

ブシネスク流体プリミティブ方程式系の 数値計算に向けて ～スペクトル法を用いた数値モデル構築の練習～

2021/12/15

流体地球物理学教育研究分野 M1

岡田和真

1. はじめに
2. スペクトル法の基礎
3. 時間積分法
4. 数値計算コードの実装に関するテスト
5. SPMODEL の概要
6. SPMODEL を用いた数値計算の練習
7. まとめ
8. 参考文献

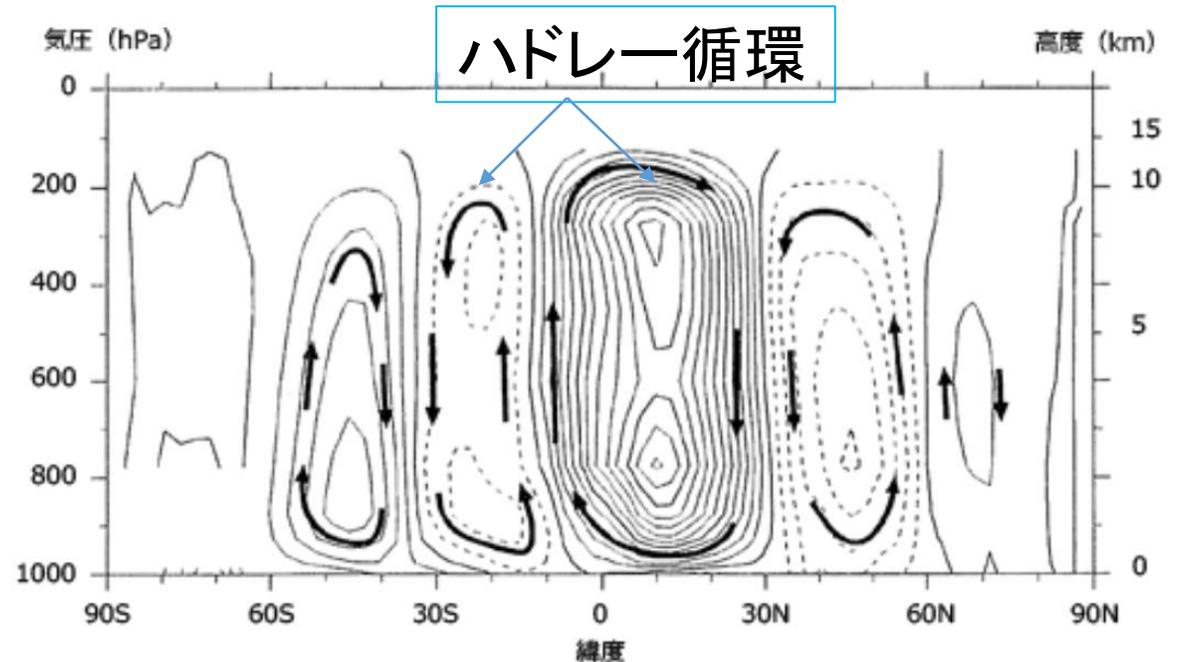
1. ハドレー循環とは

□ 地球には「ハドレー循環」と呼ばれる大気の大規模な運動が存在する

➤ ハドレー循環:

熱帯付近で上昇し, 亜熱帯付近で下降する大気の流れ

右図*: 子午面の質量流線関数
• 現実の地球の1月の平均値



1. ハドレー循環研究の歴史*

□ ハドレー循環:

George Hadley (1686), (1735) によって
貿易風を説明するための理論に導入された

- Hadley が考えたハドレー循環は赤道から極まで伸びる 1 セル構造であった

1. ハドレー循環研究の歴史*

□ Hadley 的描像の矛盾を指摘:

➤ Dove (1837):

直接循環 (ハドレー循環) は中緯度までしか到達せず, 高緯度では非軸対称的な風系

□ コリオリ力を取り入れた新たな大循環論

➤ Ferrel (1856):

軸対称 3 セル循環

1. ハドレー循環研究の歴史*

□ 非軸対称的大循環像:

➤ Jeffrey (1926):

非軸対称擾乱による角運動量の水平輸送の重要性を指摘

➤ V. Bjerknes (1937):

軸対称循環の不安定性を示唆

□ 現在に至るまでハドレー循環の力学に関する様々な研究がおこなわれてきた

1. Held and Hou (1980) について

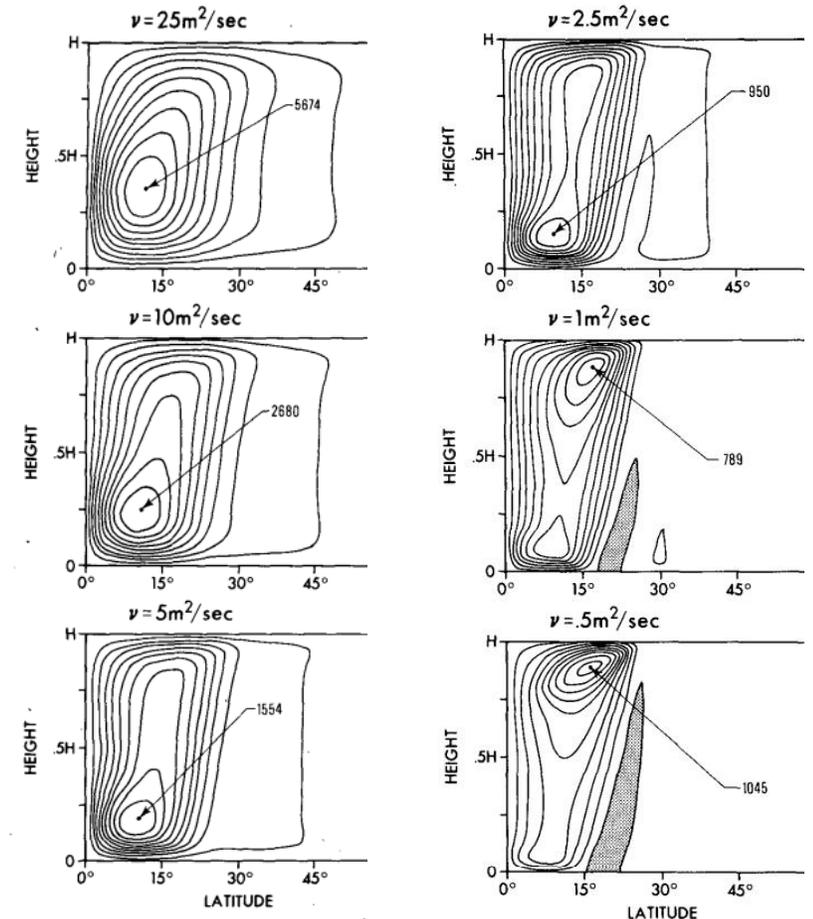
□ 数値モデルを用いた研究もおこなわれている

➤ Held and Hou (1980):

- 軸対称, ブシネスクモデル
- ハドレー循環の動粘性率への依存性について調べた

右図*: 流線関数の等値線

- 等値線に沿う時計回りの流れを意味



1. 修士研究の着眼点

- Held and Hou (1980), Lindzen and Hou (1988) では熱強制項をニュートン加熱冷却でとりいれた数値モデルを使用
 - 熱強制:
非断熱的に大気を加熱冷却する
 - ニュートン加熱冷却:
ある「放射平衡温度場」を与えて, その温度場とモデル内の温度場の差に比例する熱強制

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dots - \frac{T - T_{\text{eq}}}{\tau}$$

文字の定義

t : 時刻, T : モデル内温度場

T_{eq} : 放射平衡温度場, τ : 時定数

1. 修士研究の目的 & 進捗

□ 放射平衡温度場

- Held and Hou: 赤道対称 (時間変化しない)
 - 意図: 年平均した太陽加熱分布
 - 結果: 現実大気のハドレー循環の強さより弱い
- Lindzen and Hou: 赤道非対称 (時間変化しない)
 - 意図: 季節により太陽による加熱中心は異なる
 - 結果: 冬半球のハドレー循環は夏半球のものより強い
(現実大気の性質をとらえている)

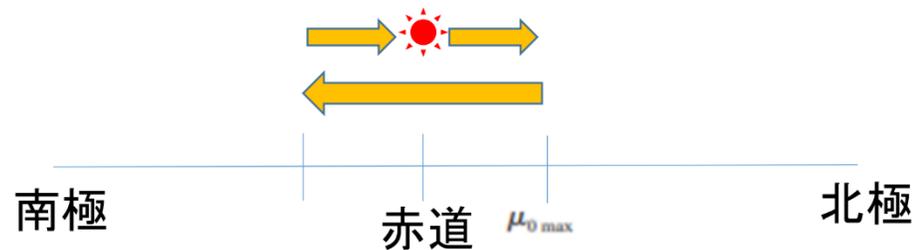
□ 修士課程では, 放射平衡温度場の違いがハドレー循環の力学にどのような違いをもたらすのかを調べる

1. 前回の大気セミナー

□ そこで前回の大気セミナーではFang and Tung (1999) のレビューを行った

➤ Fang and Tung (1999):
時間変化する放射平衡温度場を用いてハドレー循環の力学を調べた研究

- 時間変化する放射平衡温度場のイメージ



意図: 太陽放射を最も強く受ける緯度が時間とともに変化する
→ 季節変化をもたらす

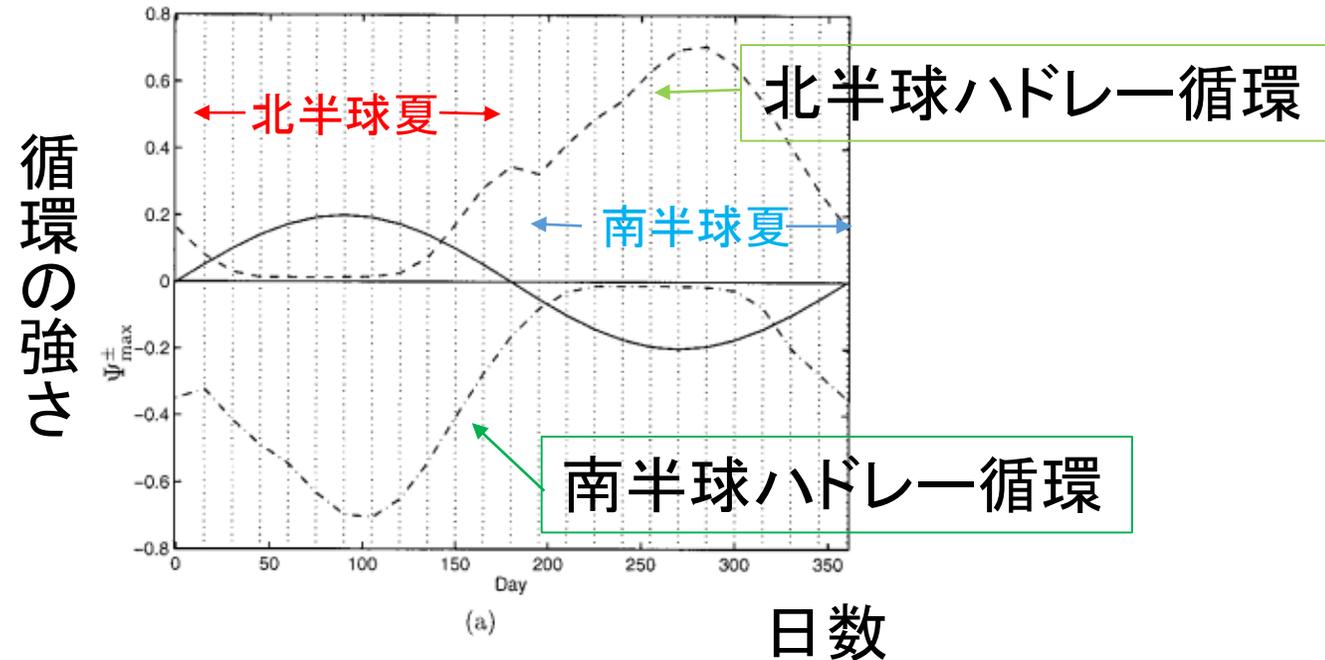
1. 前回の大気セミナー

□ Fang and Tung (1999) の結果の一部

✓ ハドレー循環の季節的な変化の再現

- **北半球が夏の時**, 南半球のハドレー循環が強く, 北半球のハドレー循環が弱い (**その逆も**).

右図*:
子午面流線関数の最大値



1. 修士研究の今後の方針

□ Fang and Tung (1999) で示されたハドレー循環の季節的な変化の追試を数値計算により行う

➤ 数値モデル:

- 空間 2 次元: 緯度 + 高度
- 自転軸対称
- 乾燥大気
- ブシネスク流体プリミティブ方程式系
- 鉛直方向の粘性拡散
- 熱強制はニュートン加熱冷却

1. 修士研究の今後の方針

□ 想定している過程

① 数値モデルを構築する

- 数値計算法の基礎
- SPMODEL を用いた数値計算の練習
- (先ほど説明した)数値モデルの構築

② モデルチェックを行う

③ 追試を行う

今日の大気セミナーの内容

今後実施予定

1. はじめに

□ 数値計算法

➤ 空間方向:

スペクトル法を用いた離散化

➤ 時間方向:

古典的な4次のルンゲクッタ法を用いた積分

それぞれの説明を以降で行う

2. スペクトル法の基礎

- スペクトル法とは:
ある領域で定義される変数を境界条件を満たすような直交関係のある関数系 (展開関数系) の和で表す (近似する) 方法.
- スペクトル展開することで, 偏微分方程式は各波数成分の波の振幅 (展開係数) に関する常微分方程式となる.

2. スペクトル法の基礎

□ スペクトル法を用いるメリット

- ① 展開関数系として滑らかな関数系を用いるので偏微分を差分近似することに伴う誤差がない
- ② 展開関数系として適切なものを用いれば離散化して得られる常微分方程式が簡単になる
- ③ 地球流体力学の分野では境界条件や領域の形が比較的簡単に設定されていることも多いため展開関数系を構成しやすい

2. 線形偏微分方程式に対するスペクトル法

□ 線形の場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

初期条件: $u(x, 0) = f(x)$

境界条件: $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$

➤ 周期境界条件なのでフーリエ級数で展開する

$$u(x, t) = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k(t) e^{ikx}$$

文字の定義

x : 座標, t : 時刻

u : 流速, c : 移流速度

k : 波数, N : 切断波数

$\hat{u}_k(t)$: 展開係数

2. 線形偏微分方程式に対するスペクトル法

□ 三角関数の直交性より

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} + cik\hat{u}_k = 0, \quad (k = -N, \dots, N)$$

□ 展開係数の初期値は実空間上での初期分布をフーリエ変換すると

$$\hat{u}_k(0) = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} f(x_j) e^{-ikx_j}, \quad (k = -N, \dots, N)$$

文字の定義

J : 分点数

$x_j = \frac{2\pi}{J}j \quad (j = 0, \dots, J-1)$

2. 非線形偏微分方程式に対するスペクトル法

□ 非線形項がある場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

初期条件: $u(x, 0) = f(x)$

境界条件: $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$

- 変換法を用いて非線形項を評価:
実空間上での非線形項の値を求めてから
スペクトル変換する
- ✓ スペクトル変換してから非線形項を評価する方法よりも (FFT* を用いることで) 計算量を減らせる

2. 変換法の使い方

□ 変換法

- ① 実空間上での値を求める (逆フーリエ変換)

$$u_j = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k e^{ikx_j}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j = \sum_{k=-N}^N ik \hat{u}_k e^{ikx_j} \quad (j = 0, \dots, J-1)$$

- ② 実空間上での非線形項の評価

$$F_j = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j = u_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j \quad (j = 0, \dots, J-1)$$

- ③ 非線形項のスペクトルデータを求める (フーリエ変換)

$$\hat{F}_k = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} F_j e^{-ikx_j} \quad (k = -N, \dots, N)$$

文字の定義

J : 分点数

$$x_j = \frac{2\pi}{J} j$$

2. 展開係数に対する常微分方程式

□ これらの常微分方程式を解けばよい

➤ 線形の場合

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} + cik\hat{u}_k = 0$$

➤ 非線形の場合

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} + \hat{F}_k = 0$$

ここで

$$\hat{F}_k = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} u_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j e^{-ikx_j}$$

$$\text{初期条件: } \hat{u}_k(0) = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} f(x_j) e^{-ikx_j}$$

$$\text{境界条件: } u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$$

2. 常微分方程式の解き方

□ 数値計算の流れ

- ① 初期分布をフーリエ変換し,
展開係数の初期値 $\hat{u}_k(0)$ を求める
- ② 適当な時間積分法を用いて,
次の時刻における $\hat{u}_k(t)$ を順次求める
- ③ $\hat{u}_k(t)$ を逆フーリエ変換し
実空間上での $u(x, t)$ を求める

□ 次に時間積分法について説明する

3. 時間積分法

□ 常微分方程式の数値解法

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

スカラー関数 : $x(t), f(x, t)$

- ある時刻 t_n における x の値 $x(t_n) = x_n$
がわかっているとき
次の時刻 t_{n+1} における x の値 $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$
を求める

3. オイラー法

□ $t_{n+1} = t_n + h$ のとき

次の時刻まわりの解のテイラー展開

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2}x''(t_n) + \dots$$

□ オイラー法はテイラー展開の 1 次の項まで考える

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n = x_n + hf(x_n, t_n)$$

- 問題点: 打ち切り誤差*が大きいため, 計算の精度をよくするためには時間刻み幅を小さくする必要があり, 長時間の積分にはあまり適していない.

定義

h : 時間刻み幅

$$x'(t_n) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_n} = f(x_n, t_n)$$

* オイラー法では, テイラー展開の二次以上の項を打ち切っているため, 2 次以上の項が打ち切り誤差である

3. ルンゲクッタ法

- ルンゲクッタ型公式はテイラー展開とより高次の項まで一致させようとする
- ルンゲクッタ型公式の一般形:

$$\tilde{x} = x + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + \dots$$

$$k_1 = hf(x, t)$$

$$k_2 = hf(x + Ak_1, t + Bh)$$

$$k_3 = hf(x + Ck_1 + Dk_2, t + Eh)$$

⋮

文字の定義

$$\tilde{x} = x_{n+1}, \quad x = x_n$$

w : 重み, A, B, C, \dots : 定数

3. ルンゲクッタ法

- テイラー展開と一致するように重みと定数を求める
- 2次まで一致させる場合

➤ ルンゲクッタ公式

$$k_1 = hf(x, t)$$

$$k_2 = hf(x + Ak_1, t + Bh)$$

$$= h\{f(x, t) + Ak_1 f_x + Bh f_t + O(h^2)\}$$

$$\tilde{x} = x + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

$$= x + h(w_1 + w_2)f + h^2 w_2 (A f f_x + B f_t) + O(h^3)$$

文字の定義

$$f = f(x, t), \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$$

➤ テイラー展開

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + hx' + \frac{h^2}{2}x'' \\ &= x + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f f_x) \end{aligned}$$



ここで

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{df(x(t), t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} = f_t + f f_x \end{aligned}$$

を用いる

3. ルンゲクッタ法

□ 2次まで一致させる場合

➤ それぞれの項を比較すると

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_2 A = 1/2, \quad w_2 B = 1/2$$

➤ これらを満たす解のうちの一つは

$$w_1 = w_2 = 1/2, \quad A = B = 1$$

➤ このとき

$$k_1 = hf(x, t)$$

$$k_2 = hf(x + k_1, t + h)$$

$$\tilde{x} = x + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

3. 古典的な 4 次のルンゲクッタ公式

- 2 次以上まで一致させたい場合も同様に重みと係数を求めればよい (計算は複雑になる)
- 古典的な 4 次のルンゲクッタ公式*:

$$k_1 = hf(x, t)$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{1}{2}k_1, t + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{1}{2}k_2, t + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_4 = hf(x + k_3, t + h)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

* 詳しい導出は
<https://mathematics-pdf.com/pdf/runge-kutta.pdf> に書かれている

4. 数値計算コードの実装に関するテスト

□ 1次元線形移流方程式を数値的に解く

- 空間離散化にはスペクトル展開
- 時間積分には4次のルンゲクッタ法
- SPMODEL* (後で説明) は用いない

- ◆ 目的: スペクトル法とルンゲクッタ法の原理を理解し, 正しく実装できているか確かめるため

4. 数値計算コードの実装に関するテスト

□ 支配方程式 (移流速度 1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

初期条件: $u(x, 0) = \sin x$

境界条件: $u(x + 2\pi, t) = u(x, t)$

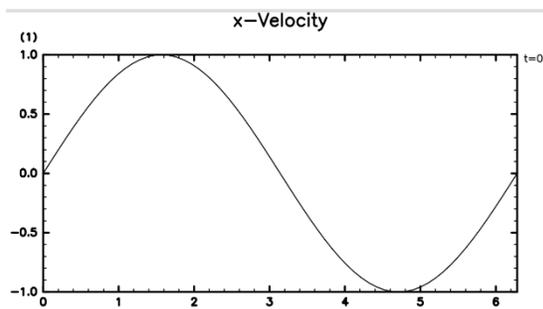
□ 実験設定

領域の大きさ	$(0, 2\pi)$	切断波数	21	格子点数 (x)	64
時間刻み幅	$2\pi/64$	積分時間	2π	出力間隔	$2\pi/64$

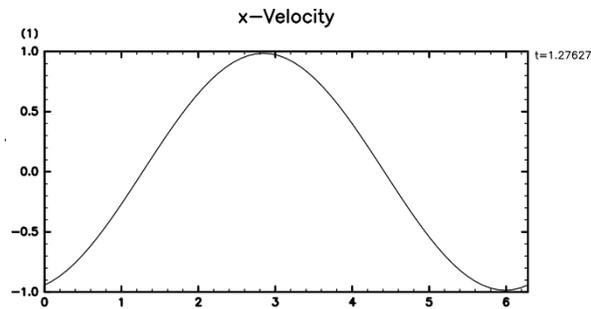
4. 数値計算コードの実装に関するテスト

□ 計算結果

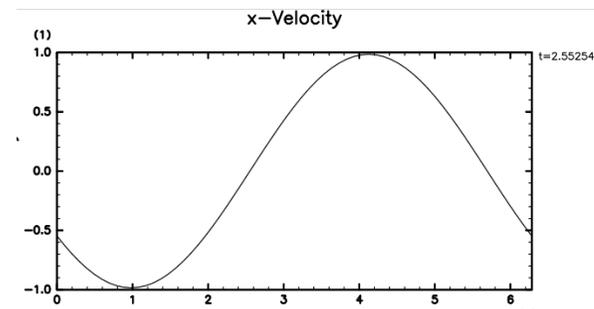
➤ 移流される様子が確認できた



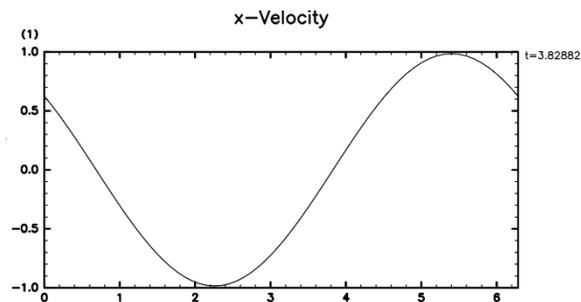
t=0



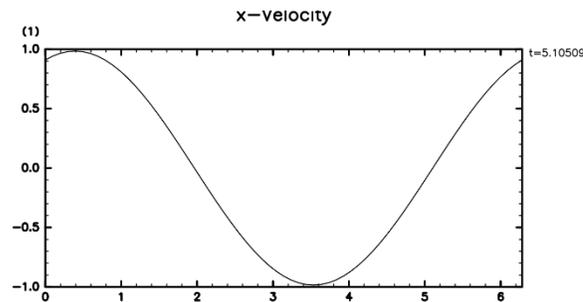
t=1.27



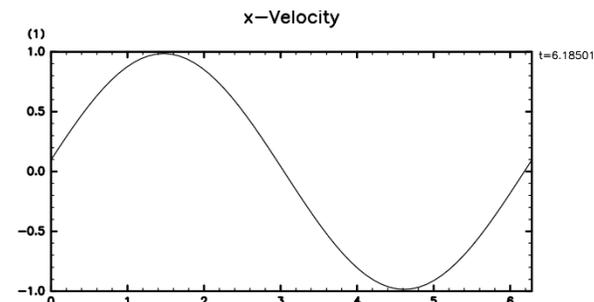
t=2.55



t=3.82



t=5.10



t=6.18

x-coord

5. SPMODEL の概要

□ 以後では SPMODEL* を用いた数値実験の解説を行う

➤ SPMODEL:

スペクトル計算のためのサブルーチン, 関数を提供

✓ 提供されているサブルーチン, 関数

- 変換: 格子点 \Leftrightarrow スペクトル空間
- 微分計算
- 積分・平均演算

5. SPMODEL の概要

- 領域の形状, 境界条件に合わせて使用するモジュールを選択する
- 時間発展計算部分はユーザが記述
 - 先ほど説明した古典的な4次のルンゲクッタ法を用いる

6. SPMODEL を用いた数値計算練習

□ SPMODEL を用いて数値実験を行う

➤ 目的: モデル構築の練習

◆ 二次元平面

- 非線形移流方程式
- 非線形移流拡散方程式

◆ 二次元球面

- 回転系における渦度方程式

◆ 二次元球面 + 厚さ (浅水方程式)

- Williamson et al. (1992) の標準実験の一部

6. SPMODEL を用いた数値計算練習

□ 2次元平面における数値実験

- 支配方程式: 渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

- 境界条件: 二重周期境界
→ フーリエ級数で展開

- 実験設定

領域の大きさ (x, y)	1×1	切断波数 (x, y)	ともに 10	格子点数 (x, y)	32×32
時間刻み幅	0.1	積分時間	500	出力間隔	50

関係式

$$\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi$$
$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

文字の定義

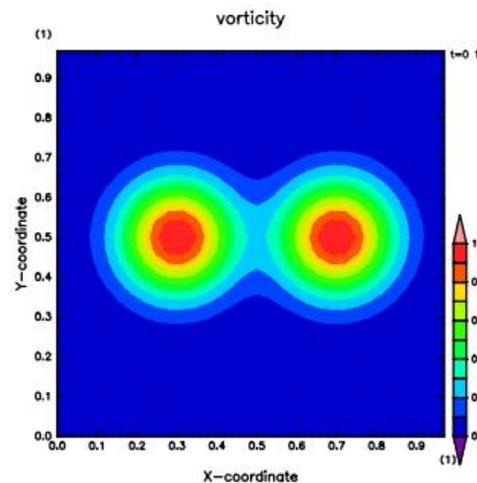
ζ : 渦度, ψ : 流線関数
 (u, v) : (x, y) 方向の流速

6.2 次元平面非線形移流方程式

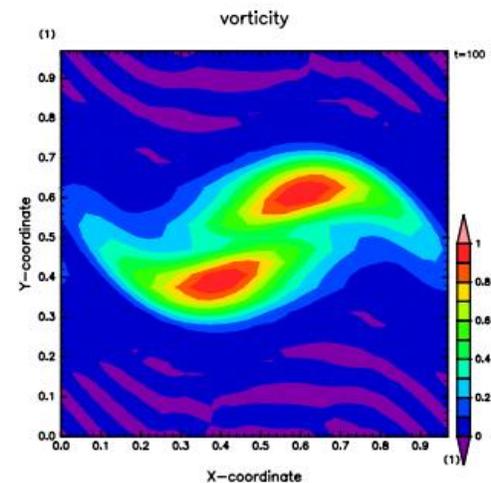
□ 初期に渦を二つ置く:

$$\zeta = 50 \left\{ e^{-[(x-0.3)^2 + (y-0.5)^2]} + e^{-[(x-0.7)^2 + (y-0.5)^2]} \right\}$$

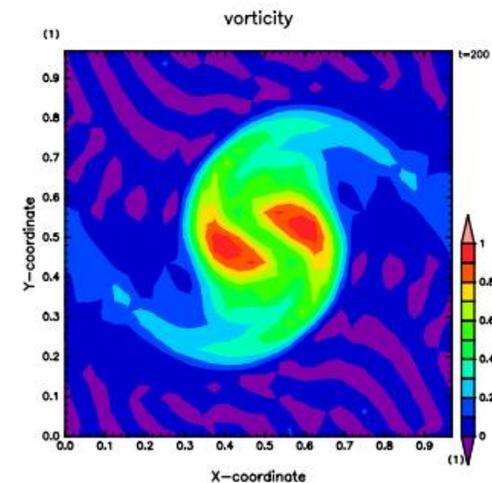
□ 二つの渦が融合して大きい渦になる



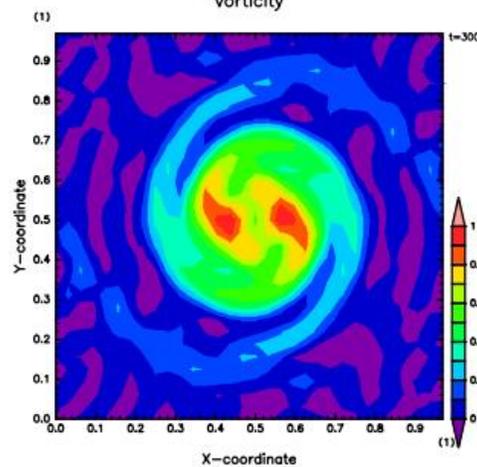
t = 0
vorticity



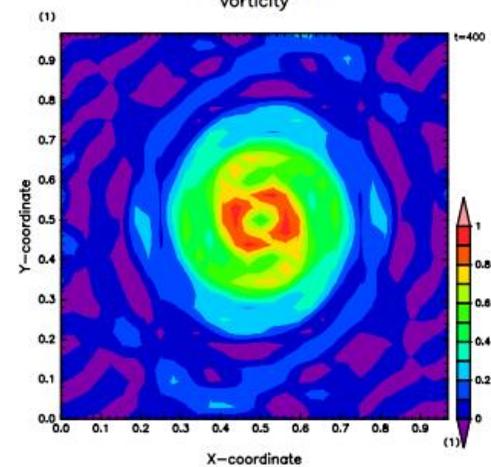
t = 100
vorticity



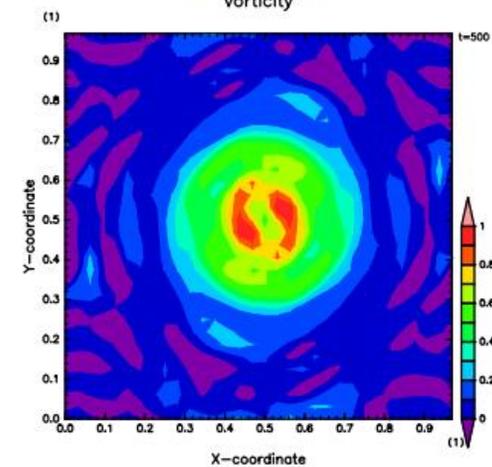
t = 200
vorticity



t = 300



t = 400



t = 500

6. SPMODEL を用いた数値計算練習

□ 2次元平面における数値実験

- 支配方程式 (非線形移流 + 拡散)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu \nabla^2 \zeta$$

- 境界条件: 二重周期境界
→ フーリエ級数で展開

- 実験設定

領域の大きさ (x, y)	1×1	切断波数 (x, y)	ともに 10	格子点数 (x, y)	32×32
時間刻み幅	0.1	積分時間	500	出力間隔	50

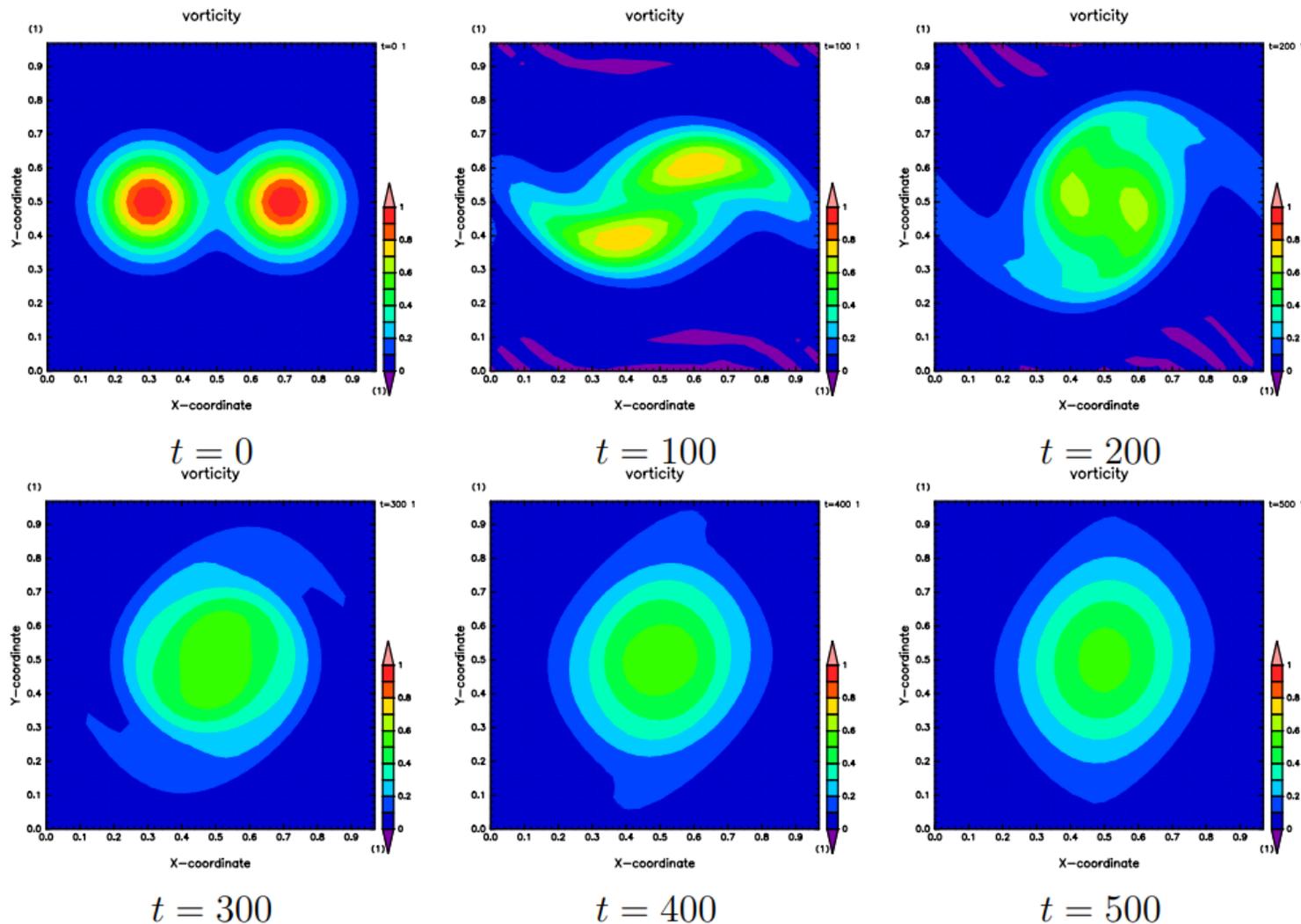
$$\nu = 0.0001$$

6.2 次元平面非線形移流拡散方程式

- 初期に渦を二つ置く:

$$\zeta = 50 \left\{ e^{-[(x-0.3)^2 + (y-0.5)^2]} + e^{-[(x-0.7)^2 + (y-0.5)^2]} \right\}$$

- 二つの渦が拡散しながら融合して大きい渦になる



6. SPMODEL を用いた数値計算練習

□ 球面上における数値実験

- 支配方程式: 渦度方程式 (コリオリ力あり)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)u\} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)v \cos \phi\}$$

- 球面調和関数で展開する
 - 以降で説明

関係式

$$\zeta = \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right)$$
$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

文字の定義

λ : 経度, ϕ : 緯度, u, v : 東西, 南北流速度

$a = 6.371 \times 10^6$ m: 惑星半径, $\Omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$: 自転角速度

6. 回転球面上での渦度方程式

□ 球面調和関数で展開する

□ 球面調和関数

➤ 球面上の水平ラプラシアン固有関数

$$\nabla^2 = \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\}$$

$$\nabla^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -n(n+1) Y_n^m(\lambda, \mu)$$

➤ ルジャンドル陪関数と三角関数により

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$$

□ ルジャンドル陪関数

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{1}{2^n n!}} (1-\mu^2)^{|m|/2} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2 - 1)^n$$

文字の定義

Y_n^m : 球面調和関数, m : 東西波数, n : 全波数

λ : 経度, $\mu = \sin \phi$: サイン緯度

P_n^m : ルジャンドル陪関数

6. 回転球面上での渦度方程式

□ 西進する波 (ロスビー波) のチェックを行う

➤ 二次元非圧縮の式

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) = 0$$

より, 渦度方程式は

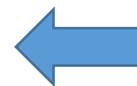
$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2} \left\{ \left(\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \left(\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - 2\Omega \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\}$$

となる. これに

$$\psi = Y_n^m e^{-i\omega t}$$

を代入すると, 分散関係が得られる

$$\frac{\omega}{m} = \frac{-2\Omega}{n(n+1)}$$



位相速度が負なので
理論的には西進する

6. 回転球面上での渦度方程式

□ 西進する波

□ 補足

$$(m, n) = (1, 1)$$

とすると分散関係は

$$\omega = -\Omega$$

となる。つまり

$$\frac{2\pi [\text{rad}]}{\Omega [\text{rad/s}]} = \frac{2\pi}{7.292 \times 10^{-5}}$$

$$\sim 86161. \dots [\text{s}]$$

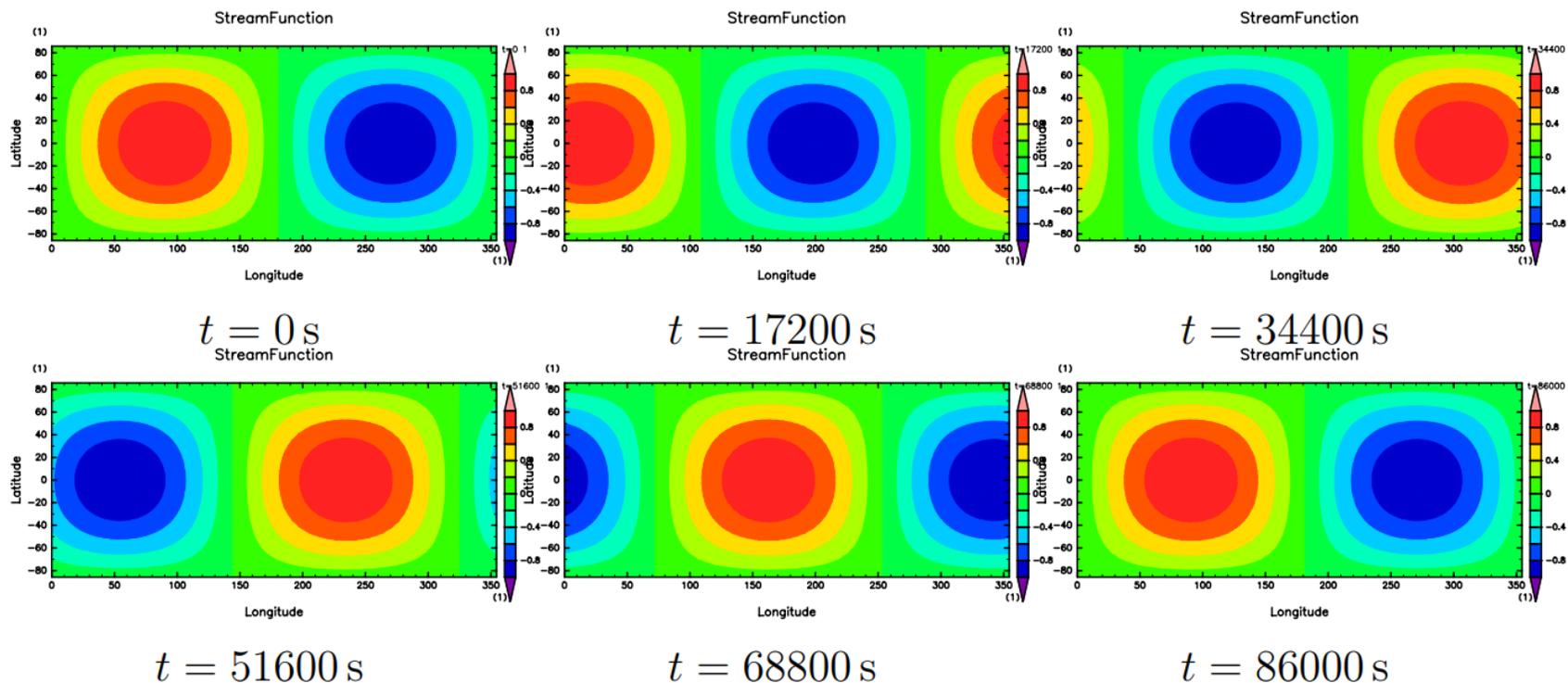
$$\sim 1 [\text{地球日}]$$

□ 初期場: 東西波数 1

$$\psi = \sin \lambda \cos \phi$$

実験設定

切断全波数	21	格子点数 (経度)	64	格子点数 (緯度)	32
時間刻み幅	86 s	積分時間	86000 s	出力間隔	860 s



6. SPMODEL を用いた数値計算練習

□ Williamson et al. (1992) の標準実験の一部

□ Williamson et al. (1992) :

浅水方程式系の標準実験を提案

- | | |
|-------------------------------|-----|
| • テストケース 1: 極を越えるコサイン型の山の移流 | 実施 |
| • テストケース 2: 定常な非線形帯状地衡流 | 実施 |
| • テストケース 3: 局在した非線形帯状地衡流 | 未実施 |
| • テストケース 4: 移動する低気圧をもつ強制された流れ | 未実施 |
| • テストケース 5: 孤立した山を越える帯状流 | 未実施 |
| • テストケース 6: ロスビー・ハウルヴィッツ波 | 実施 |

□ テストケース 2 のみ解説する

6. Williamson et al. (1992) での方程式系

□ 浅水方程式系

$$\text{渦度: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)u\} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)v \cos \phi\}$$

$$\begin{aligned} \text{発散: } \frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)v\} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{(\zeta + 2\Omega \sin \phi)u \cos \phi\} \\ &\quad - \nabla_H^2 \left(g\eta + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{層の厚さ: } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\eta) - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\eta \cos \phi)$$

球面ラプラシアン

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

文字の定義

λ : 経度, ϕ : 緯度, t : 時刻

ζ : 渦度, D : 発散, η : 表面変位 (高さ)

u : 東西風速度, v : 南北風速度, ψ : 流線関数, χ : 速度ポテンシャル

a : 球の半径, Ω : 自転角速度, g : 重力加速度

6. Williamson et al. (1992) の標準実験

- (テストケース 2) 定常な非線形帯状地衡流:
 - 定常状態での非線形球面浅水方程式の解
 - 剛体回転*の流れ場
 - 流れ場に地衡流平衡する厚さ分布

 - 初期値として以上の解を与え以下の時間発展を計算
 - 渦度
 - 発散
 - 層の厚さ

* 惑星表面に対して同じ角速度で回転する状態

6. 定常な非線形帯状地衡流

□ 初期値 (定常状態での解析解)

➤ 流速場

$$u = u_0(\cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \cos \lambda \sin \alpha)$$

$$v = -u_0 \sin \lambda \sin \alpha$$

➤ 層の厚さ

$$\eta = h_0 - \left(a\Omega u_0 + \frac{u_0^2}{2} \right) (-\cos \lambda \cos \phi \sin \alpha + \sin \phi \cos \alpha)^2 / g$$

コリオリパラメータの定義:

$$f = 2\Omega(-\cos \lambda \cos \phi \sin \alpha + \sin \phi \cos \alpha)$$

□ 実験設定, 定数

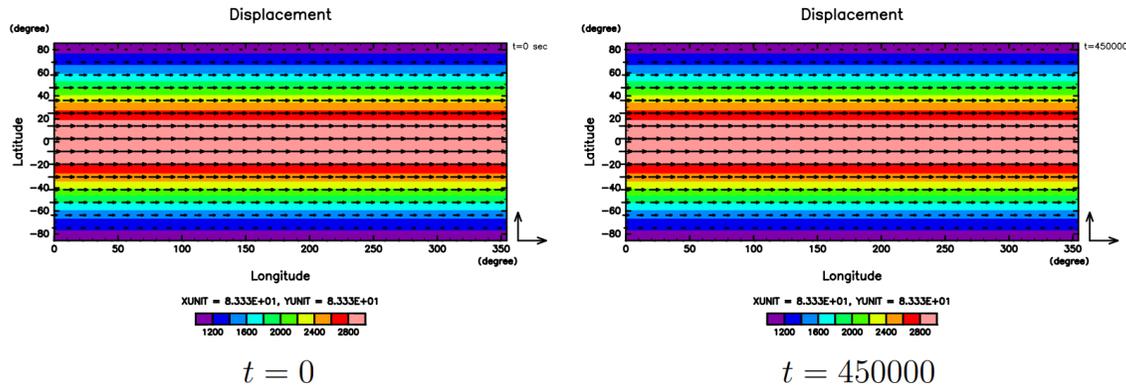
切断全波数	21	格子点数 (経度)	64	格子点数 (緯度)	21
時間刻み幅	150 s	積分時間	450000 s	出力間隔	1500 s

a	6.371×10^6 [m]	Ω	7.292×10^{-5} [/s]	g	9.81 [m/s ²]
α	$0, \pi/2$	u_0	$2\pi a / (12 \text{ 日})$ [m/s]	h_0	$2.94 \times 10^4 / g$ [m]

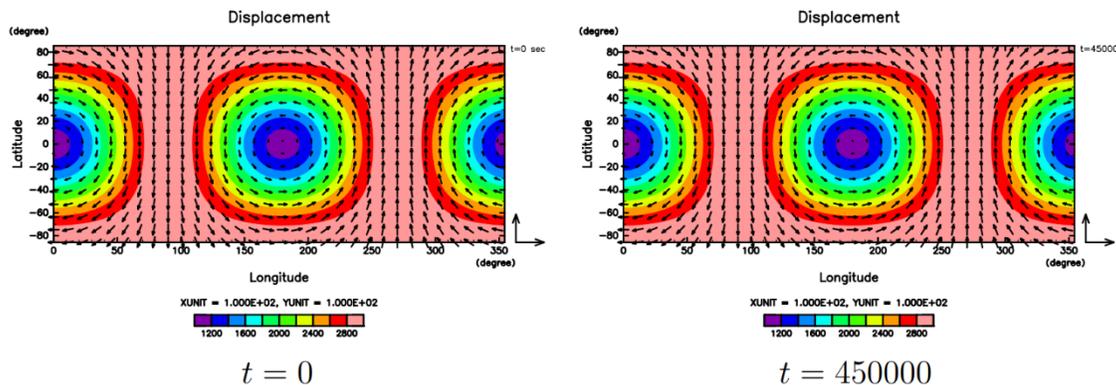
6. Williamson et al. (1992) の標準実験

□ 非線形帯状地衡流のテスト

➤ $\alpha = 0$ のとき



➤ $\alpha = \pi/2$ のとき



トーン: 層の厚さ
ベクトル: 水平速度

- 計算終了時点でも地衡流が保たれている
→ 力学過程は正しく実装できた

7. まとめ

- Fang and Tung (1999) の追試を行うため
数値モデル (ブシネスク流体プリミティブ方程式) の構築を始めた
 - スペクトル法の基礎から学び, いくつかの数値実験を行った
 - ✓ 時間発展計算には 4 次のルンゲクッタ法を使用
 - 力学過程は正しく実装できた
- 現在: 鉛直方向にスペクトル展開を用いる空間 3 次元の数値モデルを試作中
- 今後の課題: モデルを完成させ, モデルチェックを行う

8. 参考文献

- 石岡圭一, 2004: 「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会
- 大関誠, 2006: 「気象研究ノート: スペクトルモデル入門」, 日本気象学会
- 山本博基, 2009: 「修士論文付録 B」, http://www.gfd-dennou.org/member/hiroki/file/BPmodel/Note_BPM.pdf
- 佐藤正樹, 1992: 「軸対称流セミナー: ハドレー循環」, <https://www.gfd-dennou.org/arch/gfdsemi/1992-04-05/satoh/pub/001.htm>
- David L. Williamson, John B. Drake, James J. Hack, Rudiger Jakob, Paul N. Swarztrauber, 1991: 「A Standard Test for Numerical Approximation to the Shallow Water Equation in Spherical Geometry」, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 102, 211-224 (1992)
- Geoffrey K. Vallis, 2017: 「Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics」, Cambridge University Press

8. 参考文献

- Ming Fang, Ka Kit Tung, 1999: 「Time-Dependent Nonlinear Hadley Circulation」, JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES
- 地球流体電脳倶楽部, 2002: 「階層的地球流体スペクトルモデル集 SPMODEL」 <https://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/index.htm.ja>
- 地球流体電脳倶楽部, : 「大気大循環モデル DCPAM, 定式化文書」
 - https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf
 - https://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf