

# 回転球殻 MHD ダイナモ解に対する上部力学的境界条件の影響

## The effects of the upper mechanical boundary condition on MHD dynamo solutions in a rotating spherical shell

佐々木洋平, 北大・理, 〒060-0810 札幌市北区北十条西 8 丁目, E-mail: uwabami@gfd-dennou.org

竹広真一, 京大・数理研, 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町, E-mail: takepiro@gfd-dennou.org

林祥介, 神大・理, 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 E-mail: shosuke@gfd-dennou.org

倉本圭, 北大・理, 〒060-0810 札幌市北区北十条西 8 丁目, E-mail: keikei@ep.sci.hokudai.ac.jp

Youhei SASAKI, Faculty of Science, Hokkaido University, Kita-10 Nishi-8, Kita-ku, Sapporo, Japan

Shin-ichi Takehiro, RIMS, Kyoto University, Kitashirawaka Oiwake-chou, Sakyo-ku, Kyoto, Japan

Yoshi-Yuki Hayashi, Faculty of Science, Kobe University, Rokkoudai 1-1, Nada-ku, Kobe, Japan

Kiyoshi Kuramoto, Faculty of Science, Hokkaido University, Kita-10 Nishi-8, Kita-ku, Sapporo, Japan

Numerical experiments of magnetohydrodynamic (MHD) dynamos driven by thermal convection in a rotating spherical shell with a free-slip top boundary and a no-slip bottom boundary are performed. The Ekman number, the Prandtl number and the ratio of inner and outer radii are fixed to  $10^{-3}$ , 1, and 0.35, respectively. The magnetic Prandtl number  $Pm$  is varied from 1 to 50. The modified Rayleigh number  $Ra$  is increased up to 15 times the critical value  $Ra_c$ . MHD calculations are carried out from non-magnetic thermal convection solutions with a weak dipole magnetic field on top of them, and dynamo solutions are obtained when  $Ra \geq 1.87Ra_c$  and  $Pm \geq 4$ . The strong prograde zonal flows in the non-magnetic solutions disappear in the dynamo solutions as the evolution of magnetic fields, and slow retrograde zonal flows emerge at the top of the spherical shell. As a result, the omega effect which was expected from the strong zonal flows of the non-magnetic solutions does not operate effectively. All of the obtained dynamo solutions are considered to be categorized as the  $\alpha^2$ -type dynamo.

### 1. はじめに

近年の計算機能力の向上により、太陽および惑星固有磁場の生成維持機構を調べることを目指した三次元回転球殻内の磁気流体力学的ダイナモ計算が行われるようになった。しかしながら、これらの数値計算で扱える粘性率や拡散率などのパラメータは現実の天体での値とは数桁も異なっている。そのため計算結果が直接的に天体の固有磁場および内部の運動を表現できているか定かでない。したがって実際の天体や惑星の磁場を計算機上で模倣することを目指すシミュレーション研究と平行して、現状の計算機で得られる範囲での解の性質を吟味し力学的構造を理解し、パラメータや成層構造・熱源の有無・境界条件などの物理設定に対する依存性を調べておくことが、観測される天体固有磁場の生成維持機構についての洞察を深めることにとって有益であると思われる。

ダイナモ作用への影響が明らかになっていない物理設定の一つに力学的境界条件が上げられる。これまでの多くのダイナモ計算では、地球型惑星の天体中心核とその外側領域のマントルを想定し、外側境界の力学条件に滑り無し条件を用いている<sup>(1,2)</sup>。その一方で、滑り無し条件では境界層における粘性散逸を過大評価してしまう、という理由から、力学的境界条件として応力無し条件を用いるべきであるという主張もある<sup>(3)</sup>。また恒星やガス惑星におけるダイナモ作用を考察する場合には、力学境界条件としては応力無し条件が適切かもしれない。

磁場の生成維持が力学的境界条件にどのように依存するかを系統的に調べた研究は少ない。これまでの研究においては定性的な考察を行った<sup>(4,5)</sup>だけであり、力学的境界条件の違いが磁場の生成維持にどの様に影響を与えるのかは明らかにされていない。

そこで本研究では、球殻上端、球殻下端の力学的境界条件の組み合わせを変えて回転球殻 MHD ダイナモの数値実験を行い、力学的境界条件の違いが磁場の生成維持にどの様に影響を与えるかを系統的に調べることを目指している。今回は球殻上端の境界

条件の違いが磁場の生成維持にどの様に影響を与えるのかについて調べてみた。

### 2. モデルと計算設定

#### 2.1 基礎方程式系

角速度  $\Omega$  で回転する、内径外径がそれぞれ  $r_i, r_o$  の同心球に挟まれた球殻を考える。座標系として球殻の中心を原点とする緯度経度動径座標系  $(\lambda, \varphi, r)$  をとる。ここで  $\lambda$  は経度、 $\varphi$  は緯度、 $r$  は球殻中心からの距離である。球殻は熱膨張率  $\alpha$ 、熱拡散率  $\kappa$ 、動粘性係数  $\nu$ 、透磁率  $\mu$ 、磁気拡散率  $\eta$  のブシネスク磁気流体で満たされている。球殻中の流体には自己重力  $-g_o r/r_o$  がはたらいており、球殻上下端における温度差が  $\Delta T$  に固定されている。長さのスケールとして球殻の厚さ  $D = r_o - r_i$ 、時間のスケールとして粘性拡散時間  $D^2/\nu$ 、速度のスケールとして粘性速度  $\nu/D$ 、温度のスケールとして球殻上下端の温度差  $\Delta T$ 、磁束密度のスケールとして  $\sqrt{\rho\mu\eta\Omega}$  を用いて無次元化した支配方程式系は次の通りである：

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \right] + 2\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla p + Ra \frac{r}{r_o} T + \frac{1}{Pm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T, \quad (4)$$

ここで  $\mathbf{k}$  は回転軸方向の単位ベクトル、 $p$  は圧力、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $T$  はそれぞれ速度ベクトル、磁束密度ベクトル、温度である。方程式系に現れている無次元数

$$Ra = \frac{\alpha g_o \Delta T D}{\nu \Omega}, \quad E = \frac{\nu}{\Omega D^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Pm = \frac{\nu}{\eta} \quad (5)$$

はそれぞれ修正レイリー数, エクマン数, ブランドル数, 磁気ブランドル数である. 境界条件は, 球殻上下端で滑り無し条件を課す場合

$$u = 0, \text{ at } r = \frac{\xi}{1-\xi}, r = \frac{1}{1-\xi}, \quad (6)$$

もしくは, 球殻下端で滑り無し条件, 球殻上端で応力無し条件を課す場合

$$u = 0, \text{ at } r = \frac{\xi}{1-\xi},$$

$$u \cdot r = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u \times r}{r^2} \right) = 0, \text{ at } r = \frac{1}{1-\xi}$$

の二通りを考える. ここで  $\xi = r_i/r_o$  は球殻の内径外径比である. 温度境界条件は上下端で温度固定条件とする:

$$T = 0 \text{ at } r = \frac{1}{1-\xi}, \quad T = 1 \text{ at } r = \frac{\xi}{1-\xi}. \quad (7)$$

磁場の境界条件として球殻外部は不導体とする条件を用いる. このとき, 磁場は境界において外部のポテンシャル場に接続される. すなわち, 外部の磁場を  $B_e$ , そのポテンシャルを  $W$  として

$$B = B_e, \text{ at } r = \frac{\xi}{1-\xi}, \quad \frac{1}{1-\xi}. \quad (8)$$

ただし  $B_e = \nabla W, \quad \nabla^2 W = 0$  である.

### 2.2 実験設定

最初に磁場の存在しない静止場  $u = 0, B = 0$  に対してランダムな温度擾乱を与えて熱対流計算を実行し, 対流構造が統計的平衡状態に達した後に磁場を付与してダイナモ計算を行い, 磁場の発達の様子を観察した. 以前の研究では<sup>(6)</sup>, 付与する磁場として統計的平衡状態での運動エネルギーの 10 倍-100 倍の磁気エネルギーを持つ磁場を与えていた. そのため, 統計的平衡状態における熱対流の構造が初期段階から磁場の影響を強く受けてしまい, 境界条件が異なるにもかかわらず  $\alpha^2$  ダイナモ解へ収束したのではないかと, という疑問があった. そこで今回の計算では, ダイナモ計算を開始する際に付与する磁場として  $Ra = 100$  の場合の運動エネルギーの 0.01 倍のエネルギーを持つ弱い双極子磁場を初期値として与えた. 無次元パラメータは, 内径外径比を  $\xi = 0.35$ , ブランドル数を  $Pr = 1$ , エクマン数を  $E = 10^{-3}$  に固定し, 磁気ブランドル数  $Pm$  を 1 ~ 50, 修正レイリー数を臨界値の約 15 倍まで変えて計算を行なった. 実際の計算は, 速度場および磁場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルで表わし, 水平方向には球面調和関数, 動径方向にはチェビシェフ多項式を用いて展開して行なった. 解像度は, 全ての計算において水平切断波数 42, 鉛直切断波数 32 (経度 128 点, 緯度 64 点, 動径方向 32 点) に設定した.

## 3. 結果

### 3.1 磁場の存在しない場合の回転球殻熱対流

統計的平衡状態に達した磁場の存在しない場合の熱対流の構造を  $Ra = 150$  ( $Ra/Ra_c = 2.81, Ra_c$  は臨界レイリー数), および  $Ra = 750$  ( $Ra/Ra_c = 14.36$ ) の場合について Fig. 1 に示す. Fig. 1 左が  $Ra = 100$ , 右が  $Ra = 750$  の場合であり, 上段が赤道断面での温度場, 中段が赤道断面における流速ベクトルと回転軸方向の渦度の等値線, 下段が帯状平均流である.  $Ra = 100$  の場合, 流れ場は回転軸に沿った方向に伸びた規則正しい螺旋状の渦柱構造をしており, この渦柱が東向きに伝播する準定常状態が得られた.  $Ra = 750$  の場合には, 流れ場は  $Ra = 100$  の場合と同様に回

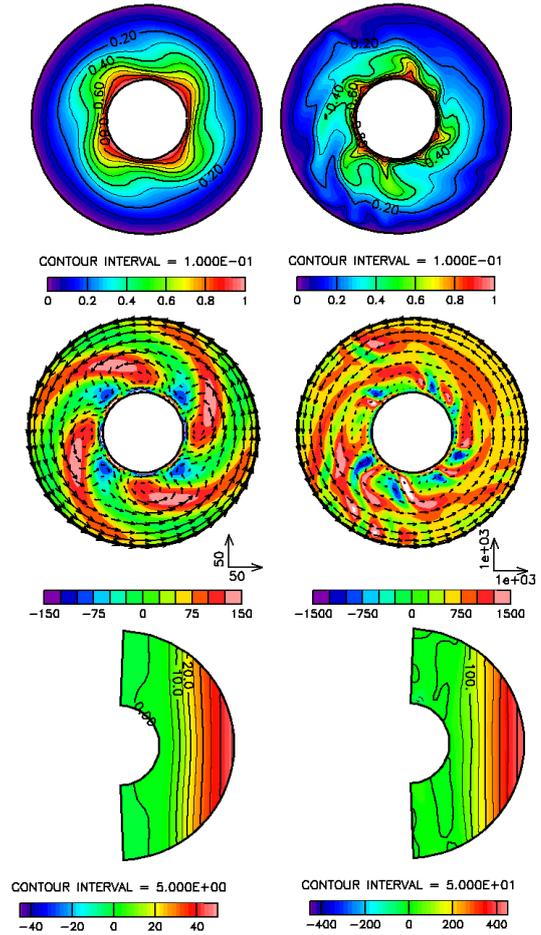


Fig. 1 The structure of non-magnetic thermal convection. Left and right panels are the results of  $Ra = 150, 750$ , respectively. The top panels are temperature in the equatorial cross section. Arrows in the middle panel show velocity and a tone pattern denotes vorticity along the rotating axis. The bottom panels show mean zonal flows in a meridional cross section.

転軸に沿った方向に伸びた柱状構造をしているものの,  $Ra = 100$  の場合に比べ対流がより活発になるため螺旋状の構造は不規則になっている. また, 両端を滑り無し条件にした場合に比べて非常に強い東向きの流れが内核接円筒外部で形成された. この流れは赤道で極大となっており, その南北幅はほぼ内核接円筒と球殻上端の接する位置で定まっている.

### 3.2 ダイナモ計算

パラメータ設定と結果を Table.1 に示す.

Table.1 Numerical simulations and results of  $\xi = 0.35, Pr = 1, E = 10^{-3}$ .

B.C.	$Ra(Ra/Ra_c)$	$Pm$																			
		1	2	3	4	5	10	20	30	40	50										
RR	100(1.78)																				
FR	100(1.87)	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
FR	150(2.81)	x	x	x																	
FR	250(4.68)																				
FR	500(9.36)																				
FR	750(14.36)																				

表中の RR は力学的境界条件として, 両端に滑り無し条件 (Rigid-Rigid) を課した場合である. この設定はダイナモベンチマーク<sup>(7)</sup> case1(以下, ベンチマーク) の計算設定と同じである. FR は力学的境界条件として, 上端に応力無し条件・下端に滑り無し条件を課した場合 (Free-Rigid) を表している. results は自励的ダイナモが成立したか (磁場が生成維持されたか) を意味している. ダイナモが成立したかの判断は, 磁場が磁気双極子の拡散

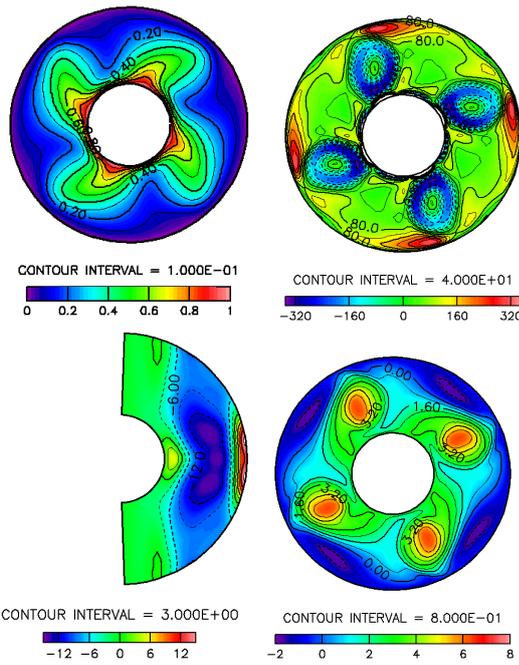


Fig. 2 The solution of MHD dynamo calculation in the case of  $Ra = 150, Pm = 5$ . The top panels are temperature (left) and vorticity along rotation axis (right) in the equatorial plane. The bottom panels are mean zonal flows in a meridional cross section (left) and poloidal magnetic field (right) in the equatorial plane.

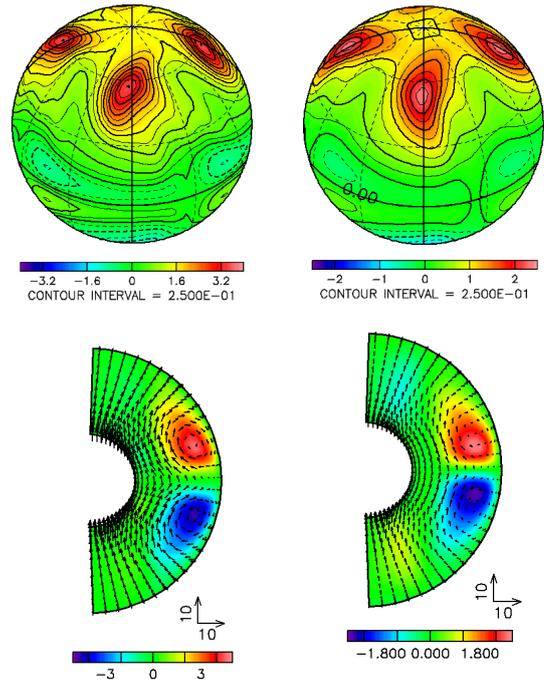


Fig. 3 The solutions of MHD dynamo calculation in the case of FR,  $Ra = 150, Pm = 5$  (left) and case 1 of the numerical dynamo benchmark<sup>(7)</sup> (right). The top panels are poloidal magnetic field at the top of the spherical shell. The bottom panels are the zonal mean azimuthal component of magnetic field in a meridional cross section.

時間の三倍程度 ( $\sim 0.23Pm$ ) 維持されるか否かで判断し、磁場が維持される場合を○、減衰する場合を×で示した。

今回計算したパラメータ範囲では、 $Ra \geq 150, Pm \geq 4$  の場合にダイナモが成立した。 $Ra = 150, Pm = 5$  のダイナモ計算における場の構造を Fig. 2 に示す。Fig. 2(左上) および (右上) はそれぞれ赤道断面における温度場、渦度回転軸方向成分、Fig. 2(左下) は平均帯状流、Fig. 2(右下) は赤道断面におけるポロイダル磁場である。流れ場は回転軸に沿った方向に伸びた渦柱構造をしており、磁場の無い熱対流計算の場合とは異なり西向きに伝播していく。高気圧性の渦柱が卓越しており、磁場はそれら渦柱内部に集中している。熱対流の場合に形成された強い東向きの帯状流は無くなり、球殻中層で西向きの帯状流、球殻上端の低緯度領域において東向きの帯状流が形成される。今回計算した全ての場合において磁気エネルギーが運動エネルギーより数桁大きくなっている。

#### 4. 議論

$Ra = 150, Pm = 5$  における磁場の様相とベンチマークにおける磁場の様相とを Fig. 3 に示す。Fig. 3 左が FR,  $Ra = 150, Pm = 5$ 、右がベンチマークである。Fig. 3 上段が球殻表面におけるポロイダル磁場、Fig. 3 下段が帯状平均したトロイダル磁場の等値線とポロイダル磁場である。両者の構造は非常に良く似ている。

ベンチマークのダイナモ解は  $\alpha^2$  ダイナモであることが知られている<sup>(8)</sup>。本計算で得られたダイナモ解が  $\alpha^2$  ダイナモであるかを調べるために Olson *et al.* (1999)<sup>(8)</sup> に従い、 $\omega$  効果によるトロイダル磁場生成、および  $\alpha$  効果によるポロイダル磁場生成について吟味した。

$\omega$  効果は帯状流によるトロイダル磁場 (磁場経度成分) の生成

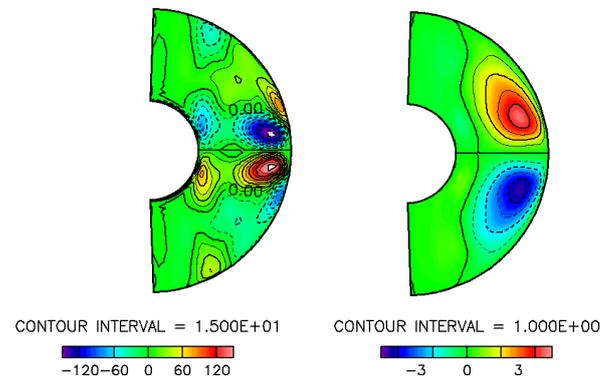


Fig. 4 Examination of the  $\omega$  effect. The left panel is the  $\omega$  effect described by (4.). The right panel is the zonal mean toroidal magnetic field.

機構であり

$$rB_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\lambda}{r} \right) + B_\varphi \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u_\lambda}{\cos \varphi} \right) \quad (9)$$

と表わされる。ここで  $B_r, B_\varphi$  は磁束密度の動径成分と緯度成分、 $u_\lambda$  は速度の経度成分である。Fig. 4 に  $\omega$  効果 (4.)、および磁場の経度成分を示す。 $\omega$  効果 (左) と磁場の経度成分 (右) のパターンは内核接円筒外部では相関が殆ど見られない。このことから内核接円筒外部では  $\omega$  効果による磁場生成はほとんど寄与していないことがわかる。また、内核接円筒内部では、パターンに負の相関が見られている。すなわち  $\omega$  効果はトロイダル磁場を弱める方向に働いている。

$\alpha$  効果による磁場生成を調べるための、トロイダル磁場とヘリシティの積の相対強度、および帯状平均した電流の経度成分を Fig. 5 に示す。両者は非常に良い相関を示しており、 $\alpha$  効果によ

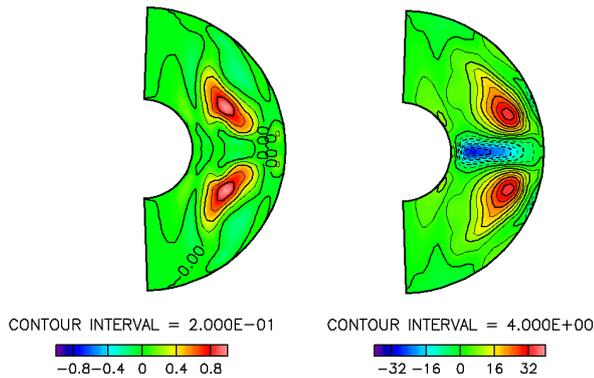


Fig. 5 Examination of the  $\alpha$  effect. The left panel is the product of helicity and the azimuthal component of the magnetic field. The right panel is the zonal mean azimuthal component of electric current.

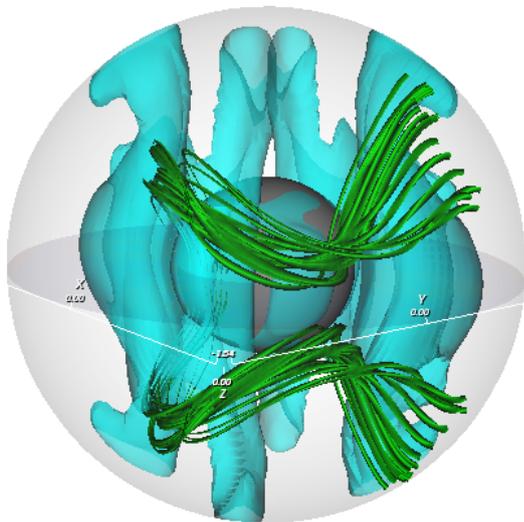


Fig. 6 A birds-eye view of the magnetic flux tube (green line) and isosurface of vorticity along rotation axis (blue surface). The value of vorticity isosurface is -40.

るポロイダル磁場生成が示唆される。

高気圧性の渦柱およびその付近の磁力線の様相を Fig. 6 に示す。高気圧性の渦柱によって磁力線が捻られ引き伸ばされることによって磁場が生成されている。よってこのダイナモ解は  $\alpha^2$  であると考えられる。

上端に応力無し条件を課した計算では、磁場が生成維持されるために  $Ra \geq 150$ ,  $Pm \geq 4$  でなければならなかった。これに対してベンチマーク case1 では  $Ra = 100$ ,  $Pm = 5$  において磁場が生成維持されている。したがって、上端に応力無し条件を課した場合には磁場を生成維持するためにより大きな  $Ra$  が必要であるといえる。

また、初期に付与する磁場を小さくしたにもかかわらず磁場の無い状況での回転と順方向の強い帯状流から期待された  $\omega$  効果は結局働かず、 $\alpha^2$  ダイナモ解におちついた。このことは、初期磁場が小さくても運動エネルギーよりも数桁も大きくなるまでに磁場が発達してしまうことに一因がある。強い磁気圧の寄与で高気圧性循環が卓越するために、回転と順方向の強い帯状流が逆向きにまで弱められてしまっている。そのため  $\omega$  効果が効果的に

働かなかったと考えられる。

謝辞

数値計算は宇宙航空研究開発機構 JAXA 統合スーパーコンピュータシステムの富士通 FX1 および国立天文台天文シミュレーションプロジェクトの NEC SX-9, Cray XT-4 で行なった。計算には、スペクトル変換ライブラリ ISPACK<sup>(9)</sup> ならびにその Fortran 90 ラッパーである SPMODEL Library<sup>(10)</sup> を用いた。描画には地球流体電脳倶楽部 電脳 Ruby プロジェクト (<http://www.gfd-dennou.org/library/ruby>) の製品を用いた。

参考文献

- (1) Glatzmaier, G.A. and Robert, P.H., "A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal," *Nature*, 377 (1995), pp.203-209.
- (2) Kageyama, A., and Sato, T., and the Complexity Simulation Group, "Computer simulation of a magnetohydrodynamic dynamo .II," *Phys. Plasmas* 2 (1995), pp.1421-1431.
- (3) Kuang, W., and Bloxham, J., "A numerical model of the generation of the Earth's magnetic field," *Nature*, 389 (1997), pp. 371-374.
- (4) Christense, U.R., Olson, P., Glatzmaier, G.A., "Numerical modeling of the geodynamo: a systematic parameter study," *Geophys. J. Int.*, 138 (1999), pp.393-409.
- (5) Busse, F.H., and Simitev, R.D., "Parameter deoendencies of convection-driven dynamo in rotating spherical fluid shells," *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 100(2006), pp.341-361.
- (6) 佐々木 洋平, 竹広 真一, 林 祥介, 倉本 圭, "回転球殻 MHD ダイナモにおける力学的境界条件の影響" *ながれ*, 27 別冊 (2008), pp.376.
- (7) Christensen, U. R., Aubert, J., Cardin, P., Dormy, E., Gibbons, S., Glatzmaier, G. A., Grote, E., Honkura, Y., Jones, C., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba, A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J., Zhang, K., 2001 : "A numerical dynamo benchmark.", *Phys. Earth Planet. Inter.*128(2001), pp. 25-34.
- (8) Olson, P., Christensen, U., Glatzmaier, G.A., "Numerical modeling of geodynamo: Mechanisms of field generation and equilibration", *J. Geophys. Res.*104(1999), pp. 10,383-10,404.
- (9) 石岡 圭一, "ispack-0.82", 地球流体電脳倶楽部 (2009), <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>
- (10) 竹広 真一, 小高正嗣, 石岡 圭一, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, "階層的地球流体スペクトルモデル集 SPMODEL," *ながれマルチメディア* (2006), <http://www.nagare.or.jp/mm/2006/spmodel/>