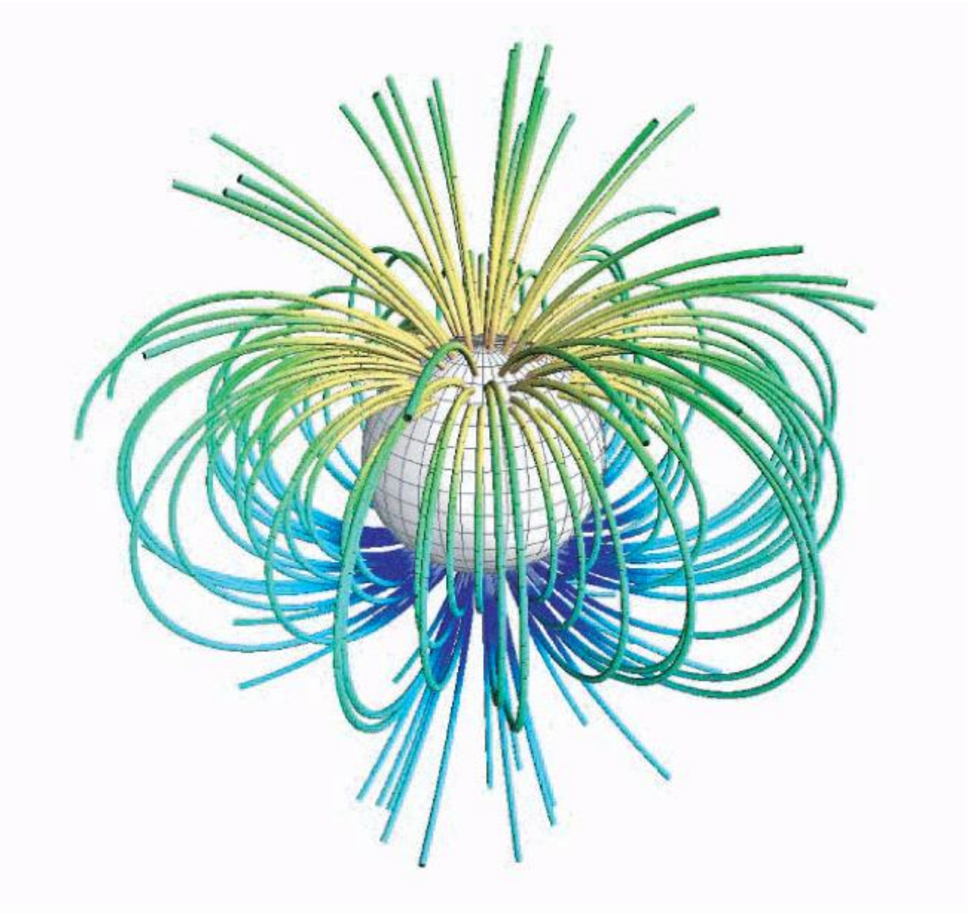
磁気流体の
支配方程式の導出

流体地球物理学分野
1833484s
服部蒼紀

はじめに

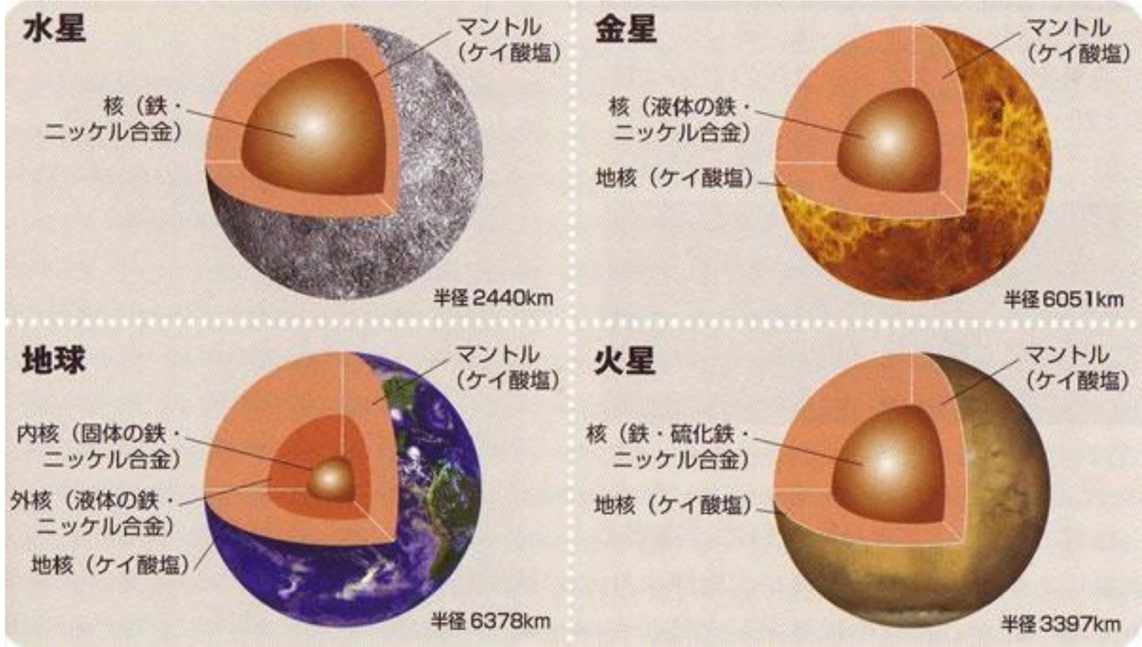
- 一部の惑星は固有磁場を持つ.
  - この惑星磁場の起因は惑星核内の流体金属の運動によるものとされている.
- ここでは
  - 流体金属の運動 ≈ 磁気流体の支配方程式を導出する.
  - 具体的には, MHD 方程式, ブシネスク方程式の導出をする.



出典：https://www.research.kobe-u.ac.jp/csi-viz/research/past/index.ja.html

惑星のモデル化

- 固有磁場のモデル
  - 惑星の内部は流体金属で構成されている.
  - 惑星は光速よりかなり遅い速さで自転している.
- この発表では磁場が電場を卓越する環境下の遅い運動をする物体の支配方程式と基本場からあまり変動のない流体の方程式を導出する.



岩石惑星の内部構造
(出典 : https://www.neomag.jp/mailmagazines/topics/letter201807.html)

本日の発表内容

- MHD 近似
  - 磁場が電場より卓越している電磁場においての光速より十分遅い物体のマクスウェル方程式を筆頭とした, 電磁気学の方程式系
- ブシネスク近似
  - 基本場からの各要素(速度, 圧力, 温度, エントロピー)の変位が小さいときに成り立つ流体力学の方程式系

電磁気学の方程式の復習

- マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- ローレンツ力

$$\boldsymbol{F}_L = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$$

- オームの法則

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}'$$

- 静止系から見た慣性系の電場

$$\boldsymbol{E}' = (1-\gamma)\left(\frac{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}}\right) + \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

$\boldsymbol{E}$: 電場 $\boldsymbol{B}$: 磁場
$\boldsymbol{J}$: 電流 $\boldsymbol{v}$: 物体の速度
ρ_e : 電荷密度
ε : 誘電率 μ : 透磁率
σ : 電気伝導率 γ :ローレンツ因子

MHD 近似 (1)

- 電磁場の中で運動する物体は光速より十分遅いので
  - ファラデーの法則　$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$
    または
    アンペールの法則　$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
    のどちらかの時間変位項を無視できる.
  - オームの法則では必要な慣性系からみた電場は

$$\boldsymbol{E}' = (1-\gamma)\left(\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}}\right) + \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

となるが, ローレンツ因子 $\gamma \approx 1$ なので$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$

MHD 近似 (2)

- 惑星内部の代表的な電場の大きさを E^* 磁場の大きさを B^* 運動の時間スケールを t^* 運動の長さスケールを l^* として ファラデーの法則の時間変位項が損なわれないとすると
$$\frac{|\nabla \times \boldsymbol{E}|}{|\partial \boldsymbol{B}/\partial t|} = \frac{E^*}{B^*}\frac{t^*}{l^*} \approx 1 \Rightarrow \frac{l^*}{t^*} = \frac{E^*}{B^*}$$
このスケーリングの下でアンペールの法則の電場と磁場の項を比較すると
$$\frac{|\nabla \times \boldsymbol{B}|}{\varepsilon\mu|\partial \boldsymbol{E}/\partial t|} = c^2\frac{B^*}{E^*}\frac{t^*}{l^*} = c^2\left(\frac{t^*}{l^*}\right)^2 \gg 1$$

MHD 近似 (3)

- 惑星の内部の磁場の時間変位が無視できないことから磁場と電場をスケーリングすると, アンペールの法則の電場の時間変位項が結果的に消える.

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J}$$

MHD 近似下のオームの法則を適用すると誘導方程式が求まる.

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

詳細は次のスライドへ

MHD 近似 (4)

- MHD 下のアンペールの法則の発散, ソレノイド条件, ベクトル解析の公式$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B}$ より
$$\mu \nabla \times \boldsymbol{J} = -\nabla^2 \boldsymbol{B}$$
これとオームの法則とファラデーの法則より,
$$\mu\sigma \nabla \times (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -\nabla^2 \boldsymbol{B}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \boldsymbol{B}$$

MHD 近似 (5)

- 誘導方程式が回転系でも同じ表現であることを示す.
  まずは慣性系の物質微分はベクトル解析の公式とソレノイド条件, そしてオイラー微分とラグランジュ微分の関係より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) \\
&= \Big((\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\Big) + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B})
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I = -\boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B})
$$

以後慣性系の値には下付き添え字で I をつけ回転系の値には R を付ける

MHD 近似 (6)

- 角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ が一定とすると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I &= -\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_I) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_I + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&= -\boldsymbol{B}(\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)(\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\
&= -\boldsymbol{B}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_R - \boldsymbol{B}\nabla\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_R + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_I - \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_R - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_R) + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

MHD 近似 (6)

- 誘導方程式と$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$の内積をとると, エネルギー方程式が求まる.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2\mu}\right) dV = \int_V \left(-\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}\times\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\right) - \underbrace{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})}_{\text{ローレンツ力による仕事}} - \underbrace{\frac{|\boldsymbol{J}|^2}{\sigma}}_{\text{オーム加熱（ジュール加熱）}}\right) dV$$

MHD のまとめ

- MHD 方程式は物体の運動が光速よりも十分に遅いときを考えた近似である.
  - 誘導の式
  $$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B})$$
  これは回転系でも同様の形式である.
  - 磁場のソレノイド条件
  $$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
  - アンペールの法則
  $$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J}$$

流体力学および熱力学の復習

- ナビエ=ストークスの式

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right)=\rho\boldsymbol{F}_b+\boldsymbol{F}_s$$

- 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

- ニュートン流体

$$\tau_{ij}=\rho\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

- 熱力学の式

$$\rho\frac{dU}{dt}-\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\varepsilon+H_M$$

- フーリエの法則

$$\boldsymbol{q}=-k\nabla T$$

- オーム加熱

$$H_M=\frac{|\boldsymbol{J}^2|}{\sigma}$$

$\boldsymbol{v}$: 流速 ρ : 流体の密度 $\boldsymbol{F}_b$: 体積力 $\boldsymbol{F}_S$: 面積力 τ_{ij} :粘性応力テンソル U : 系の内部エネルギー
p : 圧力 $\boldsymbol{q}$: 単位体積当たりの熱フラックス ε :単位体積当たりの熱生成率
H_M :単位体積当たりの磁場による加熱 T : 温度 k : 熱拡散係数

剛体回転中の物質微分

- 剛体回転中の物質微分が $\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{A}$ であるので加速度を陽に書くと

$$\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)_I = \boldsymbol{a} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}}_{\text{コリオリ力}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{x}}_{\text{ポアンカレ力}} + \underbrace{\frac{1}{2}\nabla[(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})^2]}_{\text{遠心力（勾配表示）}}$$

- $\boldsymbol{\Omega}$が一定とすると, ナビエ=ストークス方程式は

$$\rho\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}\right) = \rho\boldsymbol{F}_b + \boldsymbol{F}_s$$

ブシネスク近似 (1)

- 基本場からの変動が小さいことをここに示す.
  - 静力学平衡の圧力 $10^9\mathrm{Pa}$ に対して変動は $10^4\mathrm{Pa}$ 程度.
  - 熱伝導の時定数 $10^{10}\mathrm{yr}$ に対して対流の回転時間は $10^3\mathrm{yr}$ 程度.
    つまりエントロピーの変動は小さい. (十分に混合されている.)

ブシネスク近似 (2)

- 密度に関して基本場 ρ_0 と変動 ρ_1 は連続の式より
$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v})$$
しかしこれが成り立つ時間スケールは数分以内でそれより大きいスケールでは左辺が無視される.
したがって連続の式は
$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

下付き添え字で 0 は平均値であり, 1 は摂動の値である.

ブシネスク近似 (3)

- 熱力学の式 $dU + pdV = \delta Q$ は

$$\rho \frac{dU}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \varepsilon + H_M$$

  となる.
- 熱力学関係式 $\mathrm{dU} + pdV = TdS$ とフーリエの法則より

$$\rho T_0 \frac{\mathrm{dS}_1}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T_0) + \varepsilon + H_M$$

  H_M はオーム加熱である.

ブシネスク近似のまとめ

- ブシネスク近似下では運動方程式, 連続の式, 熱の式は次のようになる.
  - ナビエ=ストークス方程式
    $$\rho_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}\right)=-\nabla\left[p+\frac{1}{2}\rho\nabla(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2\right]+\nabla\cdot\tau+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$$
  - 連続の式
    $$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$
  - 熱の式
    $$\rho T_0\frac{\mathrm{dS}_1}{dt}=\nabla\cdot(k\nabla T_0)+\varepsilon+\frac{|\boldsymbol{J}^2|}{\sigma}$$

参考文献

- Gubbins, D., and Roberts, P.H., 1987: Magnetohydrodynamics of the earth's core.
  Jacobs, J.A., Ed., Geomagnetism, Vol.2, 1–184.
- 吉田茂生, 竹広真一, 佐々木洋平, 林祥介, 2002: 磁気流体力学 (MHD) の定式化. at https://www.gfd-dennou.org/library/riron/mhd/teishiki/pub/teishiki.pdf (2021 年11 月閲覧)
- 木村龍治 (1983) 『地球流体力学入門』
  東京堂出版 (気象学のプロムナード).