

# Two-Stream 法を用いた 惑星大気放射伝達モデル

地球および惑星大気科学研究室

田村 笙

# 発表の流れ

1 研究目的

2 放射伝達モデルの導出

3 計算結果, 精度評価

4 まとめ

5 今後の課題

# 1 研究目的

大気科学において放射伝達は重要な現象の一つである。  
例) 大気循環モデル



惑星大気における放射熱収支の計算に向けて  
過去の放射伝達モデルを再現, 再検証する.

## 2 放射伝達モデルの導出

- 散乱を考慮した太陽放射を想定し, 放射伝達方程式を **Two-Stream 法** を用いて近似する.
- 大気上端および下端での上向き, 下向き放射フラックスを計算するモデルを作成する.

# 2モデルの導出

## Two-Stream 法

放射伝達方程式を，上向き及び下向きフラックスに関する二つの微分方程式に近似する方法.

Two-Stream 方程式

$$\frac{dF^+}{d\tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - S^+$$

$$\frac{dF^-}{d\tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + S^-$$

$F^+$ : 上向き放射フラックス

$F^-$ : 下向き放射フラックス

$\tau$ : 光学的深さ

## 2 放射伝達モデルの導出

平行平面大気放射伝達方程式

$$\mu \frac{\partial I_\nu(\tau, \mu, \phi)}{\partial \tau} = I_\nu(\tau, \mu, \phi) - \frac{\tilde{\omega}_\nu}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p_\nu(\mu, \phi; \mu', \phi') I_\nu(\tau, \mu', \phi') d\phi' d\mu' - \frac{\tilde{\omega}_\nu}{2} F_{s\nu} p_\nu(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0}$$

$\mu$ : 天頂角の余弦

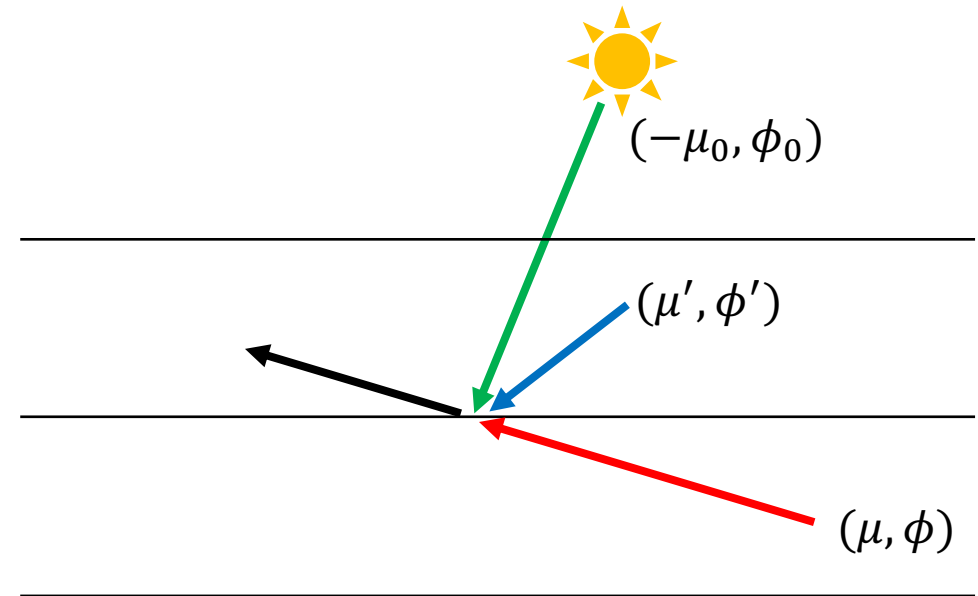
$\phi$ : 方位角

$I_\nu$ : 振動数  $\nu$  から  $\nu + \delta\nu$  の間の放射輝度

$p_\nu$ : 振動数  $\nu$  の散乱位相関数

$\tilde{\omega}_\nu$ : 振動数  $\nu$  の一次散乱アルベド

$F_{s\nu}$ : 振動数  $\nu$  の太陽放射フラックス



# 2 放射伝達モデルの導出

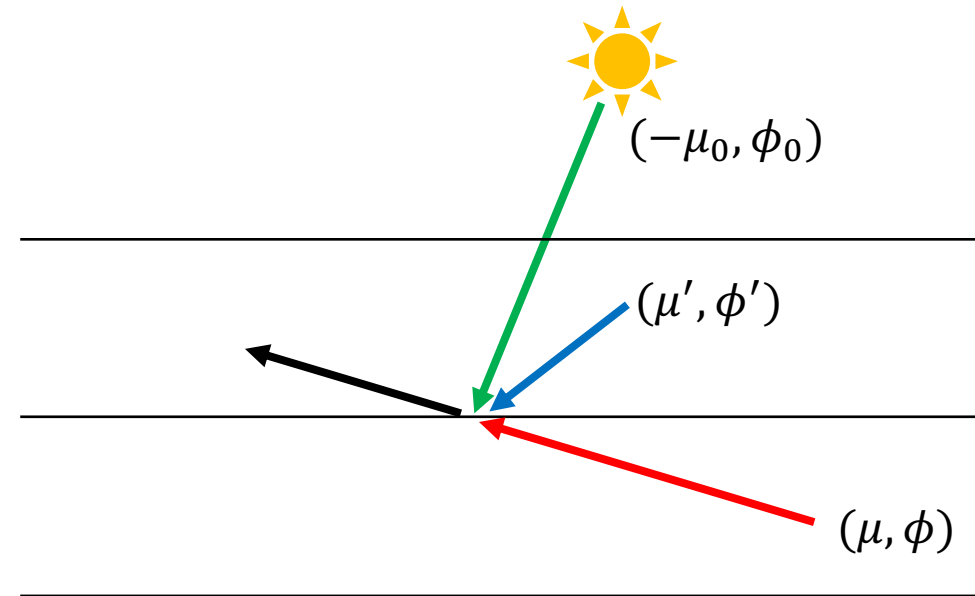
平行平面大気放射伝達方程式

$$\mu \frac{\partial I_\nu(\tau, \mu, \phi)}{\partial \tau} = \boxed{I_\nu(\tau, \mu, \phi)} - \boxed{\frac{\tilde{\omega}_\nu}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p_\nu(\mu, \phi; \mu', \phi') I_\nu(\tau, \mu', \phi') d\phi' d\mu'} - \boxed{\frac{\tilde{\omega}_\nu}{2} F_{s\nu} p_\nu(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0}}$$

**第一項**  $(\mu, \phi)$  方向からの放射

**第二項**  $(\mu, \phi)$  方向への全ての散乱

**第三項**  $(-\mu_0, \phi_0)$  方向からの太陽の直達光の散乱



※添字  $\nu$  は今後省略

## 2 放射伝達モデルの導出

上向き放射フラックス

$$F^+(\tau) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu I(\tau, \mu, \phi) d\phi d\mu$$

下向き放射フラックス

$$F^-(\tau) = - \int_{-1}^0 \int_0^{2\pi} \mu I(\tau, \mu, \phi) d\phi d\mu = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu I(\tau, \mu, \phi) d\phi d\mu$$



## 2 放射伝達モデルの導出

放射伝達方程式を $\phi, \mu$ について積分

$$\frac{dF^+}{d\tau} = \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu - \pi F_s \tilde{\omega} \beta_0 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\frac{dF^-}{d\tau} = - \int_0^1 I(\tau, -\mu) d\mu + \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 p(-\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' d\mu + \pi F_s \tilde{\omega} (1 - \beta_0) e^{-\tau/\mu_0}$$

$$I(\tau, \mu) \equiv \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu, \phi) d\phi$$

$$p(\mu, \mu') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\mu, \phi; \mu', \phi') d\phi = \sum_l (2l + 1) g_l P_l(\mu) P_l(\mu')$$

$$g_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu$$

$$\beta_0 \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu, -\mu_0) d\mu = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 p(-\mu, -\mu_0) d\mu$$

$P_l$ :  $l$ 次の Legendre 多項式  
 $g_l$ : 展開係数

## 2 放射伝達モデルの導出

### Eddington 近似

放射輝度の方位角積分を, Legendre 多項式で展開し, 第二項までで打ち切る.

$$I(\tau, \mu) = \sum_l I_l(\tau) P_l(\mu) \approx I_0(\tau) + I_1(\tau) \mu$$

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu$$

散乱位相関数の方位角積分を, 第二項までで打ち切る.

$$p(\mu, \mu') = \sum_l (2l + 1) g_l P_l(\mu) P_l(\mu') \approx 1 + 3g\mu\mu'$$

$$g_0 = 1, \quad g_1 \equiv g: \text{非対称因子}$$

## 2 放射伝達モデルの導出

Eddington 近似を用いた Two-Stream 方程式

$$\frac{dF^+}{d\tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - \pi F_s \gamma_3 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\frac{dF^-}{d\tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + \pi F_s \gamma_4 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} [7 - \tilde{\omega}(4 + 3g)]$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4} [1 - \tilde{\omega}(4 - 3g)]$$

$$\gamma_3 \equiv \beta_0 = \frac{1}{4} (2 - 3g\mu_0)$$

$$\gamma_4 = 1 - \gamma_3$$

## 2 放射伝達モデルの導出

### $\delta$ -Eddington 近似

前方散乱（入射光と同じ向きの散乱）が他の向きの散乱と比較して強くなることを考慮し、散乱位相関数を次のように近似する。

$$p(\mu, \mu') \approx 2f\delta(\mu - \mu') + (1 - f)(1 - 3g'\mu\mu')$$

$$f = g^2 \quad (\text{Joseph et. al. (1976)})$$

$\delta(x)$ : Dirac のデルタ関数

## 2 放射伝達モデルの導出

$\delta$ -Eddington 近似を用いた Two-Stream 方程式

$$\frac{dF^+}{d\tau} = \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- - \pi F_s \gamma_3 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\frac{dF^-}{d\tau} = \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- + \pi F_s \gamma_4 e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} [7 - \tilde{\omega}'(4 + 3g')]$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4} [1 - \tilde{\omega}'(4 - 3g')]$$

$$\gamma_3 \equiv \beta_0 = \frac{1}{4} (2 - 3g'\mu_0)$$

$$\gamma_4 = 1 - \gamma_3$$

パラメータのスケーリング

$$g' = \frac{g}{1+g}, \quad \tau' = (1 - \tilde{\omega}g^2)\tau, \quad \tilde{\omega}' = \frac{(1 - g^2)\tilde{\omega}}{1 - \tilde{\omega}g^2}$$

## 2 放射伝達モデルの導出

放射伝達モデル

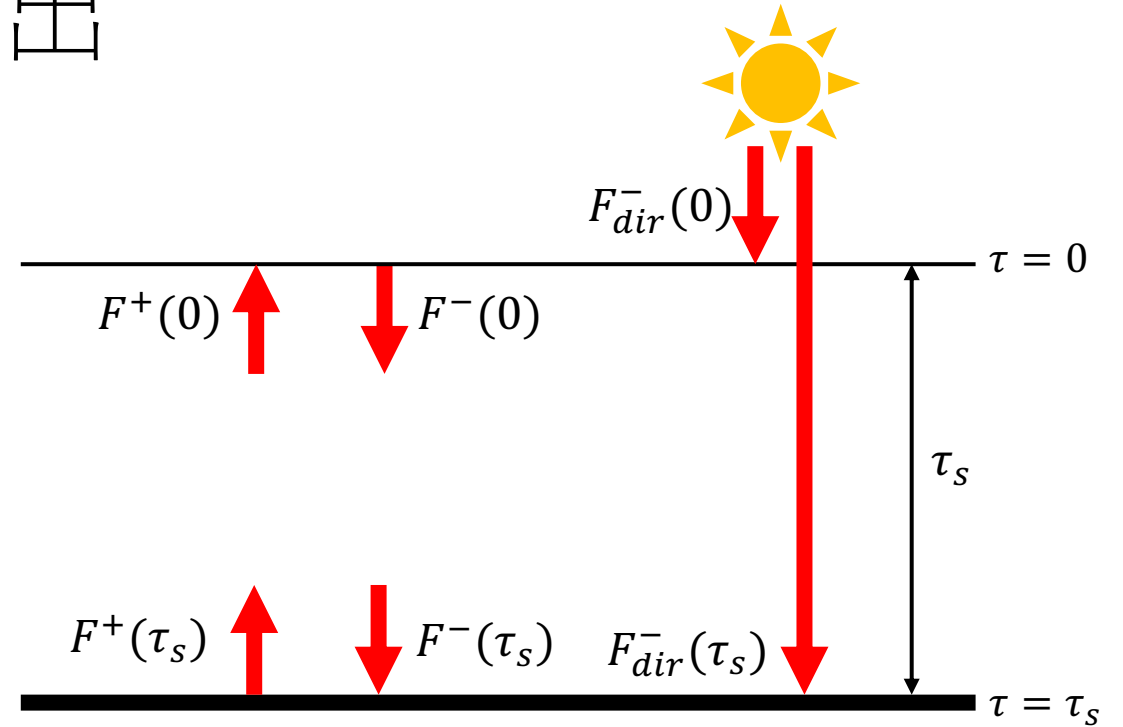
$$F_{tot}^+(\tau) = F^+(\tau)$$

$$F_{tot}^-(\tau) = F^-(\tau) + F_{dir}^-(\tau)$$

$$F^+(\tau) = k_1 e^{\lambda\tau'} + \Gamma k_2 e^{-\lambda\tau'} + C^+(\tau')$$

$$F^-(\tau) = \Gamma k_1 e^{\lambda\tau'} + k_2 e^{-\lambda\tau'} + C^-(\tau')$$

$$F_{dir}^-(\tau) = \mu_0 \pi F_s \exp(-\tau/\mu_0)$$



$$\lambda = \sqrt{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad \Gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \lambda} = \frac{\gamma_1 - \lambda}{\gamma_2}$$

$$C^+(\tau') = \frac{\tilde{\omega}' \pi F_s \exp(-\tau'/\mu_0) [(\gamma_1 - 1/\mu_0)\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2}$$

$$C^-(\tau') = \frac{\tilde{\omega}' \pi F_s \exp(-\tau'/\mu_0) [(\gamma_1 + 1/\mu_0)\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3]}{\lambda^2 - 1/\mu_0^2}$$

## 2 放射伝達モデルの導出

$k_1, k_2$  の決定

境界条件

$$F^+(\tau_s) = R_{sfc} F_{tot}^-(\tau_s) = R_{sfc} (\Gamma k_1 e^{\lambda \tau'_s} + \Gamma k_2 e^{-\lambda \tau'_s} + C^-(\tau'_s) + \mu_0 \pi F_s \exp(-\tau_s / \mu_0))$$

$$F^-(0) = 0$$

$R_{sfc}$ : 地表の反射率 (アルベド)

より,

$$k_1 = -\frac{k_2 + C^-(0)}{\Gamma}$$

$$k_2 = \frac{(1 - R_{sfc} \Gamma) C^-(0) \exp(\lambda \tau'_s) - \Gamma \{C^+(\tau'_s) + R_{sfc} [C^-(\tau'_s) + \mu_0 \pi F_s \exp(-\tau_s / \mu_0)]\}}{(R_{sfc} \Gamma - 1) \exp(\lambda \tau'_s) - (R_{sfc} - \Gamma) \Gamma \exp(-\lambda \tau'_s)}$$

### 3 計算結果, 精度評価

Toon *et. al.* (1989) が用いた五つの事例について, 放射フラックスを計算する.

表 1: 各事例のパラメータ値 (Toon *et. al.* (1989))

	事例 1	事例 2	事例 3	事例 4	事例 5
$\mu_0$	1	1	0.5	1	1
$\tau$	1	1	1	64	64
$\tilde{\omega}$	1	0.9	0.9	1	0.9
$g$	0.794	0.794	0.794	0.848	0.848

$\mu_0$ : 太陽天頂角の余弦  
 $\tau$ : 光学的深さ  
 $\tilde{\omega}$ : 一次散乱アルベド  
 $g$ : 非対称因子

全ての事例において  $R_{suf} = 0, F_s = 1$



# 3 計算結果, 精度評価

## 精度の評価

$$\text{(相対誤差)} \equiv \frac{|X - X_e|}{X_e}$$

$X$ : モデルによる近似値

$X_e$ : Toon *et. al.* (1989) に示された 'exact' な値

# 3 計算結果, 精度評価

## 計算結果

表 2: 計算結果 ( $\delta$ -Eddington 近似)

	事例 1	事例 2	事例 3	事例 4	事例 5
$F^+(0)$	0.210	0.156	0.228	2.668	0.354
$F_e^+(0)$	0.173	0.124	0.226	2.662	0.376
相対誤差[%]	21.5	25.8	0.895	0.234	5.79
$F^-(\tau_s)$	1.916	1.762	0.613	0.473	0.000
$F_e^-(\tau_s)$	1.830	1.516	0.803	0.480	0.000
相対誤差[%]	5.69	16.2	23.6	1.38	-

$F_e^+(0), F_e^-(\tau_s)$  は Toon *et. al.* (1989) より引用

- 事例 1~3 で誤差が大きい (特に, 小さな  $F_e$  で 20%~)
- 事例 4~5 の誤差は比較的小さい (最大 5~6%)

# 3 計算結果, 精度評価

## Eddington 近似との比較

表 3: 計算結果 (Eddington 近似)

	事例 1	事例 2	事例 3	事例 4	事例 5	$\delta$ -Eddington 近似					
$F^+(0)$	-0.009	-0.054	0.277	2.668	0.058						
$F_e^+(0)$	0.173	0.124	0.226	2.662	0.376	$F^+(0)$	0.210	0.156	0.228	2.668	0.354
相対誤差[%]	-	-	22.7	0.234	84.6	$F_e^+(0)$	0.173	0.124	0.226	2.662	0.376
$F^-(\tau_s)$	3.151	2.793	1.019	0.473	0.000	誤差[%]	21.5	25.8	0.895	0.234	5.79
$F_e^-(\tau_s)$	1.830	1.516	0.803	0.480	0.000	$F^-(\tau_s)$	1.916	1.762	0.613	0.473	0.000
相対誤差[%]	73.8	84.3	26.0	1.38	-	$F_e^-(\tau_s)$	1.830	1.516	0.803	0.480	0.000
						誤差[%]	5.69	16.2	23.6	1.38	-

- 事例 4 以外の値において, Eddington 近似のほうが誤差が大きい
- 事例 1, 2 について,  $F^+(0)$  が負の値を示す
- 事例 4 について, 誤差がほぼ同じである

## 4 まとめ

- Two-Stream 法を用いて放射伝達モデルを作成した.
- 五つの事例について,  $\delta$ -Eddington 近似を用いて放射フラックスを計算し, 精度を検討した.
- $\tau = 1, g = 0.794$  の事例で大きな相対誤差を示した.
- $\tau = 64, g = 0.848$  の事例で比較的小さな相対誤差を示した.
- $\delta$ -Eddington 近似を用いた計算は Eddington 近似よりもよい近似を示した.

## 5 今後の課題

- 多層の放射伝達モデルの作成, 検証, 単層との比較
- 赤外放射の放射伝達モデルの作成, 検証

# 参考文献

- Joseph, J. E., 1976: The Delta-Eddington Approximation for Radiative Flux Transfer. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2452-2459.
- Meador, W. E., and W. R. Weaver, 1980: Two-Stream Approximation to Radiative Transfer in Planetary Atmospheres: A Unified Description of Existing Methods and a New Improvement. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 630-643.
- Toon, O. B., C. P. McKay, and T. P. Ackerman, 1989: Rapid Calculation of Radiative Heating Rates and Photodissociation Rate in Inhomogeneous Multiple Scattering Atmospheres. *J. Geophys. Res.*, **94**, 287-301.
- Wiscombe, W. J., 1977: The Delta-Eddington Approximation for a Vertically Inhomogeneous Atmosphere. *Tech. Note TN-121 + STR*, Natl. Cent. for Atmos. Res., Boulder, Colo.
- グラント W. ペティ. “詳解 大気放射学 基礎と気象・気候学への応用”. 近藤豊, 茂木信宏訳. 東京大出版会, 2019, 416p.
- 関 友也. “地球大気放射場に関する放射伝達方程式についての考察”. 2012. [http://www.gfd-dennou.org/arch/prepri/2012/kobe-u/120210\\_tbseki-Bthesis/paper/pub/sotsuron.pdf](http://www.gfd-dennou.org/arch/prepri/2012/kobe-u/120210_tbseki-Bthesis/paper/pub/sotsuron.pdf). (参照: 2022/01/13)
- 地球流体電脳倶楽部. “DCPAM5 支配方程式とその離散化”. 2014. [https://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5\\_latest/doc/basic\\_equations/pub/basic\\_equations.pdf](https://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf). (参照: 2022/01/13)

# 付録

$\delta$ -Eddington 近似の  $f$  の決定

$$p(\mu, \mu') \approx 2f\delta(\mu - \mu') + (1 - f)(1 - 3g'\mu\mu')$$

より,

$$f = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_2(\mu) p(\mu, 1) d\mu$$

ここで  $f$  を決定するため, 上式の位相関数を Henyey-Greenstein 位相関数に置き換えると

$$f = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_2(\mu) p_{HG}(\mu, 1) d\mu = g^2$$

Henyey-Greenstein 位相関数

$$p_{HG}(\mu, 1) = \sum_l (2l + 1) g^l P_l(\mu)$$