

# 二流近似法を用いた放射伝達方程式の導出と 正確さの評価

田村 笙

神戸大学 理学部 惑星学科  
流体地球物理学教育研究分野

2022/03/25

## 要旨

本研究では放射伝達計算の計算量削減を目的とし、計算手法について検討した。まず初めに均質大気を仮定し、散乱を考慮した放射伝達方程式を二流近似法を用いて近似することで放射フラックスの計算式を求めた。次に地球大気構造を想定したパラメータ条件を設定し、大気上端および下端の放射フラックスを計算した。そして、計算結果の正確さを評価した。

# 目次

第1章	はじめに	1
第2章	放射に関する基本的知識	2
2.1	放射フラックスと放射輝度	2
2.2	散乱位相関数と単一散乱アルベド	2
2.3	光学的深さ	3
2.4	放射伝達方程式	3
2.4.1	放射伝達方程式の基本形	3
2.4.2	放射伝達方程式の導出	4
2.4.3	平行平面大気の放射伝達方程式	5
第3章	二流近似法を用いた放射伝達方程式	6
3.1	散乱を考慮した放射伝達方程式	6
3.2	二流近似法	8
3.2.1	基本理論	8
3.2.2	Eddington 近似	9
3.2.3	$\delta$ -Eddington 近似	11

3.3 放射フラックスの計算式 . . . . .	13
<b>第4章 放射フラックスの計算</b>	<b>15</b>
4.1 条件設定 . . . . .	15
4.2 計算結果 . . . . .	16
4.3 計算式の評価 . . . . .	16
<b>第5章 まとめ</b>	<b>17</b>
<b>付録 A Legendre 多項式</b>	<b>18</b>
<b>付録 B 球面調和関数の加法定理と (3.13) の導出</b>	<b>19</b>
<b>付録 C (3.37a), (3.37b) の導出</b>	<b>21</b>
<b>謝辞</b>	<b>23</b>
<b>参考文献</b>	<b>24</b>

# 第1章 はじめに

大気科学における重要な過程の一つとして放射伝達が挙げられ, 多くの気候モデルにおいて放射伝達過程が考慮される. 従って, これらの気候モデルのシミュレーションにかかる時間を短縮するために, 放射伝達計算の高速化や計算量の削減が求められている. 本研究では放射伝達の計算量の削減を目的に, 過去に確立された計算手法を元に放射伝達のための計算式を求める.

地球大気の放射伝達過程において, 放射を太陽光の周波数域と地表からの放射の周波数域に分離して考えることが一般的である. 前者の放射は太陽放射, 後者の放射は地球放射と呼ばれる. 本研究では太陽放射を想定した放射伝達過程を考える. 太陽放射は可視光域に周波数のピークを持ち, 大気中の雲やエアロゾルによって強い散乱を受ける. 従って今回は大気による散乱を考慮し, 簡単のため均質大気 (光学的特性が一様な大気) での放射伝達方程式を考える. そして二流近似法を用いて放射伝達方程式を近似することで, 大気上端と下端での上向きおよび下向き放射フラックスの計算式を求める. 次に, 地球大気構造を想定した状況をいくつか設定し, 得られた計算式を用いて放射フラックスを計算する. そして計算結果の正確さを評価することで, 実用的な正確さが確保されているかを検討する.

## 第2章 放射に関する基本的知識

計算式の導出に向けて、本章では放射に関する基礎知識を説明する。

### 2.1 放射フラックスと放射輝度

ある基準面の単位面積を通る、単位時間あたりの放射エネルギーを**放射フラックス**という。今回は任意の周波数について考えるため、単位周波数あたりの放射フラックス  $F_\nu$  を用いる。

また、単位立体角  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  を通る放射フラックスを**放射輝度**といい、 $I_\nu$  と表す。ここで  $\theta$  は天頂角、 $\phi$  は方位角である。放射フラックスと放射輝度の間には次の関係が成り立つ。

$$F_\nu = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu I_\nu d\phi d\mu. \quad (2.1)$$

ここで  $\mu \equiv \cos\theta$  と定義している。今後は式を見やすくするため、 $\theta$  の代わりに  $\mu$  を用いることにする。

### 2.2 散乱位相関数と単一散乱アルベド

$(\mu', \phi')$  方向の入射光が  $(\mu, \phi)$  方向に散乱される確率を表す関数を**散乱位相関数**といい、 $p_\nu(\mu, \phi; \mu', \phi')$  と表される。ここで  $\Theta$  は入射光と散乱光が成す角である。散乱位相関数は規格化条件

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p_\nu(\mu, \phi; \mu', \phi') d\phi d\mu = 4\pi \quad (2.2)$$

を満たす。

また, 放射エネルギーの消散率に対する散乱率の比を**単一散乱アルベド**といい,

$$\varpi_{\nu} \equiv \frac{\beta_{sv}}{\beta_{ev}} = \frac{\beta_{sv}}{\beta_{av} + \beta_{sv}} \quad (2.3)$$

と定義される. ここで  $\beta_{ev}$ ,  $\beta_{av}$ ,  $\beta_{sv}$  をそれぞれ消散係数, 吸収係数, 散乱係数といい, これらは放射エネルギーの消散率, 吸収率, 散乱率を示す. この三つの係数には  $\beta_{ev} = \beta_{av} + \beta_{sv}$  の関係が成り立つ.

## 2.3 光学的深さ

媒体中に任意の幾何学距離  $s$  を取ると, 光学的距離は

$$\tau \equiv \int_s \beta_{ev} ds \quad (2.4)$$

と定義される. (2.4) を微分の形で書くと

$$d\tau = \beta_{ev} ds \quad (2.5)$$

となる.

本研究では  $\tau$  を大気上端からの鉛直方向の光学的距離である, **光学的深さ** で定義する. (2.5) より, 光学的深さ  $\tau$  は地表からの高さ  $z$  を用いて

$$d\tau = -\beta_{ev} dz \quad (2.6)$$

と表される.

## 2.4 放射伝達方程式

### 2.4.1 放射伝達方程式の基本形

放射伝達方程式とは, 放射の吸収, 散乱, あるいは射出といった媒体との相互作用による放射エネルギーの変化を表す方程式である. 放射伝達方程式の基本形は

$$\frac{dI_{\nu}}{k_{ev}\rho ds} = -I_{\nu} + J_{\nu} \quad (2.7)$$

である. ここで  $J_\nu$  は放射源関数であり, 放射エネルギーの増加を示す. また,  $k_{e\nu}$  は質量消散係数であり,

$$\beta_{e\nu} = k_{e\nu}\rho \quad (2.8)$$

を満たす.

## 2.4.2 放射伝達方程式の導出

微小距離  $ds$  を進む放射について, 図 2.1 のような放射伝達過程を考える. 消散による放射輝度の減少は

$$\begin{aligned} dI_\nu &= -\beta_{e\nu}I_\nu ds \\ &= -k_{e\nu}\rho I_\nu ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

と表される. また, 散乱や媒体の射出による放射輝度の増加は

$$dI_\nu = j_\nu\rho ds \quad (2.10)$$

と表される. ここで  $j_\nu$  は質量射出係数である. (2.9), (2.10) をまとめて

$$dI_\nu = -k_{e\nu}\rho I_\nu ds + j_\nu\rho ds \quad (2.11)$$

と書くことができ, 両辺を  $k_{e\nu}\rho$  で割ると放射伝達方程式 (2.7) が得られる. ここで放射源関数を

$$J_\nu \equiv \frac{j_\nu}{k_{e\nu}} \quad (2.12)$$

と定義している.

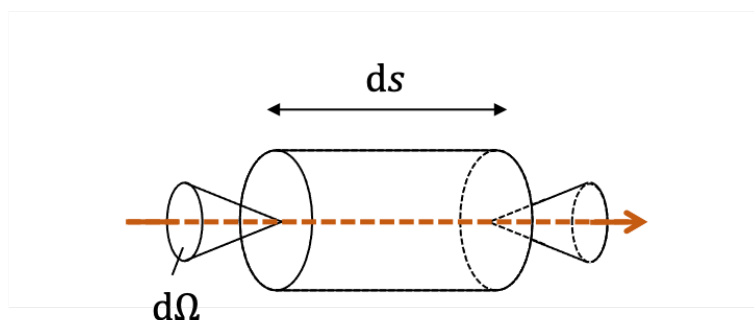


図 2.1: 放射伝達の概念図.



### 2.4.3 平行平面大気の放射伝達方程式

平行平面大気とは, 光学的特性が水平方向に一様な大気のことである. 本研究では平行平面大気を仮定し, 水平方向の変化を考えない.

図 2.2 より,

$$\begin{aligned} dz &= \cos \theta ds \\ &= \mu ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

が成り立つ. 従って, 放射伝達方程式 (2.7) は

$$\mu \frac{dI_\nu(z)}{k_{ev}\rho dz} = -I_\nu(z) + J_\nu(z) \quad (2.14)$$

となる. さらに (2.4), (2.8) より, (2.14) を光学的深さ  $\tau$  を用いた形

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau)}{d\tau} = I_\nu(\tau) - J_\nu(\tau) \quad (2.15)$$

で表すことができる.

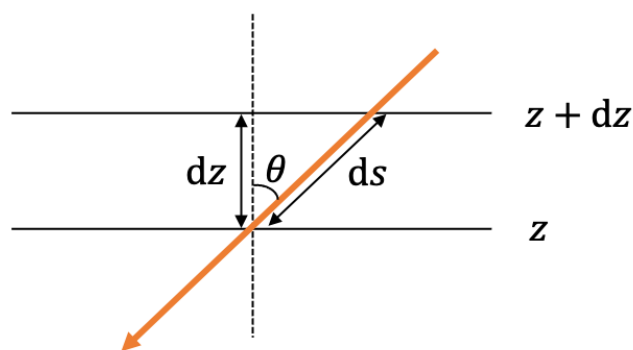


図 2.2: 放射の方向の微小距離  $ds$  と 微小高さ  $dz$  の関係図.

## 第3章 二流近似法を用いた放射伝達方程式

本章では二流近似法を用いて放射伝達方程式を近似し、放射フラックスの計算式を導出する。一連の式変形については主に Meador and Weaver (1980) を参考にしている。また、後の節で紹介する  $\delta$ -Eddington 近似は Joseph and Wiscombe (1976) に基づいている。

### 3.1 散乱を考慮した放射伝達方程式

本研究では太陽放射の放射伝達過程を考えるため、大気からの射出を無視し、代わりに散乱過程を考慮する。均質大気は平行平面大気の特別な場合（光学的特性が鉛直方向にも一様な場合）であることから、(2.15) を元に放射伝達方程式を考える。均質大気において光学的深さ  $\tau$  での  $(\mu, \phi)$  方向の放射輝度の変化を考えると、放射伝達方程式は

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(\tau, \mu, \phi)}{\partial \tau} = & I(\tau, \mu, \phi) \\ & - \frac{\varpi}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau, \mu', \phi') d\phi' d\mu' \\ & - \frac{\varpi}{4} p(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) F_s e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

と表される。ここで、 $F_s$  は太陽放射フラックスであり、各物理量の添字  $\nu$  を省略している。(3.1) の右辺第一項は消散による放射輝度の減少、第二項と第三項は散乱による放射輝度の増加を示す。このうち第二項は大気による光の多重散乱を表し、 $(\mu', \phi')$  方向から入射し  $(\mu, \phi)$  方向へ散乱する放射を  $\mu', \phi'$  について積分することで得られる。第三項は  $(-\mu_0, \phi_0)$  方向からの太陽光の直達成分の一次散乱を表す。

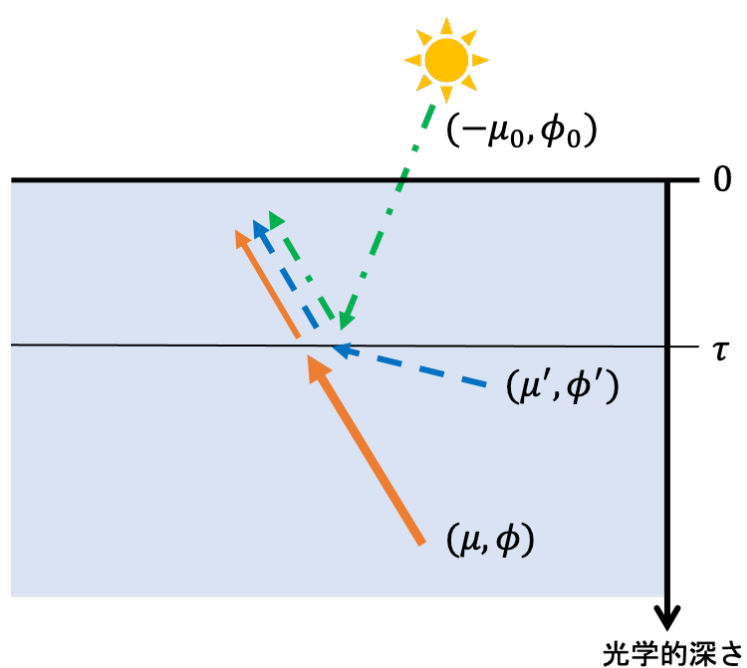


図 3.1: 均質大気における放射伝達. (3.1) の右辺第一項, 第二項, 第三項がそれぞれ実線 (橙), 破線 (青), 一点鎖線 (緑) の矢印に対応する.

## 3.2 二流近似法

二流近似法 (two-stream approximation method) とは, 放射輝度を上向き放射フラックス

$$F^+(\tau) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu I(\tau, \mu, \phi) d\phi d\mu \quad (3.2)$$

と, 下向き放射フラックス

$$\begin{aligned} F^-(\tau) &= \int_{-1}^0 \int_0^{2\pi} \mu I(\tau, \mu, \phi) d\phi d\mu \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu I(\tau, -\mu, \phi) d\phi d\mu \end{aligned} \quad (3.3)$$

の二つにまとめることで, 放射伝達方程式を二つの微分方程式

$$\frac{\partial F^+}{\partial \tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - S^+ \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial F^-}{\partial \tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + S^- \quad (3.4b)$$

に近似する手法であり, (3.4a), (3.4b) は二流方程式と呼ばれる. 二流方程式により放射フラックスの計算を上向きと下向きの二方向に限定できるため, この近似法は放射伝達計算においてしばしば用いられる. 二流近似法には様々な近似手法があり, 選んだ手法によって  $\gamma_1, \gamma_2$  が決定される. それらの手法のうち, 今回は Eddington 近似と  $\delta$ -Eddington 近似を紹介する.

### 3.2.1 基本理論

$I(\tau, \mu, \phi)$  の  $\phi$  積分を

$$I(\tau, \mu) \equiv \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu, \phi) d\phi \quad (3.5)$$

と定義する. このとき (3.2), (3.3) より,  $F^+$  と  $F^-$  は  $I(\tau, \mu)$  を用いて

$$F^+(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, \mu) d\mu \quad (3.6a)$$

$$F^-(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, -\mu) d\mu \quad (3.6b)$$

と表される. また,  $p(\mu, \phi; \mu', \phi')$  が<sup>3</sup> 方位角に依存しないと仮定し,

$$p(\mu, \mu') \equiv p(\mu, \phi; \mu', \phi') \quad (3.7)$$

と表す. (3.1) を  $\phi$  について 0 から  $2\pi$  まで積分し, (3.5) と (3.7) を代入すると,

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} = I(\tau, \mu) - \frac{\varpi}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' - \frac{\pi}{2} p(\mu, -\mu_0) F_s \varpi e^{-\tau/\mu_0} \quad (3.8)$$

となる. (3.8) を  $\mu$  について 0 から 1 まで積分すると, (3.6a) より

$$\frac{dF^+(\tau)}{d\tau} = \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{\varpi}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu - \pi F_s \varpi \beta_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (3.9)$$

となり, ここで  $\beta_0$  は

$$\begin{aligned} \beta_0 &\equiv \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, -\mu_0) d\mu \\ &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 p(-\mu, -\mu_0) d\mu \end{aligned} \quad (3.10)$$

と定義される. また (3.8) の中の  $\mu$  を  $-\mu$  に置き換え, 同様に  $\mu$  について 0 から 1 まで積分すると, (3.6b) より

$$\frac{dF^-(\tau)}{d\tau} = - \int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{\varpi}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(-\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu + \pi F_s \varpi (1 - \beta_0) e^{-\tau/\mu_0} \quad (3.11)$$

となる.

### 3.2.2 Eddington 近似

Eddington 近似は  $I(\tau, \mu)$  および  $p(\mu, \mu')$  を Legendre 多項式<sup>\*1</sup>を用いて

$$I(\tau, \mu) = \sum_l I_l(\tau) P_l(\mu) \quad (3.12a)$$

$$p(\mu, \mu') = \sum_l (2l + 1) g_l P_l(\cos \Theta) \quad (3.12b)$$

と展開することから始まる. ここで  $P_l$  は  $l$  次の Legendre 多項式,  $I_l(\tau)$  および  $g_l$  は展開係数,  $\Theta$  は入射方向  $(\mu', \phi')$  と散乱方向  $(\mu, \phi)$  が成す角である. また, 球面調和関数の加法定理より,

$$P_l(\cos \Theta) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi - \phi') \quad (3.13)$$

<sup>\*1</sup>Legendre 多項式については付録 A を参照せよ.

が成り立つ\*2. ここで  $P_l^m(\mu)$  は Legendre 陪多項式である.  $p(\mu, \mu')$  は方位角に依存しないので, (3.13) の右辺第二項を無視すると, (3.12b) は

$$p(\mu, \mu') = \sum_l (2l+1)g_l P_l(\mu)P_l(\mu') \quad (3.14)$$

となる. ここで, Legendre 多項式の直交性を用いると  $g_l$  は

$$g_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu)p(\mu, 1) d\mu \quad (3.15)$$

と表される.  $l=0$  のとき, 規格化条件 (2.2) および  $P_0(\mu) = 1$  であることから  $g_0 = 1$  となる. また,  $l=1$  の展開係数  $g_1$  を非対称因子  $g$  と呼ぶことにする. ここで (3.12a) と (3.14) を  $l=1$  までで打ち切り,

$$I(\tau, \mu) \approx I_0(\tau) + \mu I_1(\tau) \quad (3.16a)$$

$$p(\mu, \mu') \approx g_0 + 3g_1\mu\mu' = 1 + 3g\mu\mu' \quad (3.16b)$$

と近似する. ここで  $P_0(\mu) = 1$ ,  $P_1(\mu) = \mu$  であることを用いた. (3.2) および (3.3) に (3.16a) を代入すると

$$F^\pm(\tau) = \frac{1}{2}I_0(\tau) \pm \frac{1}{3}I_1(\tau) \quad (3.17)$$

が得られる. これを再び (3.16a) に用いると

$$I(\tau, \pm\mu) = \frac{1}{2}[(2 \pm 3\mu)F^+(\tau) + (2 \mp 3\mu)F^-(\tau)], \quad \mu \geq 0 \quad (3.18)$$

となる. (3.16b), (3.18) より,

$$\int_0^1 I(\tau, \pm\mu) d\mu = \frac{1}{4}[(4 \pm 3)F^+(\tau) + (4 \mp 3)F^-(\tau)] \quad (3.19)$$

$$\frac{\varpi}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\pm\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu = \frac{1}{4}[(4 \pm 3g)F^+(\tau) + (4 \mp 3g)F^-(\tau)] \quad (3.20)$$

となる. この二式を (3.9), (3.11) の右辺第一項, 第二項に代入すると, 二流方程式

$$\frac{\partial F^+}{\partial \tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - \pi F_s \varpi \gamma_3 e^{-\tau/\mu_0} \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial F^-}{\partial \tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + \pi F_s \varpi \gamma_4 e^{-\tau/\mu_0} \quad (3.21b)$$

\*2(3.13) の導出については付録 B を参照せよ.

が得られ, ここで

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}[7 - \varpi(4 + 3g)] \quad (3.22a)$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4}[1 - \varpi(4 - 3g)] \quad (3.22b)$$

$$\gamma_3 = \beta_0 = \frac{1}{4}(2 - 3g\mu_0) \quad (3.22c)$$

$$\gamma_4 = 1 - \beta_0 = 1 - \gamma_3 \quad (3.22d)$$

である.

### 3.2.3 $\delta$ -Eddington 近似

3.2.2 節で紹介した Eddington 近似は非対称性の高い散乱, 特に前方散乱が非常に強い場合に良い結果をもたらさない. 従って, 本研究では Eddington 近似を改良した  $\delta$ -Eddington 近似を用いることにする.

$I(\tau, \mu)$  については Eddington 近似と同じく

$$I(\tau, \mu) = \sum_l I_l(\tau) P_l(\mu) \quad (3.23)$$

と近似する. また,  $p(\mu, \mu')$  については

$$p(\mu, \mu') \approx 2f\delta(\mu - \mu') + (1 - f)(1 + 3g^*\mu\mu') \quad (3.24)$$

と近似する. ここで  $\delta(\mu - \mu')$  は Dirac のデルタ関数であり, (3.24) の右辺第一項は  $\mu = \mu'$  のとき, つまり前方散乱のときにピークを持つことを表している. 右辺第二項は Eddington 近似と同じ形である. 各項の係数は任意の定数  $f$  を用いて表わされ, 散乱位相関数が規格化条件 (2.2) を満たすようにしている. (3.23) より, Eddington 近似と同様にして

$$F^\pm(\tau) = \frac{1}{2}I_0(\tau) \pm \frac{1}{3}I_1(\tau) \quad (3.25)$$

$$I(\tau, \pm\mu) = \frac{1}{2}[(2 \pm 3\mu)F^+(\tau) + (2 \mp 3\mu)F^-(\tau)], \quad \mu \geq 0 \quad (3.26)$$

となる. 従って,

$$\int_0^1 I(\tau, \pm\mu) d\mu = \frac{1}{4}[(4 \pm 3)F^+(\tau) + (4 \mp 3)F^-(\tau)] \quad (3.27)$$

$$\frac{\varpi}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\pm\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu = \frac{1}{4} [(4 \pm 3g)F^+(\tau^*) + (4 \mp 3g^*)F^-(\tau^*)] \quad (3.28)$$

が成り立つ. この二式は Eddington 近似の (3.19), (3.20) にそれぞれ対応する. また (3.28) について,

$$g^* = \frac{g-f}{1-f} \quad (3.29a)$$

$$\tau^* = (1 - \varpi f)\tau \quad (3.29b)$$

$$\varpi^* = \frac{1-f}{1-\varpi f} \varpi \quad (3.29c)$$

と置いた. この二式を (3.9), (3.11) の右辺第一項, 第二項に代入すると, 二流近似方程式

$$\frac{\partial F^+}{\partial \tau^*} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - \pi F_s \varpi^* \gamma_3 e^{-\tau^*/\mu_0} \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial F^-}{\partial \tau^*} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + \pi F_s \varpi^* \gamma_4 e^{-\tau^*/\mu_0} \quad (3.30b)$$

が得られ, ここで

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} [7 - \varpi^*(4 + 3g^*)] \quad (3.31a)$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4} [1 - \varpi^*(4 - 3g^*)] \quad (3.31b)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{4} (2 - 3g^* \mu_0) \quad (3.31c)$$

$$\gamma_4 = 1 - \gamma_3 \quad (3.31d)$$

である. (3.30) と (3.31) は (3.21) と (3.22) の  $g, \tau, \varpi$  を  $g^*, \tau^*, \varpi^*$  に置き換えたものに等しい.

最後に任意定数  $f$  を決定する. まず, 散乱位相関数に二次の Legendre 多項式を掛けて積分したものを計算すると,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_2(\mu) p(\mu, 1) d\mu &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) [2f\delta(\mu - 1) + (1-f)(1 + 3g^*\mu)] d\mu \\ &= 2f \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる. ここで

$$\int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (3.33)$$



であることを用いた. 次に, Henyey-Greenstein 位相関数

$$p_{\text{H-G}}(\mu, \mu') = \sum_l (2l+1)g^l P_l(\cos \Theta) \quad (3.34)$$

を導入する. これは, 散乱位相関数の Legendre 多項式展開の展開係数  $g_l$  を非対称因子  $g$  の  $l$  乗に近似したものである. (3.32) と同様に, Henyey-Greenstein 位相関数に二次の Legendre 多項式を掛けて積分すると, Legendre 多項式の直交性より Henyey-Greenstein 位相関数の二次の項のみが残り,

$$\int_{-1}^1 P_2(\mu)p_{\text{H-G}}(\mu, 1) d\mu = 2g^2 \quad (3.35)$$

となる. 散乱位相関数が Henyey-Greenstein 位相関数に近似できるとするならば, (3.32) および (3.35) より

$$f = g^2 \quad (3.36)$$

となる.

### 3.3 放射フラックスの計算式

大気上端の光学的深さを  $\tau = 0$ , 下端を  $\tau = \tau_s$  とする. 均質大気の中では光学的特性が変化しないので, (3.30a) と (3.30b) を連立させて解くと放射フラックスの計算式

$$F^+(\tau) = k_1 e^{\lambda\tau^*} + \Gamma k_2 e^{-\lambda\tau^*} + C^+(\tau^*) \quad (3.37a)$$

$$F^-(\tau) = \Gamma k_1 e^{\lambda\tau^*} + k_2 e^{-\lambda\tau^*} + C^-(\tau^*) \quad (3.37b)$$

が得られる<sup>\*3</sup>. ここで

$$\lambda \equiv (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^{1/2} \quad (3.38a)$$

$$\Gamma \equiv \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \lambda} = \frac{\gamma_1 - \lambda}{\gamma_2} \quad (3.38b)$$

$$C^+(\tau^*) \equiv \frac{\pi F_s \varpi^* e^{-\tau^*/\mu_0} [(\gamma_1 - 1/\mu_0)\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2} \quad (3.38c)$$

$$C^-(\tau^*) \equiv \frac{\pi F_s \varpi^* e^{-\tau^*/\mu_0} [(\gamma_1 + 1/\mu_0)\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2} \quad (3.38d)$$

である. さらに下向き放射フラックス (3.37b) には太陽からの直達光

$$F_{\text{dir}}^-(\tau) = \mu_0 \pi e^{-\tau/\mu_0} \quad (3.39)$$

<sup>\*3</sup>(3.37a), (3.37b) の導出については付録 C を参照せよ.

を加えることで、最終的な放射フラックスの計算式

$$F^+(\tau) = k_1 e^{\lambda\tau^*} + \Gamma k_2 e^{-\lambda\tau^*} + C^+(\tau^*) \quad (3.40a)$$

$$F^-(\tau) = \Gamma k_1 e^{\lambda\tau^*} + k_2 e^{-\lambda\tau^*} + C^-(\tau^*) + F_{dir}^-(\tau) \quad (3.40b)$$

が得られる。また境界条件を

$$F^+(\tau_s) = R_{sfc} F^-(\tau_s) = R_{sfc} (\Gamma k_1 e^{\lambda\tau_s^*} + k_2 e^{-\lambda\tau_s^*} + C^-(\tau_s^*) + \mu_0 \pi F_s e^{-\tau_s/\mu_0}) \quad (3.41a)$$

$$F^-(0) = 0 \quad (3.41b)$$

とすると、 $k_1, k_2$  は

$$k_1 = -\frac{k_2 + C^-(0)}{\Gamma} \quad (3.42a)$$

$$k_2 = \frac{(1 - R_{sfc}\Gamma)C^-(0)e^{\lambda\tau_s^*} - \Gamma\{C^+(\tau_s^*) + R_{sfc}[C^-(\tau_s^*) + \mu_0\pi F_s e^{-\tau_s/\mu_0}]\}}{(R_{sfc}\Gamma - 1)e^{\lambda\tau_s^*} - (R_{sfc} - \Gamma)\Gamma e^{\lambda\tau_s^*}} \quad (3.42b)$$

となる。ここで  $R_{sfc}$  は地表の反射率である。

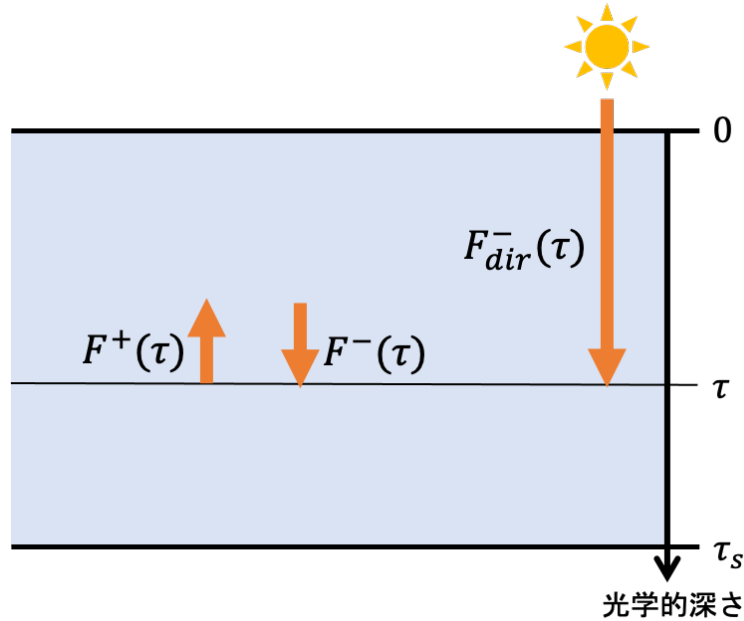


図 3.2: 均質大気における放射伝達. 大気上端 ( $\tau = 0$ ) と大気下端 ( $\tau = \tau_s$ ) の間の任意の  $\tau$  について、二流方程式から得られる上向き放射フラックス  $F^+(\tau)$  と下向き放射フラックス  $F^-(\tau)$ , および太陽直達フラックス  $F_{dir}^-(\tau)$  を考える.

## 第4章 放射フラックスの計算

本章では、前章で導出した計算式を用いて放射フラックスの計算を行う。そして、得られた結果の正確さが実用的なレベルに達しているかを検討する。

### 4.1 条件設定

Toon *et al.* (1989) は、地球大気構造を想定したパラメータ条件を設定し、二流方程式を用いて放射フラックスを計算した。本研究では Toon *et al.* (1989) が用いたパラメータ条件のうち四つのパターンについて、前章の計算式を用いて大気上端の上向き放射フラックス  $F^+(0)$  および大気下端の下向き放射フラックス  $F^-(\tau_s)$  を計算する。大気上端の下向き放射フラックス  $F^-(0)$  と大気下端の上向き放射フラックス  $F^+(\tau_s)$  は境界条件 (3.41a) と (3.41b) を満たす。

各パターンのパラメータ条件は表 4.1 の通りである。H<sub>2</sub>O のヘイズと雲の二種類を想定し、それぞれ  $\tau_s$ ,  $g$  の値を変えている。また、ヘイズと雲のそれぞれにおいて  $\varpi$  が 1 の場合と 0.9 の場合を考える。

表 4.1: 各パターンのパラメータ条件

	ヘイズ A	ヘイズ B	雲 A	雲 B
$\mu_0$	1	1	1	1
$\tau_s$	1	1	64	64
$\varpi$	1	0.9	1	0.9
$g$	0.794	0.794	0.848	0.848
全ての事例において $R_{sfc} = 0, F_s = 1$				

## 4.2 計算結果

大気上面の上向き放射フラックス, 大気下面の下向き放射フラックスの計算結果は表 4.2 の通りである. それぞれの放射フラックスについて, 計算値, Toon *et al.* (1989) に示された ‘exact’ な値, および相対誤差を示す. 相対誤差は計算値  $X$  と ‘exact’ な値  $X_e$  を用いて  $(X - X_e)/X_e$  で計算される. また ‘exact’ な値が非常に小さく相対誤差を計算できない場合は値を記載していない.

ヘイズ A, B で誤差が大きく, 特に  $F^+(0)$  は相対誤差が 20% を超える. 一方, 雲 A では 2% 以下, 雲 B では 5% 程度と相対誤差が比較的小さい. また, 雲およびヘイズの両方において, A の方が B よりも誤差が小さい.

表 4.2: 計算結果

	ヘイズ A	ヘイズ B	雲 A	雲 B
$F^+(0)$	0.210	0.156	2.668	0.354
$F_e^+(0)$	0.173	0.124	2.662	0.376
相対誤差 [%]	21.5	25.8	0.234	5.79
$F^-(\tau_s)$	1.916	1.762	0.473	0.000
$F_e^-(\tau_s)$	1.830	1.516	0.480	0.000
相対誤差 [%]	5.69	16.2	1.38	-

$F_e^+(0)$  および  $F_e^-(\tau_s)$  は Toon *et al.* (1989) より引用.

## 4.3 計算式の評価

表 4.2 で示された計算結果の正確さを元に計算手法を評価する. Toon *et al.* (1989) によると, 大気中のエアロゾルに関して観測による誤差が 10% 程度であり, 計算による誤差がそれと同程度の大きさであれば許容することができる. 表 4.2 で示された計算結果より, 雲 A, B は許容範囲内にあるといえる. 一方でヘイズ A, B に関しては誤差が 10% を超えるものが多く, 正確さが十分であるとはいえない. 従って, 正確さを上げるための他の手法を検討する必要があるといえる.

## 第5章 まとめ

本研究では二流近似法を用いて放射伝達方程式を近似し,  $\delta$ -Eddington 近似を用いて放射輝度および散乱位相関数を近似することで, 放射フラックスの計算式を求めた. そして, 地球大気構造を想定した四パターンのパラメータ条件について放射フラックスを計算し, その結果の正確さから計算式を評価した. その結果, 雲を想定したパラメータ条件 ( $\tau = 64, g = 0.848$ ) で小さな相対誤差を示し, ヘイズを想定したパラメータ条件 ( $\tau = 1, g = 0.794$ ) で大きな相対誤差を示した. ただし本研究はわずかな事例についてのみ計算を行った. 今回の計算式をより正確に評価するためには, さらに多くのパラメータ条件について計算を行い, 各種パラメータと結果の正確さとの相関を見る必要があるだろう.

## 付録 A Legendre 多項式

関数  $f(t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$  の Maclaurin 展開

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (\text{A.1})$$

を満たす  $P_n(x)$  を Legendre 多項式という. Legendre 多項式にはいくつかの表現があり, その一つが Rodrigues の公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n - 1)^n \quad (\text{A.2})$$

である. (A.2) に二項定理を用いると,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{k!(n - k)!(n - 2k)!} x^{n-2k} \quad (\text{A.3})$$

が得られる. また Legendre 多項式は, Legendre 方程式

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n + 1)P_n(x) = 0 \quad (\text{A.4})$$

を満たす.

Legendre 多項式の重要な性質の一つとして, 直交性

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{2}{2n+1} & (n = m) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

がある. この性質を用いて (3.15), (3.35) が導出される.

## 付録 B 球面調和関数の加法定理と (3.13) の導出

まずは、球面調和関数

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \left[ \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{B.1a})$$

$$\overline{Y_l^m(\theta, \phi)} = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \phi) \quad (\text{B.1b})$$

を用いて球面調和関数の加法定理

$$Y_l^0(0) Y_l^0(\Theta) = \sum_{m=-l}^l \overline{Y_l^m(\theta', \phi')} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (\text{B.2})$$

を導出する。まず、Laplace 方程式  $\nabla^2 u = 0$  の解  $u(r, \theta, \phi)$  を変数分離し、

$$u(r, \theta, \phi) = R(r) f(\theta, \phi) \quad (\text{B.3})$$

と表す。  $f(\theta, \phi)$  は球面調和関数を用いて

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_l^m Y_l^m(\theta, \phi) \quad (\text{B.4})$$

と展開できる。ここで  $A_l^m$  は展開係数であり、球面調和関数の直交性により

$$A_l^m = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta' f(\theta', \phi') \overline{Y_l^m(\theta', \phi')} d\phi' d\theta' \quad (\text{B.5})$$

と表される。また、 $z$  軸 (天頂角が 0 となる軸) は任意の方向に定められるので、 $(\theta, \phi)$  方向に  $z$  軸をとると

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l^0 Y_l^0(0) \quad (\text{B.6})$$

ここで、 $Y_l^m(0, \phi) = 0$  ( $m \neq 0$ ) であることを用いた。また  $m = 0$  のとき、球面調和関数は方位角に依らないことから第二引数を省略している。  $B_l^0$  は (B.5) と同様に  
して

$$B_l^0 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta' f(\theta', \phi') \overline{Y_l^0(\Theta)} d\phi' d\theta' \quad (\text{B.7})$$

と表される. (B.4) に (B.5), (B.6) に (B.7) をそれぞれ代入して連立させると

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta' f(\theta', \phi') \sum_{m=-l}^l \overline{Y_l^m(\theta', \phi')} Y_l^m(\theta, \phi) d\phi' d\theta' \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta' f(\theta', \phi') \overline{Y_l^0(\Theta)} Y_l^0(0) d\phi' d\theta' \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

となる. これが任意の  $f(\theta, \phi)$  で成り立つことから,  $Y_l^0(\Theta) = \overline{Y_l^0(\Theta)}$  を用いて加法定理 (B.2) が導出される.

続いて加法定理 (B.2) から (3.13) を導出する. (B.2) に (B.1a), (B.1b) を代入すると,

$$\left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\cos \Theta) = \sum_{m=-l}^l \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right) (-1)^m P_n^{-m}(\mu') P_n^m(\mu) e^{im(\phi-\phi')} \quad (\text{B.9})$$

ここで  $P_l^0(x) = P_l(x) = 1$ ,  $\mu = \cos \theta$ ,  $\mu' = \cos \theta'$  を用いた.

$$P_n^{-m} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m \quad (\text{B.10})$$

であることを用いて,  $m < 0$ ,  $m > 0$  の場合について

$$\sum_{m=0}^l (-1)^m P_n^{-m}(\mu') P_n^m(\mu) e^{im(\phi-\phi')} = \sum_{m=0}^l \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) e^{im(\phi-\phi')} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^0 (-1)^m P_n^{-m}(\mu') P_n^m(\mu) e^{im(\phi-\phi')} &= \sum_{m=-l}^0 \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n^{-m}(\mu') P_n^{-m}(\mu) e^{im(\phi-\phi')} \\ &= \sum_{m=0}^l \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) e^{im(\phi-\phi')} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

であり, また  $m = 0$  のとき

$$P_n^0(\mu') P_n^0(\mu) e^{i \cdot 0 \cdot (\phi-\phi')} = P_n(\mu') P_n(\mu) \quad (\text{B.13})$$

であることを用いると, (B.9) から (3.13) が導出される.



## 付録C (3.37a), (3.37b) の導出

二流方程式

$$\frac{dF^+}{d\tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - S^+(\tau) \quad (\text{C.1a})$$

$$\frac{dF^-}{d\tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + S^-(\tau) \quad (\text{C.1b})$$

$$S^+(\tau) = \pi F_s \tilde{\omega} \gamma_3 e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{C.2a})$$

$$S^-(\tau) = \pi F_s \tilde{\omega} \gamma_4 e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{C.2b})$$

から放射フラックスの方程式 (3.37a), (3.37b) を導出する. (C.1a) を  $\tau$  で微分すると

$$\frac{d^2 F^+(\tau)}{d\tau^2} = \gamma_1 \frac{dF^+(\tau)}{d\tau} - \gamma_2 \frac{dF^-(\tau)}{d\tau} - \frac{dS^+(\tau)}{d\tau} \quad (\text{C.3})$$

となる. これに (C.1a), (C.1b) を代入すると,

$$\frac{d^2 F^+(\tau)}{d\tau^2} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) F^+(\tau) - (\gamma_1 - 1/\mu_0) S^+(\tau) - \gamma_2 S^-(\tau) \quad (\text{C.4})$$

ここで,  $\lambda^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2$  と置き, (C.2a), (C.2b) を代入すると,

$$\frac{d^2 F^+(\tau)}{d\tau^2} = \lambda^2 F^+(\tau) - [(\gamma_1 - 1/\mu_0)\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4] \pi F_s \tilde{\omega} e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{C.5})$$

となり, 二階微分方程式に帰着する. 齊次方程式

$$\frac{d^2 F^+(\tau)}{d\tau^2} = \lambda^2 F^+(\tau) \quad (\text{C.6})$$

の一般解は

$$F^+(\tau) = k_1^+ e^{\lambda\tau} + k_2^+ e^{-\lambda\tau} \quad (\text{C.7})$$

である. また (C.5) の特解を

$$F^+(\tau) = \Phi^+ e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{C.8})$$

と仮定し, (C.5) に代入すると,

$$\Phi^+ = \frac{\pi F_s \tilde{\omega} [(\gamma_1 - 1/\mu_0)\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2} \quad (\text{C.9})$$

(C.7), (C.9) より,

$$F^+(\tau) = k_1^+ e^{\lambda\tau} + k_2^+ e^{-\lambda\tau} + C^+(\tau) \quad (\text{C.10a})$$

$$C^+(\tau) = \frac{\pi F_s \tilde{\omega} e^{-\tau/\mu_0} [(\gamma_1 - 1/\mu_0)\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2} \quad (\text{C.10b})$$

となる.

(C.1b) についても同様にして二階微分方程式を作ると, その一般解は

$$F^-(\tau) = k_1^- e^{\lambda\tau} + k_2^- e^{-\lambda\tau} + C^-(\tau) \quad (\text{C.11a})$$

$$C^-(\tau) = \frac{\pi F_s \tilde{\omega} e^{-\tau/\mu_0} [(\gamma_1 + 1/\mu_0)\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2} \quad (\text{C.11b})$$

である. (C.1a) に (C.10a), (C.11a) を代入して係数を比較すると,

$$k_1^- = \frac{\gamma_1 - \lambda}{\gamma_2} k_1^+ \quad (\text{C.12a})$$

$$k_2^+ = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \lambda} k_2^- \quad (\text{C.12b})$$

が成り立つ.  $\Gamma = \gamma_2/(\gamma_1 + \lambda) = (\gamma_1 - \lambda)/\gamma_2$ ,  $k_1 = k_1^+$ ,  $k_2 = k_2^-$  とおくと,

$$F^+(\tau) = k_1 e^{\lambda\tau} + \Gamma k_2 e^{-\lambda\tau} + C^+(\tau) \quad (\text{C.13a})$$

$$F^-(\tau) = \Gamma k_1 e^{\lambda\tau} + k_2 e^{-\lambda\tau} + C^-(\tau) \quad (\text{C.13b})$$

となり, (3.37a), (3.37b) が導出された.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、林祥介先生、高橋芳幸先生、檜村博基先生にご指導頂きました。特に、高橋芳幸先生には本研究に関する数多くの助言を頂きました。また、教育研究補佐員の上田翔士先生をはじめ、地球および惑星大気科学研究室の皆様にも研究や発表に関するアドバイスを頂きました。深く感謝し、心からお礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Joseph, J. E., and W. J. Wiscombe, 1976: The Delta-Eddington Approximation for Radiative Flux Transfer. *J. Atmos. Sci.*, 33, 2452-2459.
- [2] Meador, W. E., and W. R. Weaver, 1980: Two-Stream Approximation to Radiative Transfer in Planetary Atmospheres: A Unified Description of Existing Methods and a New Improvement. *J. Atmos. Sci.*, 37, 630-643.
- [3] Toon, O. B., C. P. McKay, and T. P. Ackerman, 1989: Rapid Calculation of Radiative Heating Rates and Photodissociation Rate in Inhomogeneous Multiple Scattering Atmospheres. *J. Geophys. Res.*, 94, 287-301.
- [4] Wiscombe, W. J., 1977: The Delta-Eddington Approximation for a Vertically Inhomogeneous Atmosphere. Tech. Note TN-121 + STR, Natl. Cent. for Atmos. Res., Boulder, Colo.
- [5] グラント W. ペティ. “詳解 大気放射学 基礎と気象・気候学への応用”. 近藤豊, 茂木信宏訳. 東京大出版会, 2019, 416p.
- [6] 関 友也. “地球大気放射場に関する放射伝達方程式についての考察”. 2012. [http://www.gfd-dennou.org/arch/prepri/2012/kobe-u/120210\\_tbseki-Bthesis/paper/pub/sotsuron.pdf](http://www.gfd-dennou.org/arch/prepri/2012/kobe-u/120210_tbseki-Bthesis/paper/pub/sotsuron.pdf). (参照: 2022/01/13)
- [7] 地球流体電脳倶楽部. “DCPAM5 支配方程式とその離散化”. 2014. [https://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5\\_latest/doc/basic\\_equations/pub/basic\\_equations.pdf](https://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf). (参照: 2022/01/13)