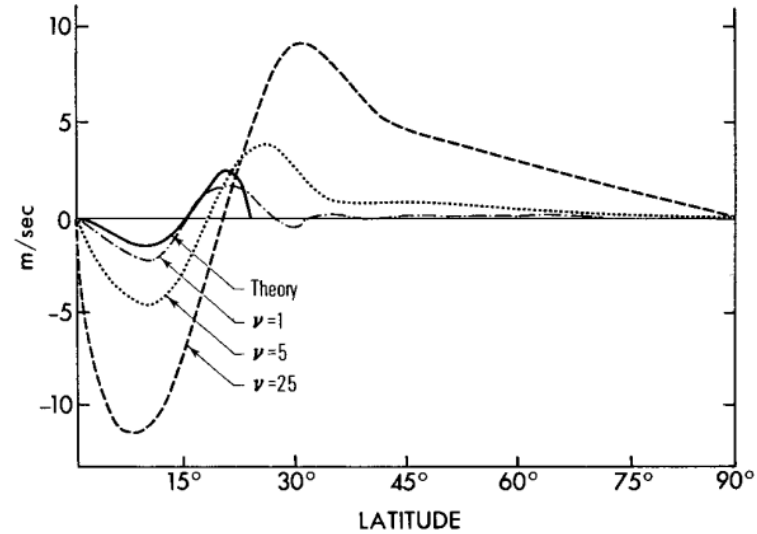
3-1. 下部境界における東西風

$u(\phi, 0)$

追試結果



Held and Hou (1980)



黒: 理論解, 赤: $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

青: $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, 緑: $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

理論解:

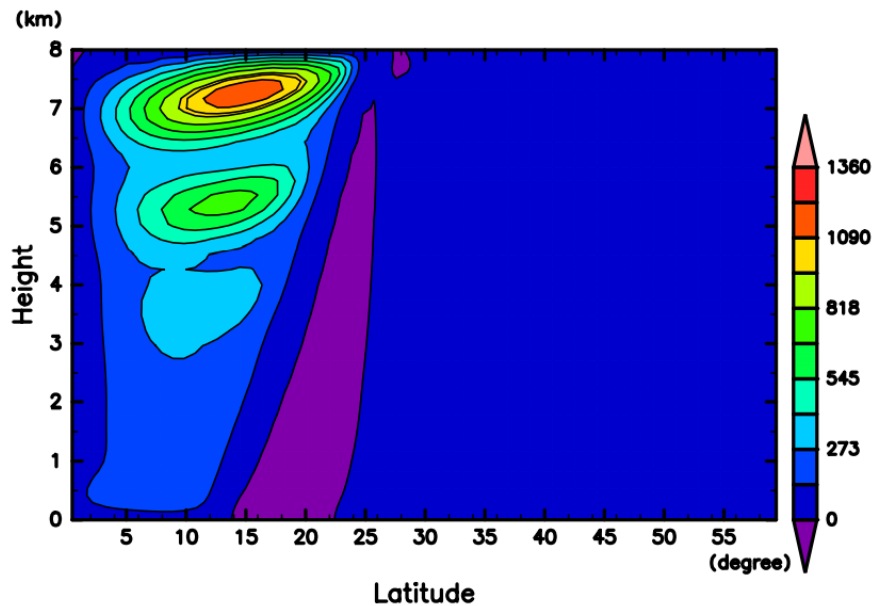
$$u(\phi, 0) = -\frac{25}{18} \frac{\Omega a H \Delta_H}{C \tau \Delta_v} R^2 \left[\left(\frac{\phi}{\phi_H} \right)^2 - \frac{10}{3} \left(\frac{\phi}{\phi_H} \right)^4 + \frac{7}{3} \left(\frac{\phi}{\phi_H} \right)^6 \right] \quad R = \frac{g H \Delta_H}{\Omega^2 a^2} \quad \phi_H = \left(\frac{5}{3} R \right)^{1/2}$$

3-1. 子午面流線関数

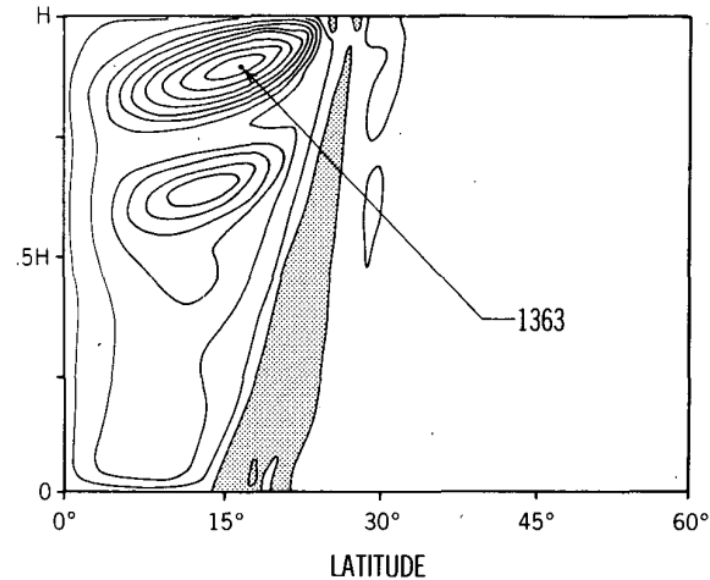
$\nu_V = 0.25 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ のときの子午面流線関数

- Held and Hou (1980) では、時間積分 1000 日後でも定常に至らない解であったと説明されている
 - この場合に対しても定常解はおそらく存在する (Held and Hou (1980))
- 今回の追試の設定では、時間積分にして 400 – 500 日の間で計算が発散してしまった
 - 下図は、200 – 400 日の計算結果に対する平均を描画

追試結果



Held and Hou (1980)



3-2. Lindzen and Hou (1988) の追試

➤ パラメータ設定

$$\Omega = 2\pi / (8.64 \times 10^4) \text{ s}^{-1}, \quad a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ m s}^{-2}, \quad H = 1.5 \times 10^4 \text{ m}$$
$$\Theta_0 = 300 \text{ K}, \quad \Delta_H = 1/6, \quad \Delta_v = 1/8, \quad \tau = 20 \text{ days}, \quad \nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

➤ 放射平衡温位場

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3} \Delta_H (3(\sin \phi - \sin \phi_0)^2 - 1) + \Delta_v \left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right)$$

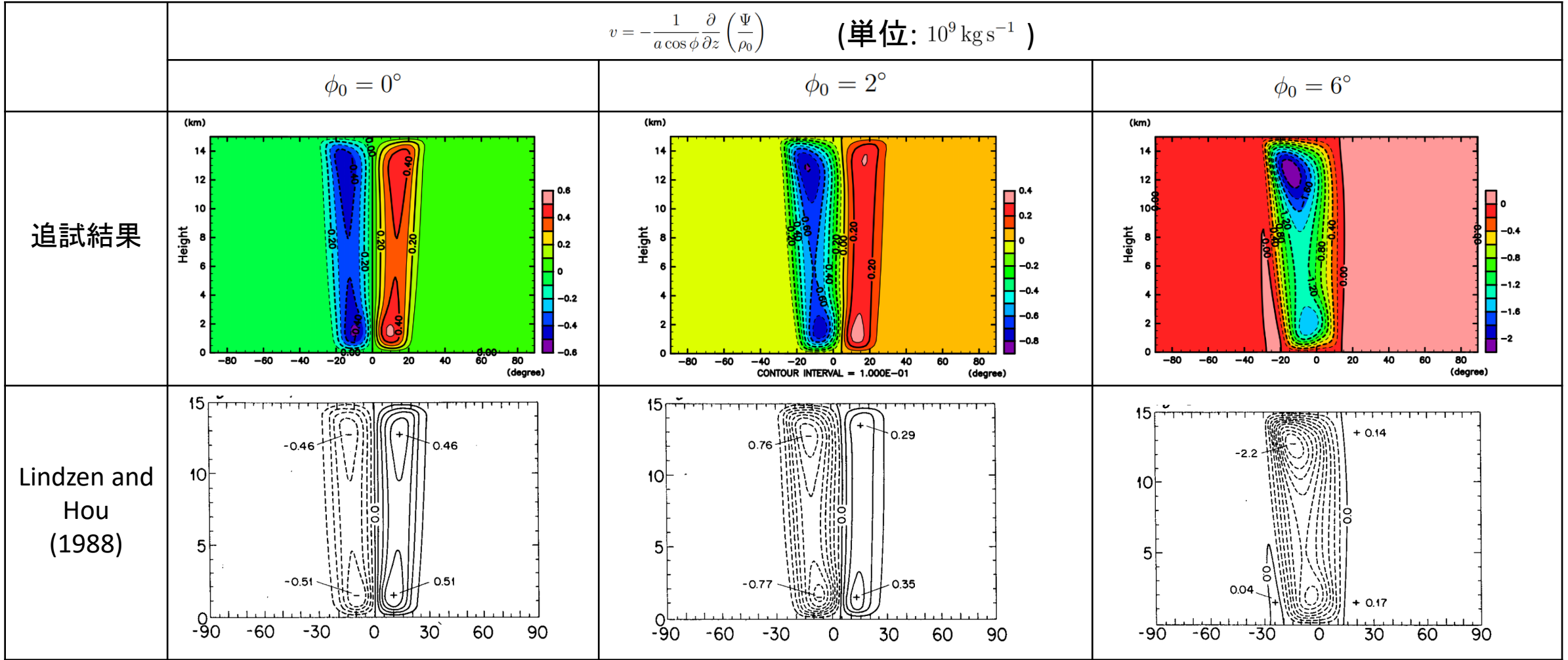
➤ 実験設定

- 加熱中心の緯度 $\phi_0 = 0^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ$ のそれぞれについて計算する
- 初期条件: 等温 ($\theta = 300 \text{ K}$), 静止大気 ($u = v = w = 0$)
- 解像度等:

水平切断波数	126	緯度格子点数	192		
鉛直切断波数	32	鉛直格子点数	33		
時間刻み幅	240 s	積分時間	1000 days	出力間隔	1 days

3-2. 質量流線関数

$$v = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Psi}{\rho_0} \right) \quad (\text{単位: } 10^9 \text{ kg s}^{-1})$$

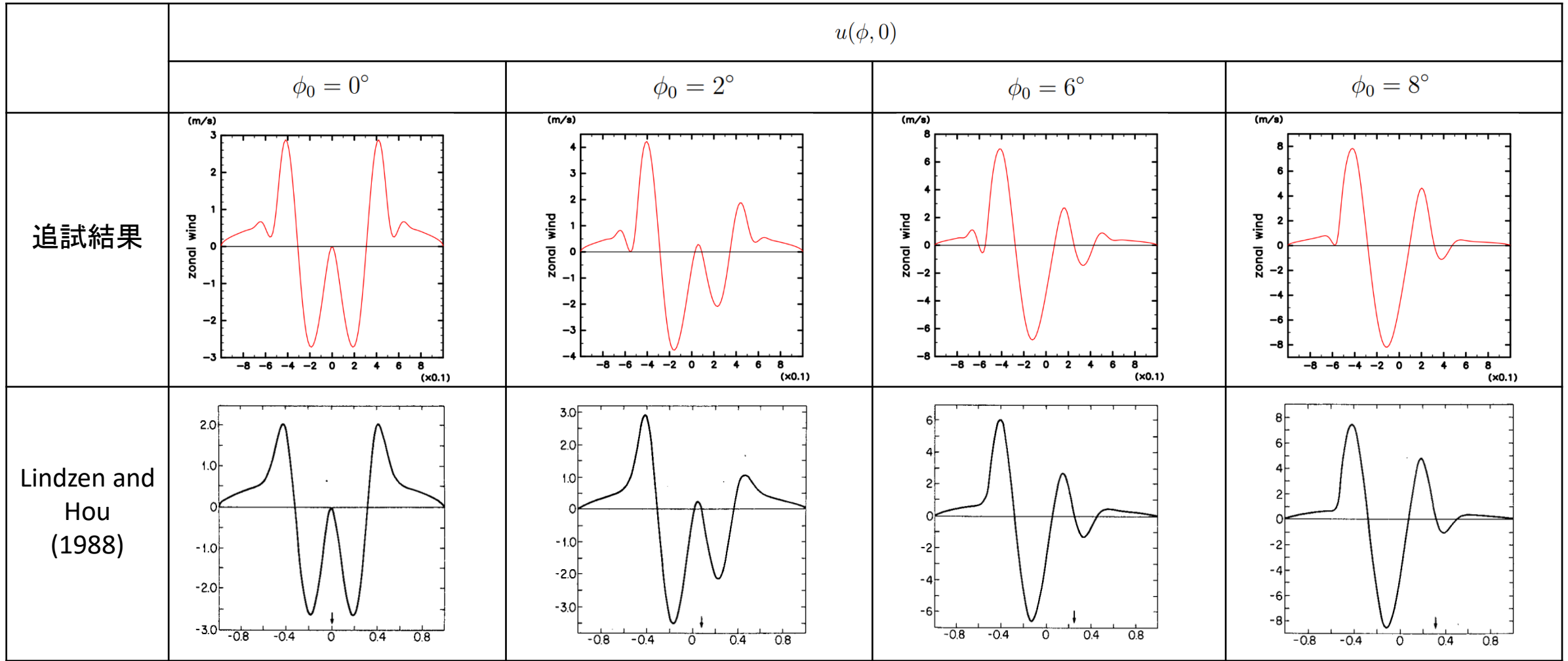


Height ↑

← Latitude →

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日 のデータの平均

3-2. 地表面東西風



————— Sin Latitude —————→

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日のデータの平均

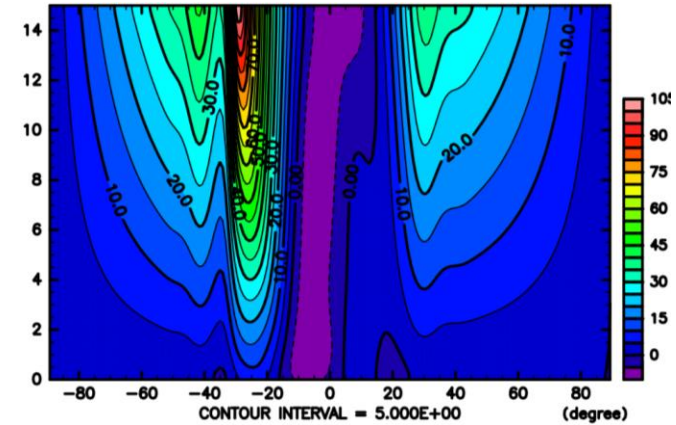
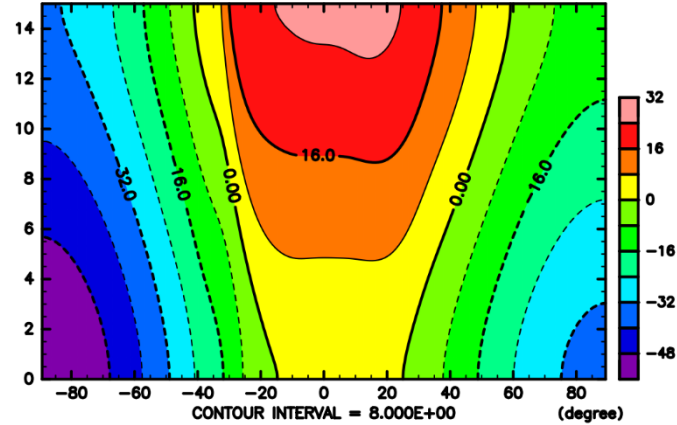
3-2. 温位場 & 東西風

$$\phi_0 = 6^\circ$$

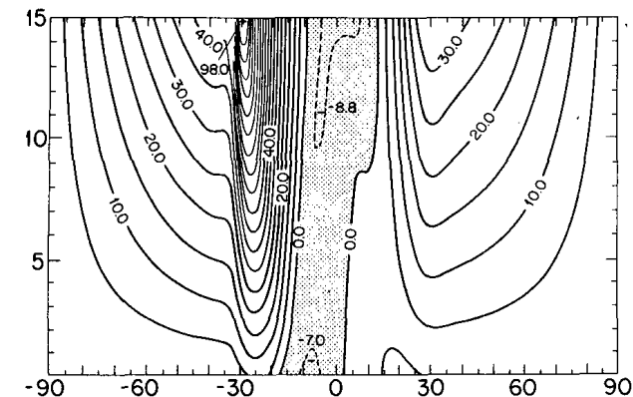
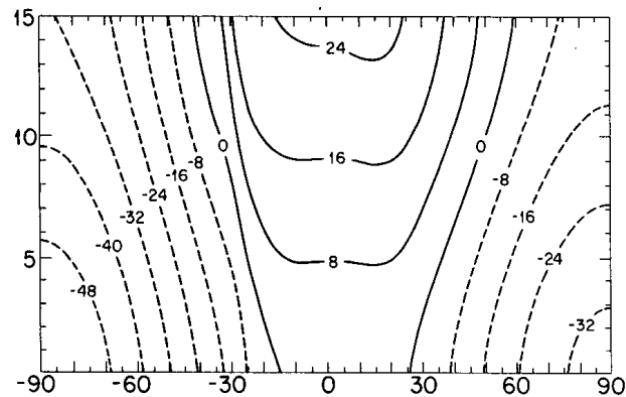
温位場 ($\theta - 300$)

東西風

追試結果



Lindzen and Hou (1980)



Height

Latitude

* 上段: 時間発展で得られた 800 - 1000 日 のデータの平均

4. まとめ & 今後の方針

□ まとめ

- 空間離散化にスペクトル展開を用いる数値モデルの構築を試みた
 - 水平方向: 球面調和関数, 鉛直方向: チェビシェフ多項式
- 空間離散化に差分を用いるモデルでの数値計算結果の追試を行った
 - Held and Hou (1980) の追試
 - 粘性係数が小さい場合の, 子午面東西風の第二のジェット of 構造 (強度, 形) が Held and Hou (1980) のものと異なる
 - Lindzen and Hou (1988) の追試
 - 冬半球側にできる, 子午面東西風の第二のジェット of 構造が異なる

□ 今後の方針

- Fang and Tung (1998) の追試
- 季節変化するハドレー循環の力学的構造を調べる

5. 参考文献

- 石岡圭一, 2004: 「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会
- 山本博基, 2009: 「修士論文付録 B」, http://www.gfd-dennou.org/member/hiroki/file/BPmodel/Note_BPM.pdf
- 吉田茂生, 2020: 「直交多項式」,
http://dyna.geo.kyushu-u.ac.jp/~yoshida/japanese/science-notes/orthogonal_polynomials/polynomials.pdf
- 北内英明, 木田重雄, 1999: 「回転球殻内のMHDシミュレーションコードの開発」,
<https://www.nifs.ac.jp/report/NIFS-MEMO-029.pdf>
- GARY A. Glatzmaier, 1983: 「Numerical Simulations of Stellar Convective Dynamos. I. The Model and Method」,
https://websites.pmc.ucsc.edu/~glatz/pub/glatzmaier_jcp_1984.pdf
- Duane Johnson, 1996: 「Chebyshev Polynomials in the Spectral Tau Method and Applications to Eigenvalue Problems」,
<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19960029104/downloads/19960029104.pdf>

5. 参考文献

- A. G. Morris and T. S. Horner, 1977: 「Chebyshev Polynomials in the Numerical Solution of Differential Equations」,
<https://www.ams.org/journals/mcom/1977-31-140/S0025-5718-1977-0443359-7/S0025-5718-1977-0443359-7.pdf>
- Isaac M. Held and Arthur Y. Hou, 1980: 「Nonlinear Axially Symmetric Circulations in a Nearly Inviscid Atmosphere」,
https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/37/3/1520-0469_1980_037_0515_nascia_2_0_co_2.xml?tab_body=pdf
- Richard S. Lindzen and Arthur Y. Hou, 1988: 「Hadley Circulations for Zonally Averaged Heating Centered off the Equator」,
https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/45/17/1520-0469_1988_045_2416_hcfzah_2_0_co_2.xml

5. 参考文献

- 地球流体電脳倶楽部, 2002: 「階層的地球流体スペクトルモデル集 SPMODEL」 <https://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/index.htm.ja>
- 地球流体電脳倶楽部, : 「大気大循環モデル DCPAM, 定式化文書」
 - https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf
 - https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf