

# 非線形エクマンパンピングと 台風の目の形成について

地球及び惑星大気科学研究所所属  
博士課程前期課程 百武 宏之

平成20年2月8日 提出

# 要旨

本論文では、自由大気が動径方向に滑らかに変化する軸対称な円形流の場合の、非線形エクマンポンピングによる惑星境界層の鉛直速度の水平分布を数値的に求めた。境界層の下端の境界条件には、粘着境界条件とすべり境界条件を与えた場合を考察する。非線形項の大きさを表す無次元パラメータであるロスビー数は、5 から 10 程度の大きさをもつ現象を対象として研究を行った。粘着条件を与えた場合には、ロスビー数が大きくなるごとに、中心軸付近の鉛直速度は減少していく。この鉛直速度の減少は中心軸付近でのみ起こる。ロスビー数に 2 以上の大きな値を与えると、ポンピングは中心軸付近で極小となり、中心から少し離れた所で最大値を取るような分布となった。すべり境界条件を与えた場合には、鉛直速度の水平分布は、中心軸付近ですっと小さくなり、中心軸から少し離れた点で最大値をとるような分布が得られた。この結果から、台風の目の形成に関する含意を指摘する。

---

# 目次

第1章	はじめに	4
第2章	定式化	8
2.1	直線流の場合	8
2.2	円形流の場合	11
第3章	Eliassen(1971), Hart(2000) のレビュー	16
3.1	Eliassen(1971)	16
3.1-1	粘着境界条件を課した場合	18
3.1-2	すべり境界条件を課した場合	20
3.2	Hart(2000)	22
3.2-1	直線流の場合	22
3.2-2	円形流の場合	27
第4章	円形流の場合の計算結果	30
4.1	自由大気の風速分布	30
4.2	粘着境界条件を課した場合	32

---

4.3	すべり境界条件を課した場合 . . . . .	37
4.3-1	一次すべり境界条件の場合 . . . . .	37
4.3-2	二次すべり境界条件の場合 . . . . .	40
第5章 結論		42
付録A 数値計算の手法について		47
A.1	Lindzen and Kuo(1969)の手法 . . . . .	47
A.1-1	二階線形常微分方程式 . . . . .	47
A.1-2	二階連立線形常微分方程式 . . . . .	50
A.2	エクマンパンピングの数値計算 . . . . .	54
A.3	線形エクマンパンピングの計算 . . . . .	54
A.4	非線形エクマンパンピング . . . . .	56
A.4-1	すべり境界条件を与えた非線形エクマンパンピングの計算 . . . . .	58

## 第1章 はじめに

Ekman(1905) が提唱して以来, エクマンパンピングは地球流体力学において良く知られた概念となっている. これは, 惑星境界層の内部で摩擦による水平収束(発散)が生じ, 質量の保存によって, 境界層上端で鉛直速度が生まれるというものである. 彼は, 境界層内部での摩擦力とコリオリ力と気圧傾度力とのバランスを仮定した. エクマンパンピングによって生じる境界層上端での鉛直速度は, パンピング速度と呼ばれ, 定常状態において, 薄い惑星境界層の厚み  $\delta^*$ , 境界層の直上の自由大気の渦度  $\zeta^*$  を用いて,

$$w^* \propto \delta^* \zeta^* \quad (1.0.1)$$

と表される. (1.0.1) は, 渦度が正となる低気圧性渦では, パンピング速度が上昇流, 渦度が負となる高気圧性渦では, パンピング速度は下降流となる事を意味している.

エクマンの仮定した, 摩擦力, 気圧傾度力, コリオリ力のバランスは, ロスビー数が0, もしくは小さな値のときに成り立つ. エクマンパンピングを有限のロスビー数の場合に拡張するという試みに対して, 多くの努力(例えば, Wu and Blumen(1982), Denbo and Allen(1983), Hart(1995) などの仕事がある) がなされてきた. ロスビー数が0, もしくは小さな値のとき, 境界層の運動方程式は線形である. 一方, ロスビー数が有限の場合, 境界層の運動方程式は, 移流項の存在のために, 非線形方程式となる. それゆえ, 古典的な, Ekman(1905) によるエクマンパンピングを線形エクマンパンピング, 非線形方程式の解としてのエクマンパンピングを非線形エクマンパンピングと呼ぶ. この非線形エクマンパンピングを得るための方法として, ロスビー数による摂動展開を用いる方法や, 数値計算に頼る方法がある. Bannon(1998) は自由大気中の流れが, 空間一次元のみ依存し, そのシアーが一定, すなわち自由大気の渦度が一様である場合の非線形エクマンパンピングを, 数値計算によって求めた. この自由大気の渦度が一様であるという仮定はパンピング速度から水平方向の依存性を分離する事ができ, 複雑な非線形方程式をかなり単純にする事ができ

る。この仮定のもとで、Ishida and Iwayama(2006) は数値計算を用いて非線形エクマンポンピングを求めている。さらに彼らは、ロスビー数による摂動展開を用いて、解析的に研究を進め、境界層の運動方程式における各非線形項のエクマンポンピングに対する寄与について詳細に調べた。一方、Hart(2000) は渦度一様という仮定を取り入れずに、すなわち、自由大気が非一様の渦度を持つ場合に、ロスビー数の摂動展開を用いて、解析的に非線形エクマンポンピングの公式を求めた。この公式は線形エクマンポンピングに非線形項による補正が加わるという形をしている。彼は、自由大気が、滑らかに変化する直線流  $V(x)$  の場合と円形流  $V(r)$  の場合の、二つの場合について計算を行った。このとき彼は、MAPLE を用いて、直線流の場合は  $\epsilon^4$  オーダーまで、円形流の場合は  $\epsilon^3$  オーダーまで、解析的に計算を行っている。

非線形エクマンポンピングの計算には物理的な関心がある。それは、エクマンポンピングの非線形補正が台風の目の形成に寄与しているのではないかという議論があるためである。例えば、一般的な台風の教科書である、山岬正紀著「台風」(1982初版、東京堂出版)の第二章では、目の形成の原因として、絶対角運動量の保存と、遠心力、気圧傾度力を用いて説明している。これはすなわち、摩擦によって中心に向かって収束してきた流体は、摩擦によって絶対角運動量を失うとしても、依然として強い接線風速  $V_\theta$  を持つ。遠心力は、 $V_\theta^2/r$  という形をしているため、接線風速  $V_\theta$  が特に弱まらないかぎり、半径  $r$  に反比例して、中心付近に近づくほど強まる。一方、気圧傾度力も中心に近づくにつれて増大していくが、実際の観測から、気圧傾度力の勾配は遠心力の勾配に比べてゆるやかである。したがって、中心に向かって収束してきた流体は、中心軸からある程度離れたところで上昇してしまい、その結果として目の壁雲が形成されるという説明である。また第六章では、摩擦収束についてもう少し詳しい考察のもとに、“目の形成の原因は摩擦収束の最大が中心から少し離れた所に集中することに求められる”と記述されている。接線風速が最大となる位置で摩擦収束が最大であり、観測事実から目の壁雲のできる位置と接線風速が最大となる位置とが良い対応を示すことから、摩擦収束の水平分布が目の形成に関与し、その最大となる所に目の壁雲が形成されると結論付けている。

ところで、エクマンポンピングの非線形補正の性質には、高気圧性渦では下降流である線形エクマンポンピングの大きさを増大させ、低気圧性渦では上昇流を減少させるという非対称性があることが知られている。この上昇流を減少させるという働きが、低気圧性循環をもった強い円形渦とみなせる台風の、特にロスビー数が

大きくなってしまいう中心軸付近で強く働き、パンピング速度の最大値を中心から離れた所に作ることで、目が形成されるのではないかとすることも考えられる。もちろん、台風の目の形成に、潜熱の解放が大きく寄与していることは疑いようの無いことではあるが、非線形エクマンパンピングが台風の目の形成に寄与しているかどうかを調べることは興味深いことである。

非線形エクマンパンピングと台風の目の形成に関連する研究として、Eliassen(1971)や、先ほど挙げた Hart(2000) などがある。Eliassen(1971) は、軸対称な円形渦によって駆動されるエクマンパンピングを研究した。彼の研究は線形論の範囲内での研究であるが、下端の境界条件に、粘着境界条件とすべり境界条件という二種類の境界条件を課した事が特筆される。粘着境界条件を下端境界に課した場合は、層流的なエクマン層を想定しており、下端にすべり境界条件を課した場合は乱流的なエクマン層を考えている。彼は、エクマン層の下端に粘着境界条件を課した場合には、パンピング速度は中心付近で一定となるのに対して、すべり境界条件を課した場合には、パンピング速度は中心付近で半径に比例する、すなわち、中心軸上ではパンピング速度は0となるという結果を得た。このことから、下端にすべり境界条件を課した場合のエクマンパンピングが、台風の目の壁雲のできる位置、すなわち、上昇流の位置を決定しているのではないかと結論付けている。したがって、線形論においても下端の境界条件によっては、エクマンパンピングが台風の目の形成に関与しているということを Eliassen は示唆している。

ところが、Hart(2000) で示される非線形エクマンパンピングの摂動解は、エクマン層下端に粘着境界条件を用いた場合の解であるが、接線風速が中心軸から離れた所に最大値をもつような自由大気の速度場を選んでも、非線形エクマンパンピングは中心軸で最大となる事を示している。したがって Hart は非線形エクマンパンピングは台風の目の形成に寄与しないと結論付けている。

しかし、この Hart(2000) にはいくつかの問題点があると考えている。第一に、ロスビー数の摂動展開を用いていることに対してである。摂動展開という方法は、一般に展開パラメータが小さいときに有効である。小さなロスビー数の場合には、摂動展開を用いることは有効な方法であるが、台風のような強い渦を視野に入れて研究する場合には、ロスビー数が大きい現象であるため、この方法は上手くないのではないだろうか。また Hart(2000) では、どの程度までのロスビー数に対して、展開

が有効であるのかが示されていない。第二にそもそもの計算の正当性に関する点である。彼は、MAPLE を用いて非線形エクマンポンピングの公式を求めたが、この公式が正しく計算されて得られたものかどうか、検証がない。彼の示した公式には明らかな誤りがあることが確認される。第三に、Hart(2000) では、下端の境界条件に粘着条件のみしか用いておらず、Eliassen の主張のように、すべり境界条件の場合の議論が無い。したがって、Hart の結果のみから、台風の目の形成にエクマンポンピングが寄与しているかどうかについて結論を出すのは早計であると思われる。

そこで、本論文では、軸対称の円形流によって駆動される非線形エクマンポンピングを数値的に調べ、非線形エクマンポンピングが台風の目の形成に関与するかどうか、考察を行った。また、Hart(2000) の検証を行うために、空間の一方向のみに依存する直線流によって駆動されるエクマンポンピングについても計算を行った結果を示す。自由大気中の基本場は、空間一方向にのみ依存して滑らかに変化する風速場を与えて、非線形エクマンポンピングの数値計算を行った。下端の境界条件には、粘着条件を与えた層流エクマン層の場合と、すべり境界条件を与えた乱流エクマン層の場合とを考慮する。

本論文は以下のように構成される。第 2 章にて、直線流の場合と円形流の場合それぞれについて、定式化を行う。第 3 章にて、Eliassen(1971) と Hart(2000) に関するレビューを行う。第 4 章にて、円形流の場合の数値計算結果を紹介し、第 5 章にて結論を述べる。



## 第2章 定式化

### 2.1 直線流の場合

まず、直線的な風速を持つ自由大気のもとでのエクマン境界層を考える。ここでは自由大気は、 $y$  方向の速度  $V^*$  のみを持ち、 $V^*$  は  $x$  のみに依存する状況を考える。この自由大気の状況を図 2.1 に示した。

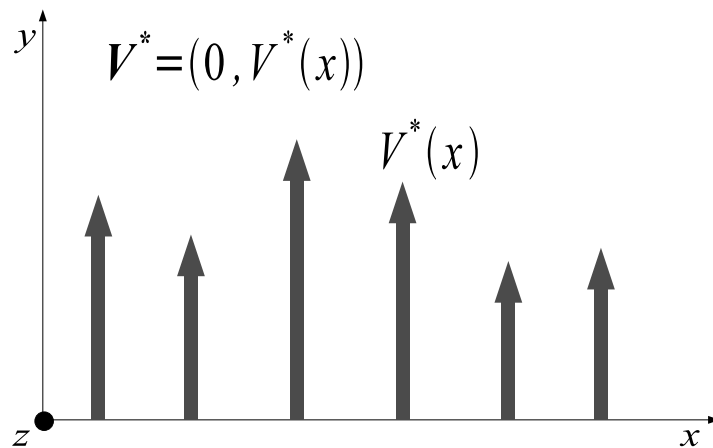


図 2.1: 自由大気中での風速の状況。ここでは風速は  $y$  方向にのみ存在し、 $x$  方向にのみ依存して変化する状況の自由大気の下でのエクマン境界層を考える。

$y$  方向の速度  $V^*(x)$  のみを持つ自由大気のもとでのエクマン境界層を支配する

無次元方程式は次のようになる:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2v = 2\varepsilon \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial s} \right), \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2u = 2\varepsilon \left\{ u \frac{\partial(V+v)}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial s} \right\}, \quad (2.1.2)$$

$$w = - \int_0^s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds. \quad (2.1.3)$$

まず, これらの方程式を導出する. (2.1.1), (2.1.2) はナビエ–ストークス方程式 (以下, NS 方程式と略記する) から, (2.1.3) は連続の式から得られる. ここで  $x, y$  方向の NS 方程式および, 連続の式は以下で与えられる:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + 2\Omega v^* + \nu \nabla^2 u^*, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} - 2\Omega u^* + \nu \nabla^2 v^*, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \quad (2.1.6)$$

設定する仮定は以下の通りである.

1. 密度一様の流体.
2. 定常状態.
3.  $y$  方向には一様場.
4. 自由大気と境界層 (以下, B.L. と略記する.) 内の圧力勾配は等しい.
5. 自由大気では, 地衡風平衡が成り立つ. つまり,  $-\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -2\Omega V^*$ .
6. B.L. 内では鉛直シアアが水平シアアに比べて十分大きい.
7. B.L. 内での風速は自由大気での風速 (以下, 基本流と呼ぶことにする) とそこからのずれの和と表現する.

式 (2.1.4), (2.1.5) について, 仮定 1 より, 密度  $\rho^*$  は定数として扱う. 仮定 2 より,  $\frac{\partial u^*}{\partial t^*}, \frac{\partial v^*}{\partial t^*}$  を落とす. 仮定 3 より,  $\frac{\partial u^*}{\partial y^*}, \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \frac{\partial p^*}{\partial y^*}$  を落とす. 仮定 4, 5 より,  $-\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}$  を  $-2\Omega V^*$  とする. さらに仮定 6 より,  $\nu \nabla^2 u^* = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}, \nu \nabla^2 v^* = \nu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}}$  として次式を得る:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -2\Omega V^* + 2\Omega v^* + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}},$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -2\Omega u^* + \nu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}}.$$

これらの式に, 仮定 7 より,  $u^* = 0 + u'$ ,  $v^* = V^*(x) + v'$ ,  $w^* = 0 + w'$  として, 式 (2.1.4), (2.1.5) はそれぞれ,

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial u'}{\partial x^*} + w' \frac{\partial u'}{\partial z^*} &= -2\Omega V^* + 2\Omega(V^* + v') + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^{*2}}, \\ &= 2\Omega v' + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^{*2}}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial(V^* + v')}{\partial x^*} + w' \frac{\partial(V^* + v')}{\partial z} &= -2\Omega u' + \nu \frac{\partial^2(V^* + v')}{\partial z^{*2}}, \\ u' \frac{\partial(V^* + v')}{\partial x^*} + w' \frac{\partial v'}{\partial z^*} &= -2\Omega u' + \nu \frac{\partial^2 v'}{\partial z^{*2}} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

となる. さらに連続の式 (2.1.6) は仮定 3,7 より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial z^*} &= -\frac{\partial u'}{\partial x^*} - \frac{\partial v'}{\partial y^*} \\ &= -\frac{\partial u'}{\partial x^*}. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

方程式 (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9) を, 代表的な水平方向の速さ  $U$ , 代表的な水平方向の長さ  $L$ , 代表的な鉛直方向の速さ  $W$ , 代表的な鉛直方向の長さとしてエクマン層の厚み  $\delta$  を用いて,  $u' = Uu$ ,  $v' = Uv$ ,  $x^* = Lx$ ,  $w' = Ww$ ,  $z^* = \delta s$  とすることで無次元化を行う. ここで, 鉛直方向の座標  $s = z^*/\delta$  は拡大座標と呼ばれる.  $\delta$  は十分小さく,  $s$  が有限の値をとる間は, 境界層内部である. つまり,  $s \rightarrow \infty$  は境界層上端を指す. 式 (2.1.9) は,

$$\begin{aligned} \frac{W}{\delta} \frac{\partial w}{\partial s} &= -\frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\frac{\delta U}{LW} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

ここで,  $(\delta U)/(LW) = 1$  となるように  $W$  を決めておく. すなわち,

$$W = \frac{\delta U}{L}. \quad (2.1.11)$$

このとき式 (2.1.10) は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ w &= -\int_0^s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds \end{aligned}$$

となり, 式 (2.1.3) が導出された. 式 (2.1.7) を無次元化すると,

$$\frac{U^2}{L} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{WU}{\delta} w \frac{\partial u}{\partial s} = \Omega U (2v) + \frac{\nu U}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

となる. この式を  $\Omega U$  で割り, (2.1.11) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{U}{\Omega L} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\delta U}{\Omega L \delta} w \frac{\partial u}{\partial s} &= 2v + \frac{\nu}{\delta^2 \Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \\ \frac{U}{\Omega L} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial s} \right) &= 2v + \frac{\nu}{\delta^2 \Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

ここで,  $\nu/\delta^2\Omega = 1$  となるように  $\delta$  を決めておく. すなわち,

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}. \quad (2.1.13)$$

式 (2.1.12) は最終的に,

$$2\varepsilon \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 2v + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}.$$

ここで,

$$\varepsilon = \frac{U}{2\Omega L} \quad (2.1.14)$$

はロスビー数であり, 式 (2.1.1) が導出された. また, 式 (2.1.8) についても同様に  
して,

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{L} u \frac{\partial (V+v)}{\partial x} + \frac{WU}{\delta} w \frac{\partial v}{\partial s} &= \Omega U (-2u) + \frac{\nu U}{\delta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ \frac{U}{\Omega L} u \frac{\partial (V+v)}{\partial x} + \frac{\delta U}{L\Omega\delta} w \frac{\partial v}{\partial s} &= -2u + \frac{\nu}{\delta^2 \Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ \frac{U}{\Omega L} u \frac{\partial (V+v)}{\partial x} + \frac{U}{\Omega L} w \frac{\partial v}{\partial s} &= -2u + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ 2\varepsilon \left\{ u \frac{\partial (V+v)}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial s} \right\} &= -2u + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \end{aligned}$$

となり, 式 (2.1.2) が導出された.

## 2.2 円形流の場合

つづいて, 自由大気が円形流の場合の場合に, その下のエクマン境界層を考え  
る. 座標系は, 図 2.2 に示すような, 円筒座標系を用いる. ここでの自由大気は, 接

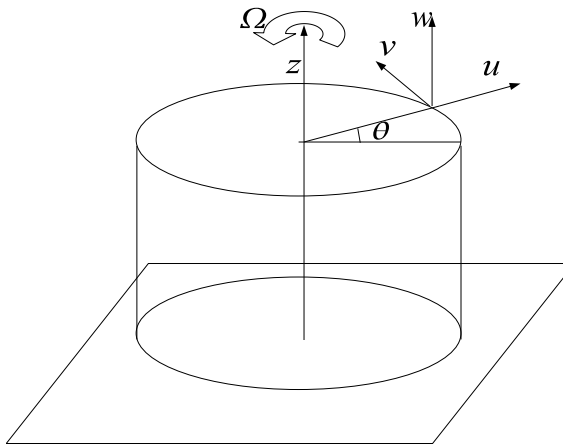


図 2.2: 円筒座標系.

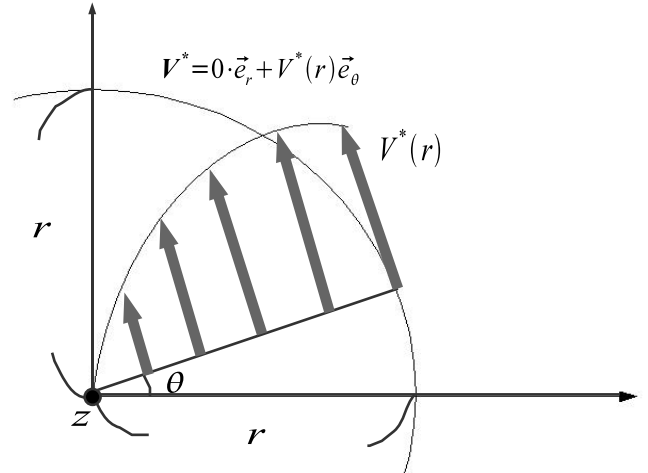


図 2.3: 自由大気中での風速の状況を  $z$  軸正の側から見た図. ここでは風速は接線方向にのみ存在し, 動径方向にのみ依存して変化する状況の自由大気の下のエクマン境界層を考える.

線方向の速度  $V^*$  のみを持ち,  $V^*$  は動径方向にのみ依存する状況を考える. この自由大気の状況を図 2.3 に示した.

接線方向の速度  $V(r)^*$  のみを持つ自由大気のもとでのエクマン境界層を支配する無次元方程式は次のようになる:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2v = 2\varepsilon \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{2Vv + v^2}{r} \right), \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2u = 2\varepsilon \left\{ u \frac{\partial(V+v)}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u(V+v)}{r} \right\}, \quad (2.2.2)$$

$$w = - \int_0^s \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) ds. \quad (2.2.3)$$

(2.2.1), (2.2.2) は円筒座標系の NS 方程式から, (2.2.3) は円筒座標系の連続の式から導出する. 円筒座標系における  $r, \theta$  方向の NS 方程式および, 連続の式は以下で与えられる:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{v^{*2}}{r^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + 2\Omega v^* + \nu \nabla^2 u^*, \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{u^* v^*}{r^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta^*} - 2\Omega u^* + \nu \nabla^2 v^*, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \frac{u^*}{r^*} = 0. \quad (2.2.6)$$

用いる仮定は以下の通り

1. 密度一様の流体.
2. 定常状態.
3. 回転軸対象 ( $\theta$  方向には一様場).
4. 自由大気と B.L. 内の圧力勾配は等しい.
5. 自由大気では傾度風平衡が成立している. すなわち,  $-\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} = -2\Omega V^* - \frac{V(r)^{*2}}{r^*}$ .
6. B.L. 内では鉛直シアーが水平シアーに比べて十分大きいとする.
7. B.L. 内での風速は基本流と, それからのずれの和と表現する.

式 (2.2.4), (2.2.5) について, 仮定 1 より, 密度  $\rho^*$  を定数として扱う. 仮定 2 より,  $\frac{\partial u^*}{\partial t^*}, \frac{\partial v^*}{\partial t^*}$  を落とす. 仮定 3 より,  $\frac{\partial u^*}{\partial \theta^*}, \frac{\partial v^*}{\partial \theta^*}, \frac{\partial p^*}{\partial \theta^*}$  を落とす. 仮定 4, 5 より,  $-\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*}$  を,  $-2\Omega V^* - \frac{V^{*2}}{r^*}$  とする. さらに, 仮定 6 より,  $\nu \nabla^2 u^* = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}, \nu \nabla^2 v^* = \nu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}}$  として次式を得る:

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{v^{*2}}{r^*} &= -2\Omega V^* - \frac{V^{*2}}{r^*} + 2\Omega v^* + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}, \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{u^* v^*}{r^*} &= -2\Omega u^* + \nu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \end{aligned}$$

これらの式に仮定 7 より,  $u^* = 0 + u', v^* = V^* + v', w^* = 0 + w'$  として, 式 (2.2.4) は,

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial u'}{\partial r^*} + w' \frac{\partial u'}{\partial z^*} - \frac{(V^* + v')^2}{r^*} &= -2\Omega V^* - \frac{V^{*2}}{r^*} + 2\Omega(V^* + v') + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^{*2}}, \\ u' \frac{\partial u'}{\partial r^*} + w' \frac{\partial u'}{\partial z^*} - \frac{2v'V^* + v'^2}{r^*} &= 2\Omega v' + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^{*2}}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

同様に, (2.2.5) は,

$$u' \frac{\partial (V^* + v')}{\partial r^*} + w' \frac{\partial v'}{\partial z^*} + \frac{u'(V^* + v')}{r^*} = -2\Omega u' + \nu \frac{\partial^2 v'}{\partial z^{*2}}. \quad (2.2.8)$$

さらに連続の式は仮定 3, 7 より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial z^*} &= -\frac{\partial u'}{\partial r^*} - \frac{\partial v'}{\partial \theta^*} - \frac{u^*}{r^*}, \\ \frac{\partial w'}{\partial z^*} &= -\frac{\partial u'}{\partial r^*} - \frac{u'}{r^*}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

式 (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9) を代表的な水平方向の速さ  $U$ , 代表的な水平方向の長さ  $L$ , 代表的な鉛直方向の速さ  $W$ , 代表的な鉛直方向の長さ  $\delta$  を用いて  $u' = Uu$ ,

$v' = Uv$ ,  $V^* = UV$ ,  $r^* = Lr$ ,  $w^* = Ww$ ,  $z^* = \delta s$  とすることで無次元化を行う. 式 (2.2.9) は,

$$\begin{aligned}\frac{W}{\delta} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{U}{L} \left( -\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\frac{\delta U}{LW} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right).\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

ここで,  $(\delta U)/(LW) = 1$  となるように  $W$  を決めておく. すなわち,

$$W = \frac{\delta U}{L}.\quad (2.2.11)$$

このとき式 (2.2.10) は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= -\left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ w &= -\int_0^s \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) ds\end{aligned}$$

となり, 式 (2.2.3) が導出された. 式 (2.2.7) を無次元化すると,

$$\frac{U^2}{L} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{WU}{\delta} w \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{U^2}{L} \left( -\frac{2vV + v^2}{r} \right) = U\Omega 2v + \frac{U\nu}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

となる. この式を  $\Omega U$  で割り, (2.2.11) を代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{U}{\Omega L} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\delta U}{L\delta\Omega} w \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{U}{\Omega L} \left( -\frac{2vV + v^2}{r} \right) &= 2v + \frac{\nu}{\delta^2\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \\ \frac{U}{\Omega L} \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{2vV + v^2}{r} \right) &= 2v + \frac{\nu}{\delta^2\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},\end{aligned}\quad (2.2.12)$$

ここで,  $\nu/\delta^2\Omega = 1$  となるように  $\delta$  を決める. すなわち,

$$\delta = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}.\quad (2.2.13)$$

このとき式 (2.2.12) は最終的に,

$$2\varepsilon \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{2vV + v^2}{r} \right) = 2v + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$

ここで,

$$\varepsilon = \frac{U}{2\Omega L}\quad (2.2.14)$$

はロスビー数であり, 式 (2.2.1) が導出された. また, 式 (2.2.8) についても同様に  
して,

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{L} u \frac{\partial(V+v)}{\partial r} + \frac{UW}{\delta} w \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{U^2}{L} \frac{uV+uv}{r} &= U\Omega(-2u) + \frac{U\nu}{\delta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ \frac{U}{L\Omega} u \frac{\partial(V+v)}{\partial r} + \frac{\delta U}{L\delta\Omega} w \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{U}{L\Omega} \frac{uV+uv}{r} &= -2u + \frac{\nu}{\Omega\delta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ \frac{U}{L\Omega} \left\{ u \frac{\partial(V+v)}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{uV+uv}{r} \right\} &= -2u + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \\ 2\varepsilon \left\{ u \frac{\partial(V+v)}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u(V+v)}{r} \right\} &= -2u + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \end{aligned}$$

となり, 式 (2.2.2) が導出された.



## 第3章 Eliassen(1971), Hart(2000)のレビュー

本章では、本論文と特に関連する研究として、Eliassen(1971)とHart(2000)のレビューを行う。

### 3.1 Eliassen(1971)

Eliassen(1971)は、自由大気が軸対象な円形流をもつ場合の、エクマン境界層を研究した。Greenspan and Howard(1963)によると、境界層の下端に粘着条件を課した場合<sup>\*1</sup>には、境界層上端のパンピング速度は中心軸も含めてほぼ一定となる。一方、Ooyama(1969), Rosenthal(1970), Sundqvist(1970), Yamasaki(1968)の熱帯低気圧の発達に関する数値実験では、中心軸付近で目が存在することを示唆する結果が得られている。また、熱帯低気圧の中心軸上では、上昇運動が存在せず、中心から少し離れた所で上昇流が最大となるという結果を得ている。彼らはみな、下端境界にすべり境界条件<sup>\*2</sup>を適用している。後者の著者らの数値実験や、そしてまた実際の台風における鉛直運動の分布は、粘着境界条件のもとで得られるエクマンパンピング速度とは大幅に異なる。その違いは、後者の実験は熱帯低気圧の数値シミュレーションであり、凝結熱などの効果を扱っていることによるのかもしれないが、しかし、異なった境界条件を用いた事によって生じた違いだとも考えられる。

そこでEliassen(1971)は、エクマン層の下端境界に、粘着境界条件を課した場合と、すべり境界条件を課した場合、それぞれについて線形エクマンパンピングを考

<sup>\*1</sup>Eliassen(1971)では、下端境界に粘着境界条件を課した場合のエクマン層を層流エクマン層と呼んでいる。

<sup>\*2</sup>Eliassen(1971)では、下端境界にすべり境界条件を課した場合のエクマン層を乱流エクマン層と呼んでいる。

察した. ここでいうすべり境界条件とは, 下端境界に働く応力が相対風の二乗に比例するとした境界条件である.

Eliassen は慣性座標系で議論を行ったが, 彼の得た結果と, 本論文や Hart(2000) との比較を容易にするために, 第 2 章の定式化, すなわち, 支配方程式 (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) のもとで Eliassen(1971) の議論を再構築する. 支配方程式である, (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) を再掲する:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2v = 2\varepsilon \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{2Vv + v^2}{r} \right), \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2u = 2\varepsilon \left\{ u \frac{\partial(V+v)}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u(V+v)}{r} \right\}, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0. \quad (3.1.3)$$

上端での境界条件は以下ようになる:

$$u \rightarrow 0, \quad v + V \rightarrow V, \quad \text{at } s \rightarrow \infty. \quad (3.1.4)$$

下端の境界では, まず, 運動学的な条件として,

$$w = 0, \quad \text{at } s = 0 \quad (3.1.5)$$

がある. 下端の境界における, 残りの境界条件は, 粘着境界条件かすべり境界条件である. 粘着境界条件は,

$$u = 0, \quad v + V = 0, \quad \text{at } s = 0. \quad (3.1.6)$$

すべり境界条件は, 単位質量あたりの地表面応力が相対風の二乗に比例するという条件式,

$$\text{at } s = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = C_d u \sqrt{u^2 + (v + V)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial s} = C_d (v + V) \sqrt{u^2 + (v + V)^2}. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

を用いる.

解を中心軸付近で解析的に推測する. ここで, 中心軸上, すなわち,  $r = 0$  において過度の鉛直成分や水平発散,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(v + V)], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru)$$

が有限の値に留まるとする. このことは,  $u, v, V, w$  を  $r$  のべき級数として

$$\begin{cases} u(r, s) = u_0(s)r + u_1(s)r^2 + u_2(s)r^3 + \cdots, \\ v(r, s) = v_0(s)r + v_1(s)r^2 + v_2(s)r^3 + \cdots, \\ w(r, s) = w_0(s) + w_1(s)r + w_2(s)r^2 + \cdots, \\ V(r) = V_0r + V_1r^2 + V_2r^3 + \cdots, \end{cases} \quad (3.1.8)$$

と表現する事で達せられる. ここでの  $V_0, V_1, V_2, \dots$  は定数であることを強調しておく. これらを式 (3.1.1) –(3.1.3) に代入し,  $r$  の最低次の項をまとめて以下の式を得る:

$$\begin{cases} 2v_0 + \frac{d^2u_0}{ds^2} = 2\varepsilon \left[ u_0^2 + w_0 \frac{du_0}{ds} - (2v_0V_0 + v_0^2) \right], \\ -2u_0 + \frac{d^2v_0}{ds^2} = 2\varepsilon \left[ 2u_0(v_0 + V_0) + w_0 \frac{dv_0}{ds} \right], \\ \frac{dw_0}{ds} + 2u_0 = 0. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

境界条件 (3.1.4) から,

$$u_0 \rightarrow 0, \quad v_0 \rightarrow 0, \quad \text{at } s \rightarrow \infty. \quad (3.1.10)$$

境界条件 (3.1.5) から,

$$w_0 = 0, \quad \text{at } s = 0. \quad (3.1.11)$$

### 3.1-1 粘着境界条件を課した場合

下端境界に適用する粘着境界条件は以下の通りである:

$$v(r, 0) + V = 0. \quad (3.1.12)$$

式 (3.1.12) に (3.1.8) を代入して得られる,  $r$  の最低次の境界条件は,

$$\text{at } s = 0, \quad u_0 = 0, \quad v_0 + V_0 = 0, \quad (3.1.13)$$

となる. 方程式 (3.1.9)–(3.1.13) は, 非線形系をなしているが, これは, ロスビー数  $\varepsilon$  が十分小さいという条件のもとで, 線形化を行って解く事ができる.

線形化された系は次のようになる:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2v_0 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial s^2} = 0, \\ -2u_0 + \frac{\partial^2 v_0}{\partial s^2} = 0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial s} + 2u_0 = 0, \\ \text{at } s \rightarrow \infty, \quad u_0 \rightarrow 0, \quad v_0 \rightarrow 0, \\ \text{at } s = 0, \quad u_0 = 0, \quad v_0 + V_0 = 0, \quad w_0 = 0. \end{array} \right. \quad (3.1.14)$$

この方程式系の解は,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = -V_0 e^{-s} \sin s, \\ v_0 = -V_0 e^{-s} \cos s, \\ w_0 = V_0 [1 - e^{-s} (\cos s + \sin s)]. \end{array} \right. \quad (3.1.15)$$

この解は, Ekman によって得られた古典的エクマンパンピングに等しい. また, エクマン層上端でのパンピング速度は, 以下のようになる:

$$W = w_0(s \rightarrow \infty) = V_0. \quad (3.1.16)$$

ところで, 自由大気中の渦度を  $\zeta$  とすると,

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rV). \quad (3.1.17)$$

これに,  $V = rV_0 + r^2V_1 + \dots$  を代入すると,

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{r} (2rV_0 + 3rV_1 + \dots) \\ &= 2V_0 + 3V_1 + \dots \end{aligned}$$

また渦度  $\zeta$  は  $r$  によって  $\zeta = \zeta_0 + r\zeta_1 + \dots$  と展開されるので, 自由大気の渦度は  $r$  の最低次の最低次において,

$$\zeta_0 = 2V_0 \quad (3.1.18)$$

となる. したがって, (3.1.16) は,

$$W = \frac{1}{2} \zeta_0 \quad (3.1.19)$$

と書きなおすことができる. これは, 境界層上端でのパンピング速度が, 自由大気中の渦度に比例するという古典的エクマンパンピングの公式そのものである. ここで,  $V_0$  もしくは  $\zeta_0$  は定数であるので, 下端境界に粘着条件を与えた場合の中心軸付近における線形エクマンパンピング速度は一定となる.

### 3.1-2 すべり境界条件を課した場合

大気中、もしくは海洋中の渦において、エクマン層は乱流的であり、下端境界にはすべり境界条件を課した方がより適当である。下端に与えるすべり境界条件式 (3.1.7) に対して、(3.1.8) を代入し、 $r$  の最低次の項をまとめると、0 次の境界条件の式、

$$\frac{du_0}{ds} = 0, \quad \frac{dv_0}{ds} = 0, \quad \text{at } s = 0 \quad (3.1.20)$$

を得る。方程式系 (3.1.9)–(3.1.11), (3.1.20) は、以下の解を持つ:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0. \quad (3.1.21)$$

すなわち、中心軸の近傍でパンピン速度が0となる。ただし、(3.1.21) が唯一の解であるとは証明できていない。

次に、方程式 (3.1.1)–(3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) および (3.1.20) から、 $r$  の二番目に小さいべきの項について整理する。このとき、 $r$  のべき乗で二番目に小さいものは  $r^2$  である。そこで、 $\mathcal{O}(r^2)$  の方程式をつくり、その解について議論する。方程式 (3.1.1)–(3.1.3) に (3.1.8) を代入したとき、 $\mathcal{O}(r^2)$  の方程式は次のようになる:

$$2v_1 + \frac{d^2u_1}{ds^2} = 2\varepsilon \left[ 3u_0u_1 + w_0 \frac{du_1}{ds} + w_1 \frac{du_0}{ds} - 2(v_0V_1 + v_1V_0) - 2v_0v_1 \right], \quad (3.1.22a)$$

$$-2u_1 + \frac{\partial^2v_1}{\partial s^2} = 2\varepsilon \left[ 3u_0(v_1 + V_1) + 2u_1(v_0 + V_0) + w_0 \frac{dv_1}{ds} + w_1 \frac{dv_0}{ds} \right], \quad (3.1.22b)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial s} + 3u_1 = 0. \quad (3.1.22c)$$

$$(3.1.22d)$$

最低次の解 (3.1.21) を、(3.1.22a), (3.1.22b) に代入すると、

$$2v_1 + \frac{\partial^2u_1}{\partial s^2} = -4\varepsilon V_0v_1, \quad (3.1.23)$$

$$-2u_1 + \frac{\partial^2v_1}{\partial s^2} = -4\varepsilon V_0u_1, \quad (3.1.24)$$

を得る。

つづいて、境界条件式、(3.1.4), (3.1.5) に (3.1.8) を代入し、 $r$  の二番目に小さいべき乗の項について整理する:

$$\text{at } s \rightarrow \infty, \quad u_1 = 0, \quad v_1 \rightarrow 0, \quad (3.1.25)$$

$$\text{at } s = 0, \quad w_1 = 0. \quad (3.1.26)$$

さらに, (3.1.7) についても同様にして,

$$\begin{cases} \frac{du_1}{ds} = C_d u_0 \sqrt{u_0^2 + (v_0 + V_0)^2}, \\ \frac{dv_1}{ds} = C_d (v_0 + V_0) \sqrt{u_0^2 + (v_0 + V_0)^2}. \end{cases}$$

これに,  $r$  の最低次の解 (3.1.21) を代入して,

$$\begin{cases} \frac{du_1}{ds} = 0, \\ \frac{dv_1}{ds} = C_d V_0^2. \end{cases} \quad (3.1.27)$$

したがって,  $\mathcal{O}(r^2)$  の方程式系 (3.1.23), (3.1.24), (3.1.22c), (3.1.25), (3.1.26), (3.1.27) が得られた. この方程式系の解は,

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{C_d V_0^2}{2\sqrt{1+2\varepsilon V_0}} e^{-\sqrt{1+2\varepsilon V_0}s} (\cos \sqrt{1+2\varepsilon V_0}s + \sin \sqrt{1+2\varepsilon V_0}s), \\ v_1 = -\frac{C_d V_0^2}{2\sqrt{1+2\varepsilon V_0}} e^{-\sqrt{1+2\varepsilon V_0}s} (\cos \sqrt{1+2\varepsilon V_0}s - \sin \sqrt{1+2\varepsilon V_0}s), \\ w_1 = \frac{3}{2} \frac{C_d V_0^2}{(1+2\varepsilon V_0)} (1 - e^{-\sqrt{1+2\varepsilon V_0}s} \cos \sqrt{1+2\varepsilon V_0}s) \end{cases} \quad (3.1.28)$$

となる. この結果は, ロスビー数が大きい場合にも適用できるという事は特筆すべきである. 速度場 (3.1.8) の級数は以下のように始まるであろう:

$$\begin{cases} u = +0 \cdot r + u_1 r^2 + \dots, \\ v = +0 \cdot r + v_1 r^2 + \dots, \\ w = 0 + w_1 r + \dots. \end{cases} \quad (3.1.29)$$

$s \rightarrow \infty$  での鉛直速度は,  $\mathcal{O}(r)$  の範囲までの議論で,

$$W = w_1(s \rightarrow \infty)r = \frac{3}{2} \frac{C_d V_0^2}{(1+2\varepsilon V_0)} r \quad (3.1.30)$$

となる. すなわち, 中心軸近傍では鉛直運動が存在せず, 境界層上端でのパンピング速度が  $r$  に比例する. パンピング速度は  $r$  に比例して増大し続けるという事はありえないため, 中心軸からいくらか離れた所で, 最大値とならなければならないだろう.

## 3.2 Hart(2000)

Hart(2000) は自由大気が,  $y$  方向にのみ存在し  $x$  方向にのみ依存して滑らかに変化する直線流  $V(x)$  を持つ場合と, 方位角方向にのみ存在し動径方向にのみ依存して滑らかに変化する円形渦  $V(r)$  を持つ場合に, それぞれ, 駆動される非線形エクマンポンピングについての研究を行った. 自由大気中の流れの渦度が一様な場合には, 境界層方程式は, 相似変換によってかなり単純化できるが, 自由大気中の流れが非一様な渦度を持っているような, より一般的な場合, 厳密な相似変換は存在せず, 理論的な結果は, これまでのところ, 基本的なポンピングの公式に対して  $\varepsilon$  の 1 乗のオーダーでしか非線形的な補正を得られていない. そこで Hart(2000) では, 自由大気の流れが非一様な渦度を持つ場合に, 境界層で駆動されるエクマンポンピングの非線形補正を, 直線流の場合には  $\varepsilon^4$  まで, 円形流の場合には  $\varepsilon^3$  まで求めた.

しかしながら, Hart(2000) で示される非線形エクマンポンピング速度の公式には, 幾つかの明らかな誤りがある. ここではまず, Hart(2000) における直線流の場合の議論を, 本論文における支配方程式のもとで再構築し, 誤りを正した後, 数値計算の結果との比較を行う. 続いて, 直線流の場合の非線形エクマンポンピング速度の公式を用いて, 円形流の場合の非線形エクマンポンピング速度の公式の誤りを正した後, その結果を数値計算結果と比較する.

### 3.2-1 直線流の場合

$y$  方向にのみ存在し,  $x$  方向にのみ依存する直線流  $V(x)$  のもとでの支配方程式 (2.1.1)–(2.1.3) を再掲する:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2v = 2\varepsilon \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial s} \right], \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2u = 2\varepsilon \left[ u \frac{\partial(V+v)}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial s} \right], \quad (3.2.2)$$

$$w = - \int_0^s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds. \quad (3.2.3)$$

唯一の無次元パラメータはロスビー数  $\varepsilon = U/2\Omega L$  である. ここで,  $\Omega$  は惑星の自転角速度である. 変数  $u(x, s)$ ,  $v(x, s)$ ,  $w(x, s)$  は, それぞれ境界層内における,  $x$ ,

$y$  及び鉛直方向の速度であり,  $V(x)$  は  $y$  方向の自由大気中の流れである. それゆえ, 境界層内部における  $y$  方向の全速度は  $V(x) + v(x, s)$  である. 粘着境界条件は,  $s$  が無限大に達するにつれて  $u$  と  $v$  が消え, また,  $s = 0$  では  $u = 0$  であり,  $v + V = 0$  である.

### 摂動展開

方程式 (3.2.1)–(3.2.2) を,  $\varepsilon$  に関する漸近展開によって, 解析的に解く. すなわち,

$$(u, v, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, v_n, w_n) \varepsilon^n, \quad (3.2.4)$$

と展開を行い, これを (3.2.1)–(3.2.3) に代入し,  $\varepsilon$  の指数が同じものを等式化する.  $\varepsilon$  の最低次, すなわち,  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$  の式は,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2v_0 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial s^2} = 0, \\ -2u_0 + \frac{\partial^2 v_0}{\partial s^2} = 0, \\ w_0 = \int_0^s \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) ds. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.2.5a) \\ (3.2.5b) \\ (3.2.5c) \end{array}$$

つづいて,  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  の式は,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2v_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} = 2 \left[ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial s} \right], \\ -2u_1 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} = 2 \left[ u_0 \frac{\partial (V + v_0)}{\partial x} + w_0 \frac{\partial v_0}{\partial s} \right], \\ w_1 = - \int_0^s \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) ds. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.2.6a) \\ (3.2.6b) \\ (3.2.6c) \end{array}$$

左辺では,  $\varepsilon$  の指数と  $u, v, w$  の下付き添え字とが一致するのにたいして, 右辺では, 支配方程式 (3.2.1), (3.2.2) の右辺に  $\varepsilon$  がかかっていたため,  $u, v, w$  の下付添え字は  $\varepsilon$  の指数よりも一つ小さくなる. したがって, 最低次の方程式における解が得られれば, その解  $u_0, v_0, w_0$  を式 (3.2.6) の右辺に代入することで  $u_1, v_1, w_1$  に関する微分方程式の非斉次項が得られ,  $u_1, v_1, w_1$  を求める事ができる. この手順を繰り返すと, 理論上は無限に高次の非線形補正を得る事ができる.



方程式 (3.2.5) の解はよく知られた結果として,

$$\begin{aligned} u_0 &= -Ve^{-s} \sin s, \\ v_0 &= -Ve^{-s} \cos s, \\ w_0 &= \frac{1}{2}V_x[1 - e^{-s}(\cos s + \sin s)] \end{aligned}$$

となる. ただし,  $\frac{dV}{dx} = V_x$  と表記した. これ以降は同様に, 例えば,  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx}$ ,  $\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = V_{xxx}$  と表記する. これを (3.2.6a), (3.2.6b) の右辺にそれぞれ代入すると,

$$\begin{cases} 2v_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} = VV_x[e^{-2s} - e^{-s}(\cos s - \sin s)], \\ -2u_1 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} = VV_x[-e^{-2s} + e^{-s}(\cos s - \sin s)], \end{cases} \quad (3.2.7)$$

これを解くと,

$$u_1 = VV_x \left[ \frac{3}{10}e^{-2s} - \frac{3}{10}e^{-s} \cos s + \frac{6}{10}e^{-s} \sin s - \frac{1}{4}se^{-s} \cos s - \frac{1}{4}se^{-s} \sin s \right], \quad (3.2.8)$$

$$v_1 = VV_x \left[ -\frac{1}{10}e^{-2s} + \frac{1}{10}e^{-s} \cos s + \frac{3}{10}e^{-s} \sin s - \frac{1}{4}se^{-s} \cos s + \frac{1}{4}se^{-s} \sin s \right]. \quad (3.2.9)$$

(3.2.8) を方程式 (3.2.6c) に代入して,

$$w_1 = -(VV_{xx} + V_x^2) \left[ \frac{7}{40} - \frac{3}{20}e^{-2s} - \frac{1}{40}e^{-s} \cos s - \frac{23}{40}e^{-s} \sin s + \frac{1}{4}se^{-s} \cos s \right] \quad (3.2.10)$$

を得る. したがって,  $\mathcal{O}(\epsilon)$  までの精度で境界層上端でのパンピング速度は

$$W = \lim_{s \rightarrow \infty} (w_0 + \epsilon w_1) = \frac{1}{2}V_x - \epsilon \frac{7}{40}(VV_{xx} + V_x^2) \quad (3.2.11)$$

となる.

## 摂動解と数値解の比較

Hart(2000) は, MAPLE によって  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  までの範囲での摂動解を求めた. その結果は, 明らかな誤りを正して, <sup>\*1</sup> 以下の通りである:

$$\begin{aligned}
W(x) = & \frac{V_x}{2} - \varepsilon \frac{7}{40} (V_x^2 + VV_{xx}) + \varepsilon^2 \frac{3}{320} (5V_x^3 - 2VV_xV_{xx} - 6V^2V_{xxx}) \\
& + \varepsilon^3 \left\{ \frac{1634827}{63648000} V^2V_xV_{xxx} + \frac{74609}{1272960} V^2V_{xx}^2 + \frac{6023978}{63648000} VV_x^2V_{xx} \right. \\
& \left. - \frac{232847}{21216000} V^3V_{xxxx} - \frac{53219}{7072000} V_x^4 \right\} \\
& + \varepsilon^4 \left\{ \frac{2022184531}{32460480000} V^2V_{xxx}V_x^2 + \frac{1424939959}{64920960000} V^3V_{xxxx}V_x \right. \\
& + \frac{17320047821}{281324160000} V^3V_{xxx}V_{xx} - \frac{100019263}{112529664000} V^4V_{xxxxx} + \frac{1273990037}{49645440000} V^2V_{xx}^2V_x \\
& \left. - \frac{33281269}{125032960000} V_x^5 - \frac{24893782793}{843972480000} VV_{xx}V_x^3 \right\}. \quad (3.2.12)
\end{aligned}$$

Hart(2000) では, この公式をロスビー数の摂動展開によって得た. そのことがどの程度のロスビー数まで正当性があるのかをみるために, 今回の研究で計算した数値解と, Hart(2000) の摂動解を比較する. 自由大気中の速度分布に  $V(x) = x \exp(-x^2/2)$  を用いて計算した摂動解と数値解の比較結果を図 3.1–3.4 に示した.

図 3.1–3.4 をみると, ロスビー数が 0.9 のときに数値解と摂動解の間に, わずかではあるが差が現れている. 少なくとも, ロスビー数が 0.75 程度においては, 摂動解と数値解の間に有意な差は見られない. したがって, Hart(2000) の得た直線流の場

<sup>\*1</sup>Hart(2000) 本文中にある, 直線流の場合の非線形エクマンパンピング速度の公式は, 本論文中でスケールリングに書き換えて, 以下の通り:

$$\begin{aligned}
W(x) = & \frac{V_x}{2} + \varepsilon \frac{7}{40} (V_x^2 + VV_{xx}) + \varepsilon^2 \frac{3}{320} (5V_x^3 - 2VV_xV_{xx} - 6V^2V_{xxx}) \\
& + \varepsilon^3 \left\{ \frac{1634827}{63648000} V^2V_xV_{xxx} + \frac{74609}{1272960} V^2V_{xx}^2 + \frac{6023978}{63648000} VV_x^2V_{xx} \right. \\
& \left. - \frac{232847}{21216000} V^3V_{xxxx} - \frac{53219}{7072000} V_x^4 \right\} \\
& + \varepsilon^4 \left\{ \frac{2022184531}{32460480000} V^2V_{xxx}V_x^2 + \frac{1424939959}{64920960000} V^3V_{xxxx}V_x \right. \\
& + \frac{17320047821}{281324160000} V^3V_{xxx}V_{xx} - \frac{100019263}{112529664000} V^4V_{xxxxx} + \frac{1273990037}{49645440000} V^2V_{xx}^2V_x \\
& \left. - \frac{33281269}{125032960000} V_x^5 - \frac{24893782793}{843972480000} VV_{xx}V_x^3 \right\}.
\end{aligned}$$

右辺第二項目, すなわち,  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  の項の符号は  $-$  が正しい.

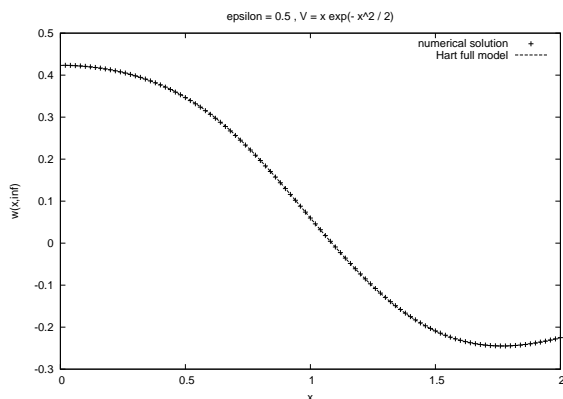


図 3.1: 数値計算の結果と Hart(2000) による摂動解との比較.  $V(x) = x \exp(-x^2/2)$ ,  $\varepsilon = 0.5$  の場合. 横軸は  $x$  を, 縦軸は境界層上端でのパンピング速度  $w(x, \infty)$  を意味する. 数値計算による結果を +, 摂動解を破線で示した.

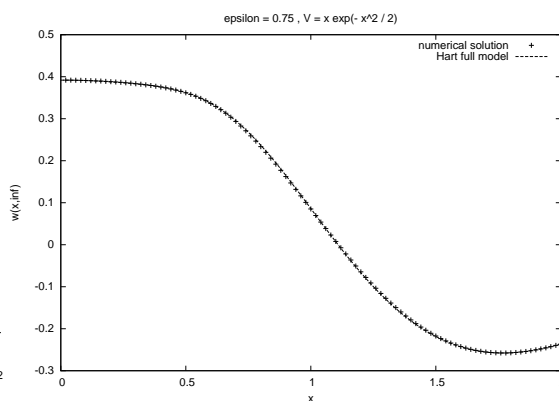


図 3.2: 数値計算の結果と Hart(2000) による摂動解との比較.  $V(x) = x \exp(-x^2/2)$ ,  $\varepsilon = 0.75$  の場合. 横軸は  $x$ , 縦軸は  $w(x, \infty)$  を意味する. 数値計算による結果を +, 摂動解を破線で示した.

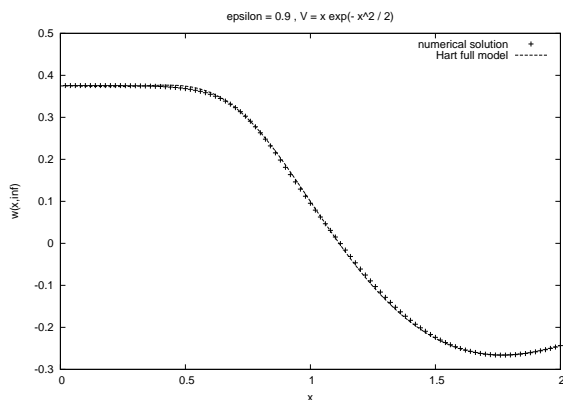


図 3.3: 数値計算の結果と Hart(2000) による摂動解との比較.  $V(x) = x \exp(-x^2/2)$ ,  $\varepsilon = 0.9$  の場合. 横軸は  $x$ , 縦軸は  $w(x, \infty)$  を意味する. 数値計算による結果を +, 摂動解を破線で示した.

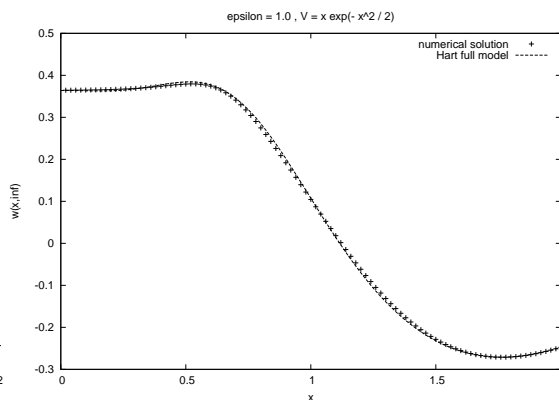


図 3.4: 数値計算の結果と Hart(2000) による摂動解との比較.  $V(x) = x \exp(-x^2/2)$ ,  $\varepsilon = 1.0$  の場合. 横軸は  $x$ , 縦軸は  $w(x, \infty)$  を意味する. 数値計算による結果を +, 摂動解を破線で示した.

合の非線形エクマンパンピングの公式 (3.2.12) は, ロスビー数の大きさが 0.75 程度の場合には有用であることが確認できた.

### 3.2-2 円形流の場合

Hart(2000) は直線流の場合と同様にして, 円形流の場合には,  $\varepsilon^3$  までの範囲での非線形エクマンポンピング速度の公式を得た. 幾つかの明らかな誤りを, 直線流の場合の公式を参考にして正して\*2 以下の通り:

$$\begin{aligned}
W(r) = & \frac{1}{2} \left( V_r + \frac{V}{r} \right) - \frac{1}{40r} \varepsilon (9VV_r + 7rVV_{rr} + 7rV_r^2) \\
& - \frac{1}{4800r^3} \varepsilon^2 (94r^2V^2V_{rr} - 270r^3V_{rrr}V^2 + 953r^2VV_r^2 - 90r^3VV_rV_{rr} \\
& - 1407rV^2V_r + 225r^3V_r^3 + 469V^3) \\
& + \frac{\varepsilon^3}{63648000r^4} \left\{ 19254400r^3V^2V_{rr}V_r - 29933460r^2V^3V_{rr} + 6023987r^4VV_r^2V_{rr} \right. \\
& + 1634827r^4V^2V_{rrr}V_r + 3895427r^3V_{rrr}V^3 - 698541r^4V^3V_{rrrr} \\
& + 1263075r^3VV_r^3 - 8800380r^2V^2V_r^2 + 3730450r^4V_r r^2V^2 \\
& \left. - 478971r^4V_r^4 + 58687188rV^3V_r - 27876864V^4 \right\} \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

この公式の正当性を数値解との比較によって検討する. 自由大気中の速度分布に  $V(r) = r \exp(-r^2/2)$  を用いて計算した摂動解と数値解の比較結果を図 3.5– 3.8 に示す.

\*2Hart(2000) 本文中にある, 円形流の場合の非線形エクマンポンピング速度の公式は, 本論文中でのスケーリングに書き換えて, 以下の通り:

$$\begin{aligned}
W(r) = & \left( V_r + \frac{V}{r} \right) - \frac{\varepsilon}{40} (9VV_r + 7rVV_{rr} + 7rV_r^2) \\
& + \frac{\varepsilon^2}{r^3} (-94r^2V^2V_{rr} + 270r^3V_{rrr}V^2 - 953r^2VV_r^2 + 90r^3VV_rV_{rr} + 1407rV^2V_r \\
& - 225r^3V_r^3 - 469V^3) \\
& + \frac{\varepsilon^3}{63648000r^4} \left\{ 19254400r^3V^2V_{rr}V_r - 29933460r^2V^3V_{rr} + 6023987r^4VV_r^2V_{rr} \right. \\
& + 1634827r^4V^2V_{rrr}V_r + 3895427r^3V_{rrr}V^3 - 698541r^4V^3V_{rrrr} + 1263075r^3VV_r^3 \\
& - 8800380r^2V^2V_r^2 + 3730450r^4V_r r^2V^2 - 478971r^4V_r^4 + 58687188rV^3V_r \\
& \left. - 27876864V^4 \right\}
\end{aligned}$$

明らかな誤りとして, まず,  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$  の補正項の係数は  $1/2$  である. 次に,  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  の補正項は, 全体に係数  $1/r$  が抜けていることと, 二番目の項の係数に  $r$  が抜けている. 最後は,  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  の補正項には, 全体に  $10^{-3}$  程度の係数が必要である. これは直線流の場合の公式における  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  の補正項を参考にして  $1/4800$  であると推察される.

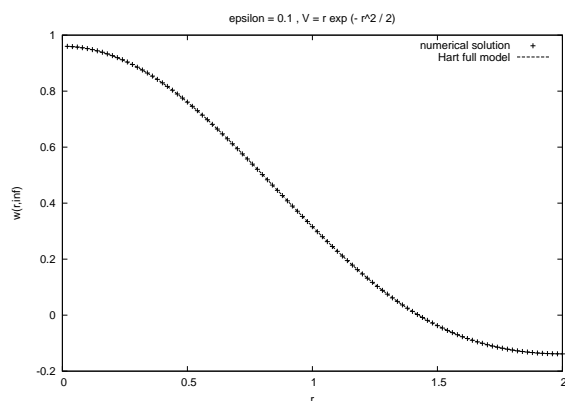


図 3.5: 数値計算の結果と Hart(2000) による摂動解との比較.  $V(r) = r \exp(-r^2/2)$ ,  $\varepsilon = 0.1$  の場合. 横軸は半径  $r$  を, 縦軸は境界層上端でのパンピング速度  $w(r, \infty)$  を意味する. 数値計算による結果を +, 摂動解を破線で示した.

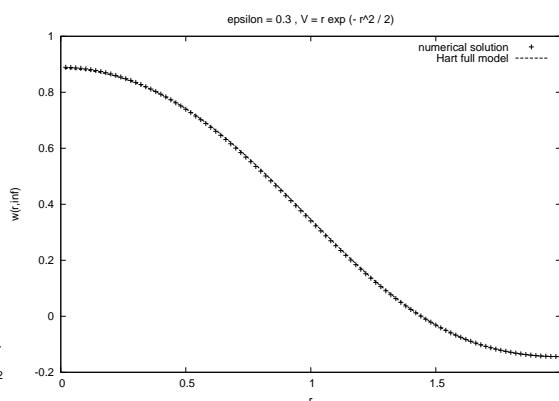


図 3.6: 数値計算の結果と Hart(2000) の摂動解の比較.  $V = r \exp(-r^2/2)$ ,  $\varepsilon = 0.3$  の場合. 横軸は  $r$ , 縦軸は  $w(r, \infty)$  を意味する. 数値計算による結果は +, 摂動解は破線で示した.

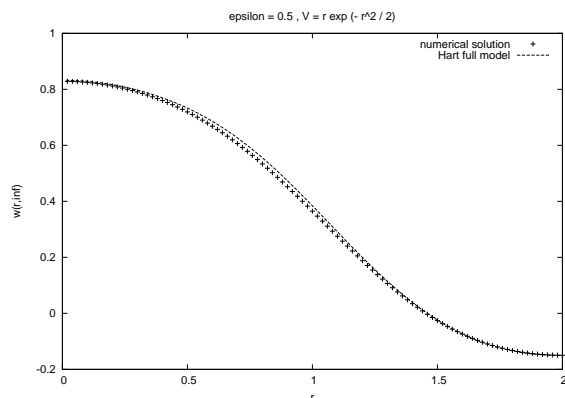


図 3.7: 数値計算の結果と Hart(2000) の摂動解の比較.  $V = r \exp(-r^2/2)$ ,  $\varepsilon = 0.5$  の場合. 横軸は  $r$ , 縦軸は  $w(r, \infty)$  を意味する. 数値計算による結果は +, 摂動解は破線で示した.

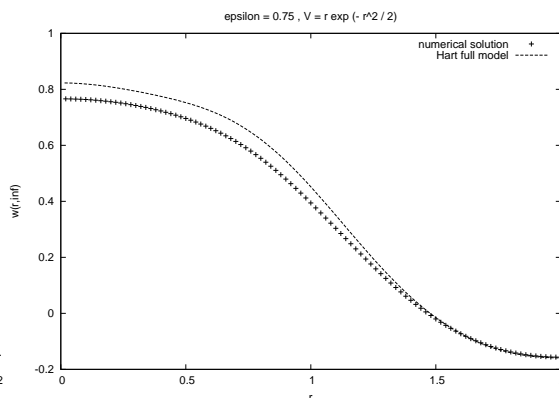


図 3.8: 数値計算の結果と Hart(2000) の摂動解の比較.  $V = r \exp(-r^2/2)$ ,  $\varepsilon = 0.75$  の場合. 横軸は  $r$ , 縦軸は  $w(r, \infty)$  を意味する. 数値計算による結果は +, 摂動解は破線で示した.

図 3.5–3.8 をみると, ロスビー数が 0.5 程度するときには, 数値解と摂動解との間にわずかではあるが, 差が現れている. ロスビー数が 0.75 のときには両者の差がよく確認できる. したがって, Hart(2000) の示した, 円形流の場合の公式は,  $\varepsilon$  が 0.5 程度までしか有効でないとと言える. Hart(2000) の得た, 非線形エクマンパンピング速

---

度の公式は, 直線流の場合の精度は  $\epsilon^4$  であったのに対して, 円形流の場合は  $\epsilon^3$  の精度までしか得られていないことに起因すると考えられる. そのことが主な理由となって, 円形流の場合で適用できるロスビー数の範囲が狭まったと考ええると, 摂動展開を用いても, さらに精度を高めたならば, より大きなロスビー数の場合の研究を行う事ができるのかもしれない. しかしながら, これ以上の精度を求めるためには, 数千もの項が生じる事になるため, MAPLE のようなソフトウェアを用いたとしても実用的ではない, と Hart はコメントしている. また, 現実の台風のような強い渦を研究対象とするならば, その場合のロスビー数はさらに大きく取らなければならない.

## 第4章 円形流の場合の計算結果

### 4.1 自由大気の風速分布

本研究における数値計算は Lindzen and Kuo(1969) の方法に緩和法を組み合わせることで計算を行った。詳しい計算方法については付録 A に記述した。

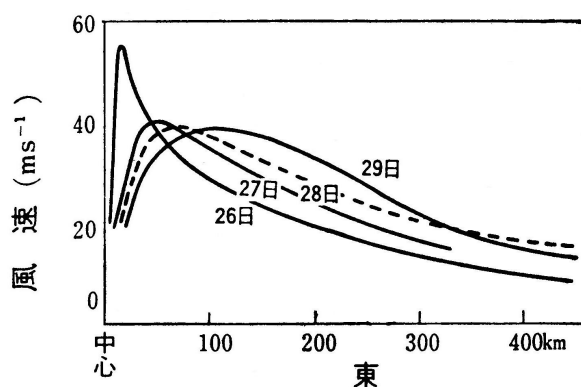


図 4.1: 高度 700mb での飛行機観測によって得られた台風 7916 号の風速分布. (山岬 (1982))

図 4.1 には、観測から得られた実際の台風の風速の水平分布を示した。このような風速分布をよい近似で表すモデルとして、Rankine の結合渦モデルがある。これは、ある半径までの円形領域にのみ、一様な渦度が集中し、その外側では渦なしの流れとなっているモデルである。渦度が半径  $r < 1$  までの領域に集中している状況での Rankine の結合渦モデルによって得られる接線風速分布を図 4.2 に示す。しかし、Rankine の結合渦モデルは実際の台風の接線風速をよく表しているが、 $r = 1$  の点において微分不可能になってしまうため、数値計算に用いるには不適當である。Rankine の結合渦モデルの風速分布とよく似た微分可能な関数としては、例えば、

$$V(r) = r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad (4.1.1)$$

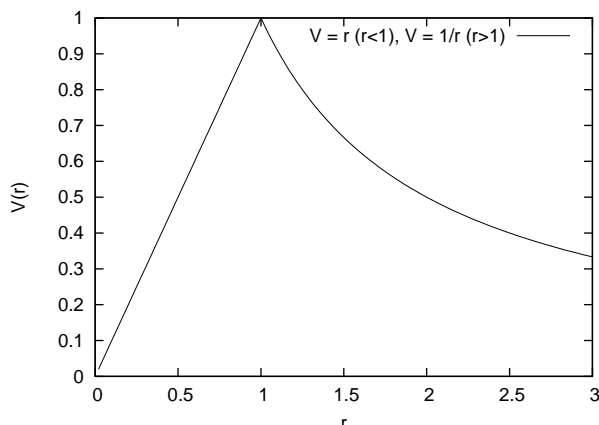


図 4.2: Rankine の結合渦モデル. 円形領域において半径  $r < 1$  の領域では渦度が存在し,  $r > 1$  の領域では  $\zeta = 0$  とした場合の接線風速  $V(r)$  の, 動径方向の分布を示した.

や,

$$V(r) = \frac{r}{1 + r^2} \quad (4.1.2)$$

などがある. 式 (4.1.1), (4.1.2) で表される風速の水平分布を図 4.3, 4.4 に示す. また, それぞれの風速の渦度分布を図 4.5, 4.6 に示す.

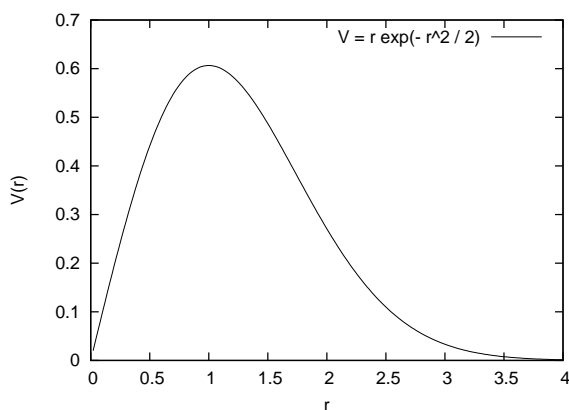


図 4.3:  $V(r) = r \exp(-r^2/2)$  の動径方向の分布. 中心軸付近では傾きがほぼ一定であり,  $r = 1$  にて最大値をとったあと, 指数関数的に減衰していく. 横軸が半径  $r$ , 縦軸が風速  $V$  である.

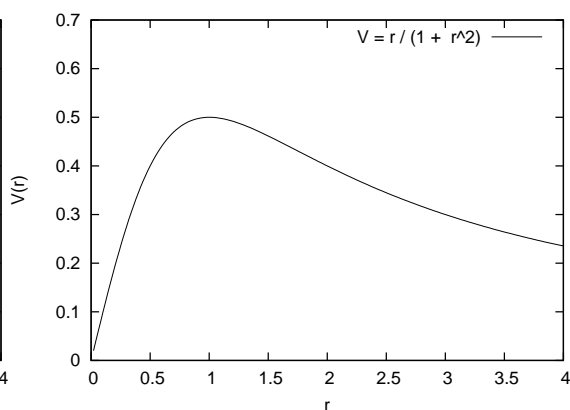


図 4.4:  $V(r) = r / (1 + r^2)$  の動径方向の分布. 中心軸付近では  $r$  にほぼ比例し,  $r = 1$  にて最大値 0.5 をとったあと,  $r$  の逆数に比例して減衰していく. 横軸が半径  $r$ , 縦軸が風速  $V$  である.

Hart(2000) 及び, 本論文第 3 章では, (4.1.1) 式で表される風速分布を用いて得た



結果を示している。しかしながらこの風速分布は、順圧不安定の必要条件を満たしている。そこで今回、自由大気中の接線速度分布  $V(r)$  として、(4.1.2) に示されるような風速分布を用いた。

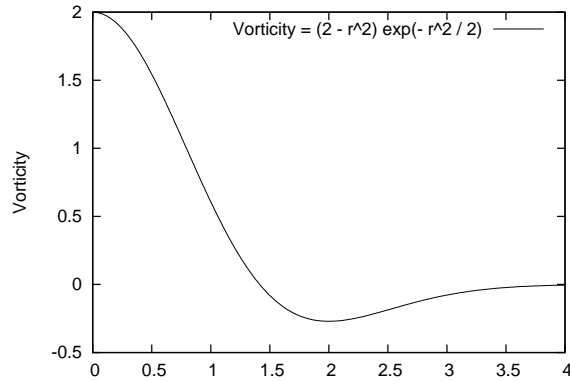


図 4.5:  $V = r \exp(-r^2/2)$  とした場合の渦度の動径方向の分布。

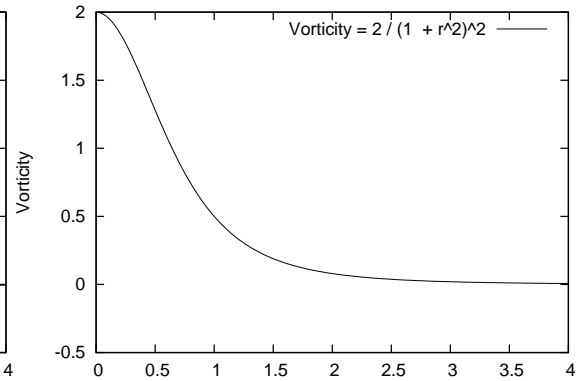


図 4.6:  $V = r/(1+r^2)$  とした場合の渦度の動径方向の分布。

本研究で用いる自由大気中の風速分布では、自由大気中の接線風速が最大となる点における半径を代表的な水平方向の長さ  $L$ 、接線風速の最大値を代表的な風速  $U/2$  としている。したがって、図 4.1 で示されているような台風の場合、 $L$  は 50km から 100km 程度、 $U$  は  $2 \times 40\text{m/s}$  程度の大きさであるとみなされるため、ロスビー数は 5 から 10 程度の大きさである。

## 4.2 粘着境界条件を課した場合

エクマン境界層の下端に粘着境界条件を課した場合についての議論を行う。下端境界に課す粘着境界条件は、次の通りである：

$$\text{at } s = 0, \quad \begin{cases} u = 0, \\ v + V = 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

この境界条件を課した場合の線形エクマンポンピングは、解析解、

$$\begin{aligned} u &= -V e^{-s} \sin s, \\ v &= -V e^{-s} \cos s, \\ w &= \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) [1 - e^{-s} (\cos s + \sin s)] \end{aligned}$$

を持つことはよく知られている.

線形エクマンパンピングは  $\varepsilon = 0$  としたときの解である. 非線形エクマンパンピングにおけるパンピング速度を, ロスビー数を変えて数値計算した結果を示す. まず, ロスビー数を 0 から 1.5 まで大きくしたときの, 非線形エクマンパンピング速度を図 4.7 に示す. 線形エクマンパンピングと比べて, 非線形エクマンパンピングは

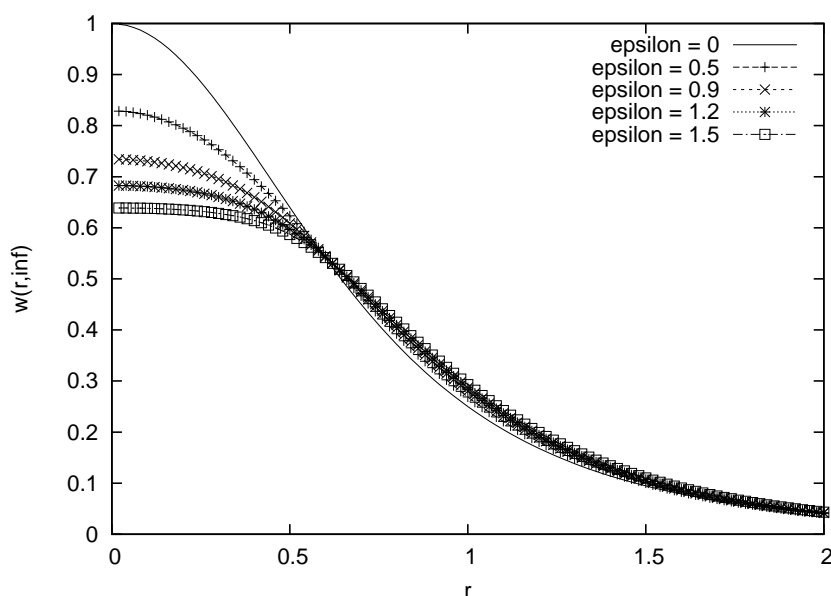


図 4.7: ロスビー数を 0 から 1.5 まで変えたときの, 境界層上端におけるエクマンパンピング速度の動径分布  $w(r, \infty)$ . 実線がロスビー数が 0, すなわち, 線形エクマンパンピング速度を, + 付きの破線が  $\varepsilon = 0.5$  の場合の非線形エクマンパンピング速度を, × 付きの細かい破線が  $\varepsilon = 0.9$  の場合, \* 点が付されている点線が  $\varepsilon = 1.2$  の場合, □ 付きの鎖線が  $\varepsilon = 1.5$  の場合, それぞれの非線形パンピング速度を意味する.

中心軸付近で減少することは, Hart(2000) の摂動解からも示されている事であり, 今回の数値解においてもその傾向が見られる. ロスビー数が大きくなるごとに, 非線形性が強くなり, 境界層上端での鉛直速度は減少する. しかしながらこの鉛直速度の減少は, 中心軸に近い  $r \lesssim 0.5$  の領域に限られている. それ以外の  $r \gtrsim 0.5$  の領域ではロスビー数を変えても鉛直速度の応答はほとんど見られない.

つづいて, ロスビー数に 2.0 から 3.0 までの値を与えた時ときの非線形エクマンパンピング速度を図 4.8 に示す. ロスビー数に 2 以上の大きな値を与えると, 中心軸付近の鉛直速度が減り続けた結果, 中心軸付近の鉛直速度の大きさが,  $r \simeq 0.5$  の

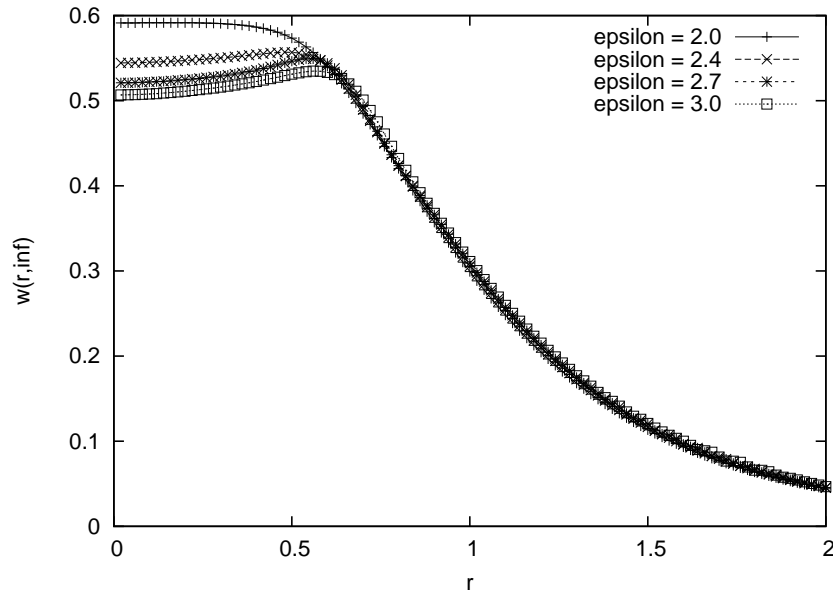


図 4.8: ロスビー数を 2.0 から 3.0 まで変えたときの, 境界層上端におけるエクマンパンピング速度の動径分布  $w(r, \infty)$ , + 付きの実線が  $\varepsilon = 2.0$  の場合, × 付きの破線が  $\varepsilon = 2.4$  の場合, \* が付されている細かい破線が  $\varepsilon = 2.7$  の場合, □ 付きの点線が  $\varepsilon = 3.0$  の場合, それぞれの非線形エクマンパンピング速度を意味する.

点付近での鉛直速度の大きさを下回ってしまう。そのため, 鉛直速度の分布が, 中心軸付近で極小となり,  $r \simeq 0.5$  の点付近で最大値をとる。3.0 よりも大きな値を持つロスビー数の場合は, 緩和法の繰り返しが収束せず, 計算結果を得られていない。

中心軸に近い所ほどパンピング速度が減少する原因を考える。そのために, 支配方程式中の非線形移流項に注目する。支配方程式を再掲する:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2v = (\text{n.l.t.})_r, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2u = (\text{n.l.t.})_\theta, \quad (4.2.3)$$

$$w = - \int_0^s \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right\} ds. \quad (4.2.4)$$

ここで, (n.l.t.) と略記した項は非斉次の非線形項であり, 下付き添え字  $r, \theta$  はそれぞれ動径方向, 接線方向の成分を意味する。非線形項を具体的に書き下すと,

$$(\text{n.l.t.})_r = u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{2Vv + v^2}{r}, \quad (4.2.5)$$

$$(\text{n.l.t.})_\theta = u \frac{\partial (v + V)}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u(v + V)}{r}. \quad (4.2.6)$$

である.

まず, (4.2.2), (4.2.3) の左辺から,  $v$  を消去して次の方程式を得る:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + 4u = \frac{d^2}{ds^2}(\text{n.l.t.})_r - 2(\text{n.l.t.})_\theta. \quad (4.2.7)$$

動径速度  $u$  が鉛直方向には正弦関数的に依存するならば, (4.2.7) の左辺は  $u$  の正值の定数倍とみなして良いだろう. このことは線形エクマンパンピングの解を根拠にしている. したがって, 非線形項のエクマンパンピング速度への寄与の見積もりは, 次のように書ける:

$$w_{\text{n.l.t.}} = -\alpha \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left\{ \frac{d^2}{ds^2}(\text{n.l.t.})_r - 2(\text{n.l.t.})_\theta \right\} ds. \quad (4.2.8)$$

ここでの  $\alpha$  は正の定数を表す. この見積もりによって得られる非線形項のパンピング速度への寄与  $w_{\text{(n.l.t.)}}$  の動径分布を図 4.9 に示す.

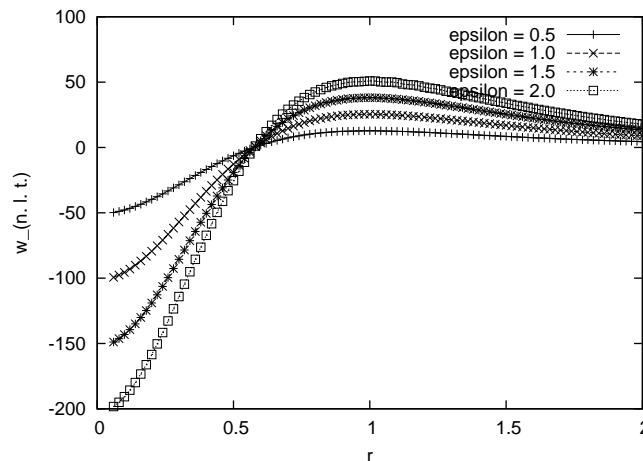


図 4.9: 式 (4.2.8) で表される, 非線形項のエクマンパンピング速度への寄与の見積もりの動径分布. + 記号付き実線が  $\epsilon = 0.5$  の場合, × 付き破線が  $\epsilon = 1.0$  の場合, \* 付き細かい破線が  $\epsilon = 1.5$  の場合, □ 付き点線が  $\epsilon = 2.0$  の場合を意味する.

図 4.9 をみると, 非線形項のパンピング速度への寄与は中心軸付近で非常に大きい. 中心軸から離れるに連れてこの項は小さくなり,  $r \gtrsim 0.5$  の領域では, それぞれが逆符号, すなわち, 上昇流を増大させる方向になっている. このような非線形項の分布が, 非線形エクマンパンピング速度の, 中心軸から離れた所で最大となる水平分布をもたらしていると考えられる.

水平方向に依存性をもつ状況での非線形エクマンポンピングについては、ロスビー数が3.0までしか計算は成功しなかった。しかしながら、Eliassen(1971)が行ったように半径  $r$  での展開を行い、方程式系から、動径方向の依存性を落とした場合、さらに大きなロスビー数の場合にも計算を成功させる事ができた。これを用いて、より大きなロスビー数の場合の、中心軸近傍における非線形エクマンポンピングについて議論を行う。中心軸上において渦度の鉛直成分と水平発散とが有限の値に留まるとして、半径  $r$  で展開すると、支配方程式は (3.1.9) と変形できる。これを再掲する:

$$\begin{cases} 2v_0 + \frac{d^2u_0}{ds^2} = 2\varepsilon \left\{ u_0^2 + w_0 \frac{du_0}{ds} - (2v_0V_0 + v_0^2) \right\}, \\ -2u_0 + \frac{d^2v_0}{ds^2} = 2\varepsilon \left\{ 2u_0(v_0 + V_0) + w_0 \frac{dv_0}{ds} \right\}, \\ \frac{dw_0}{ds} + 2u_0 = 0. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

この方程式系をロスビー数を変えて数値的に解いた結果を図 4.10 に示す。

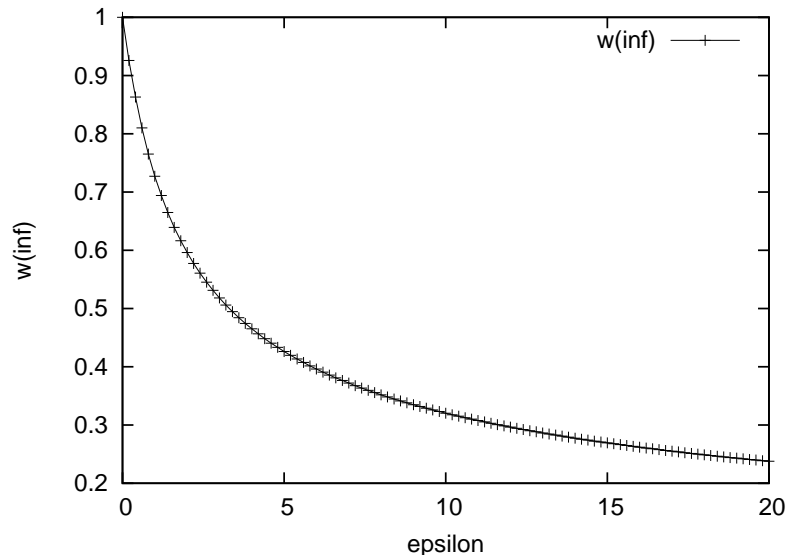


図 4.10: ロスビー数を大きくした場合の中心軸付近のポンピング速度の変化。横軸はロスビー数  $\varepsilon$ 、縦軸は中心軸近傍における境界層上端での鉛直速度である。

図 4.10 をみると、 $\varepsilon = 5$  においては、中心軸近傍での非線形エクマンポンピング速度は 0.4 程度、 $\varepsilon = 10$  では 0.3 程度まで減少することが分かる。したがって、 $r \gtrsim 0.5$  の領域において、エクマンポンピング速度がほとんど変化しなければ、最大値と極小値の差がより明瞭な、上昇流の分布が得られる。しかしながら、ロスビー数を大

きくとするほど、鉛直速度の減少の仕方はゆるやかとなり、例えばロスビー数に 100 程度の大きさを与えても、中心軸付近での境界層上端の鉛直速度は、0.1 に漸近するようになる。したがって、粘着境界条件を与えた場合の非線形エクマンポンピング速度が、中心軸付近で負、すなわち、下降流とはなりそうもない。

### 4.3 すべり境界条件を課した場合

エクマン層境界層の下端にすべり境界条件を適用した場合におけるエクマンポンピング速度の計算結果を示す。このすべり境界条件とは、下端に働く応力が下端の風速の関数として表される条件である。今回は、この境界条件として、応力が下端の水平風速の一乗に比例するという条件と、水平風速の二乗に比例するという二つの境界条件を課した場合を考察した。ここで、応力が水平風速に比例するという条件を一次すべり境界条件、応力が水平風速の二乗に比例するという条件を二次すべり境界条件と呼ぶ事にする。

#### 4.3-1 一次すべり境界条件の場合

ここでいう一次すべり境界条件とは、応力が地表面の水平風速に比例するという形で与えた境界条件であり、すなわち、

$$\text{at } s = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial s} = C_d u, \\ \frac{\partial v}{\partial s} = C_d (v + V) \end{array} \right.$$

である。ここで  $C_d$  は抵抗係数であり、定数とする。この境界条件は、粘着条件と自由すべり条件との混合条件として知られている。 $C_d$  が無限大のとき、この境界条件は粘着境界条件を意味し、 $C_d$  が 0 のとき、この境界条件は自由すべり条件を意味する。

この場合の線形エクマンパンピングは解析的に計算する事ができ,

$$u = -\frac{C_d V}{C_d^2 + 2C_d + 2} e^{-s} [\cos s + (1 + C_d) \sin s], \quad (4.3.1)$$

$$v = -\frac{C_d V}{C_d^2 + 2C_d + 2} e^{-s} [(1 + C_d) \cos s - \sin s], \quad (4.3.2)$$

$$w = \frac{C_d}{2(C_d^2 + 2C_d + 2)} \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) [(2 + C_d) - e^{-s} \{(2 + C_d) \cos s + C_d \sin s\}] \quad (4.3.3)$$

となる.

一次すべり境界条件を与えた場合のエクマンパンピング速度を, ロスビー数を変えて計算した結果を図 4.11–4.12 に示す.

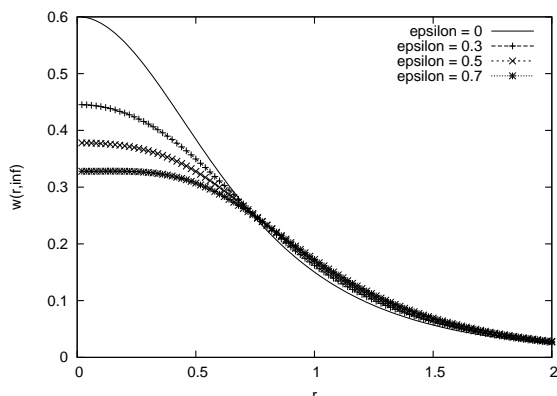


図 4.11: ロスビー数を 0 から 0.7 まで変えたときの, 境界層上端におけるエクマンパンピング速度の動径分布  $w(r, \infty)$ . 実線がロスビー数が 0, + 付きの破線が  $\varepsilon = 0.3$  の場合, × 付きの細かい破線が  $\varepsilon = 0.5$  の場合, \* 点が付されている点線が  $\varepsilon = 0.7$  の場合を意味する.  $C_d = 1.0$ .

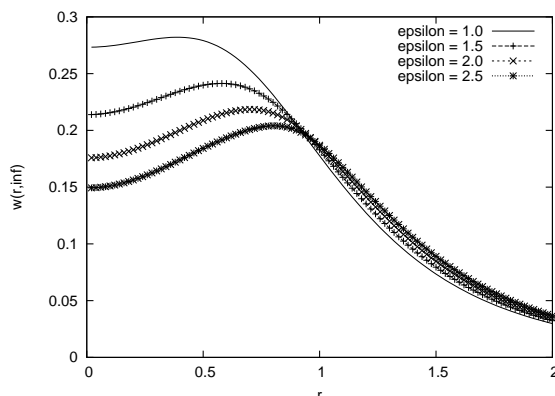


図 4.12: ロスビー数を 1.0 から 2.5 まで変えたときの, 境界層上端におけるエクマンパンピング速度の動径分布  $w(r, \infty)$ . 実線がロスビー数が 1.0, の場合, + 付き破線が  $\varepsilon = 1.5$  の場合, × 付き細かい破線が  $\varepsilon = 2.0$  の場合, \* 点が付されている点線が  $\varepsilon = 2.5$  の場合を意味する.  $C_d = 1.0$ .

図 4.11 をみると, この一次すべり境界条件を課した場合においても, ロスビー数が大きくなるにつれて中心軸付近でエクマンパンピング速度が減少する. このパンピング速度の減少は中心軸付近で顕著に見られる. つづいて, 図 4.12 を見ると, 中心軸付近でパンピング速度が著しく減少した結果, 中心軸付近で極小, 中心軸から幾分, 動径距離を持った所で最大となる. この事は, 粘着境界条件を与えた場合と同じである. しかしながら, 粘着境界条件の場合は, ロスビー数を変えても  $r \simeq 0.5$

程度の点において最大となる事は変わらなかったが、一次すべり境界条件を与えた場合は、ロスビー数を大きくしていくと、パンピング速度最大となる所が中心軸から離れていく。

また、一次すべり境界条件を与えた場合のエクマンパンピング速度を抵抗係数  $C_d$  を変えて計算した結果を図 4.13 に示す。

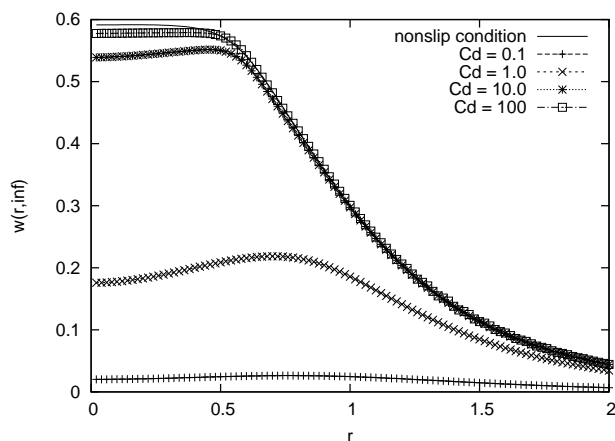


図 4.13: 抵抗係数  $C_d$  を 0.1 から 100 まで変えたときのエクマンパンピング速度の動径分布  $w(r, \infty)$ . 実線が比較対象として粘着境界条件を与えた場合のエクマンパンピング速度, + 付きの破線が  $C_d = 0.1$  の場合, × 付きの細かい破線が  $C_d = 1.0$  の場合, \* 付きの点線が  $C_d = 10.0$  の場合, □ 付きの鎖線が  $C_d = 100$  の場合を意味する.  $\varepsilon = 2.0$ .

抵抗係数が大きい程、一次すべり条件を与えた場合のパンピング速度は、粘着境界条件のもとでのパンピング速度の値に近づくことが確認される。また、抵抗係数が小さい程、パンピング速度は小さくなっていく。Eliassen(1971)においてすべり境界条件を課した場合の最低次オーダーでの下端の境界条件を

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial s} &= 0\end{aligned}$$

とした場合の結果は、ここでの抵抗係数  $C_d$  を 0 とした場合、すなわち、下端境界に自由すべり境界条件を与えた場合に等しいと考えられる。この場合、パンピング速度は生じない。



### 4.3-2 二次すべり境界条件の場合

ここでいう二次すべり境界条件とは、応力が地表面の水平風速の二乗に比例するという形で与えた境界条件であり、すなわち、

$$\text{at } s = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = C_d u V_s, \\ \frac{\partial v}{\partial s} = C_d (v + V) V_s \end{cases}$$

である。ただし、

$$V_s = \sqrt{u^2 + (v + V)^2}. \quad (4.3.4)$$

また、 $C_d$  は抵抗係数であり、定数とする。

この場合、境界条件が非線形であるため、線形エクマンパンピングであっても、解を解析的に計算することは容易ではない。しかし、数値的に計算する場合には、適当な初期条件のもとに緩和法を用いることで、解を得る事ができる。下端の境界に二次すべり境界条件を与えた場合の非線形エクマンパンピングのパンピング速度の水平分布について、ロスビー数を変えて計算した結果を図 4.14–4.15 に示した。

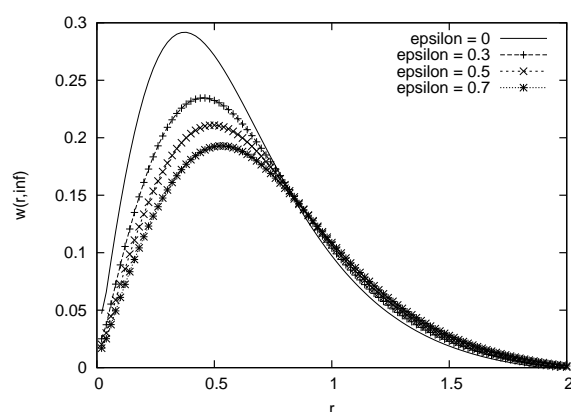


図 4.14: ロスビー数を 0 から 0.7 まで変えたときの、境界層上端におけるエクマンパンピング速度の動径分布  $w(r, \infty)$ . 実線がロスビー数が 0, + 付きの破線が  $\epsilon = 0.3$  の場合, × 付きの細かい破線が  $\epsilon = 0.5$  の場合, \* 点が付されている点線が  $\epsilon = 0.7$  の場合を意味する.  $C_d = 1.0$ .

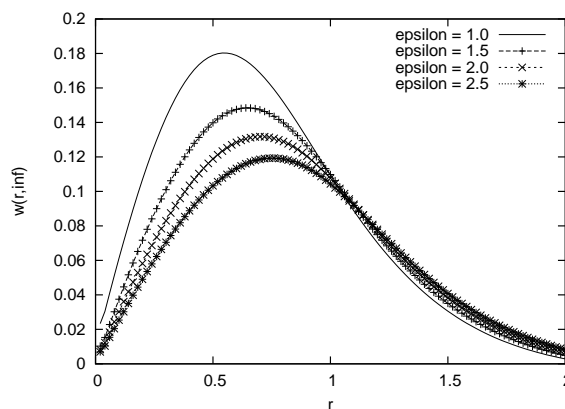


図 4.15: ロスビー数を 1.0 から 2.5 まで変えたときの、境界層上端におけるエクマンパンピング速度の動径分布  $w(r, \infty)$ . 実線がロスビー数が 1.0, + 付き破線が  $\epsilon = 1.5$  の場合, × 付き細かい破線が  $\epsilon = 2.0$  の場合, \* 点が付されている点線が  $\epsilon = 2.5$  の場合を意味する.  $C_d = 1.0$ .

図 4.14 を見ると, 下端の境界に二次すべり境界条件を与えた場合, パンピング速度の水平分布は,  $\varepsilon = 0$ , すなわち, 線形エクマンパンピングにおいても中心軸上でずっと小さく, 0 に近い値となる. このことは Eliassen(1971) の結果と同様である. ロスビー数を大きくしていくと, パンピング速度の最大値が減少する. つづいて, 図 4.15 をみる. パンピング速度は中心から少し離れた所で最大値を取る分布をしていることが分かる. このパンピング速度最大となる位置は,  $\varepsilon = 1.0$  の時は,  $r \simeq 0.5$  の点であるが, ロスビー数が大きくなると, 少しづつではあるが, 中心軸から離れていく.

つづいて下端に二次すべり条件を与えた場合のエクマンパンピング速度について, 抵抗係数  $C_d$  を変えて計算を行った結果を図 4.16 に示す.

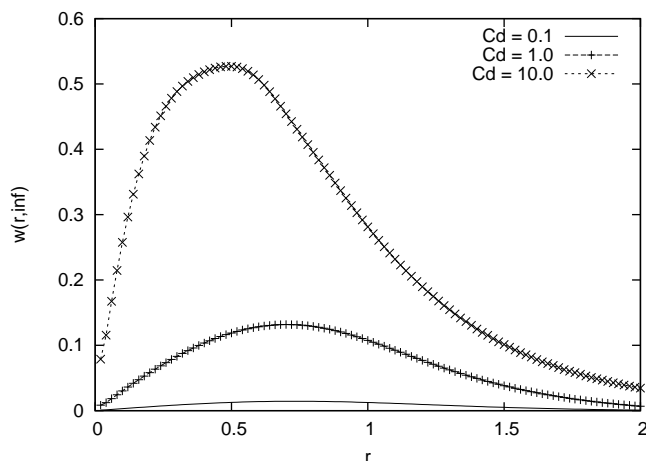


図 4.16: 抵抗係数  $C_d$  を 0.1 から 10.0 まで変えたときの, 境界層上端におけるエクマンパンピング速度の動径分布  $w(r, \infty)$ . 実線が  $C_d = 0.1$  の場合, + 付きの破線が  $C_d = 1.0$  の場合, × 付き点線が  $C_d = 10.0$  の場合を意味する.  $\varepsilon = 2.0$ .

## 第5章 結論

本論文では、自由大気が軸対象な円形渦を持つ場合の境界層における非線形エクマンポンピング速度を数値的に求めた。自由大気の世界場として、空間一方向にのみ依存し、滑らかに変化する速度場を与え、また、境界層の下端の境界条件には、粘着条件と、すべり境界条件を与えた。非線形項の大きさを表す無次元パラメータであるロスビー数は、現実の台風の風速分布から得られる程度までの大きさを持つ場合にたいして計算結果を得た。また、すべり境界条件としては、応力が水平風速の一乗に比例する場合と、二乗に比例する場合の計算を、それぞれ行った。

粘着境界条件を与えた場合には、Hart(2000) や Ishida and Iwayama(2006) など、過去の研究でも指摘されているように、ロスビー数が大きくなるごとにエクマンポンピング速度は減少していく傾向にある。しかしながら、全ての動径距離において一様にエクマンポンピング速度が小さくなるわけではなく、 $r \lesssim 0.5$  の中心軸付近の領域のみで、このポンピング速度の減少傾向が著しい。中心軸からある程度離れた、 $r \gtrsim 0.5$  の領域では、ロスビー数を大きくしてもポンピング速度はほとんど変化しない。ロスビー数を大きくしていくごとに、中心付近でのみ鉛直速度が減少し続け、ロスビー数が2を超えたあたりから、中心軸付近の鉛直速度の大きさが  $r = 0.5$  付近の鉛直速度の大きさよりも小さくなってしまふ。したがって、中心軸で極小、中心から少し離れたところで最大となる鉛直速度の水平分布が得られた。

有次元量で考えると、自由大気の接線風速における最大風速半径の半分程度のところで、エクマンポンピング速度が最大値をとる。台風の眼は約 20 ~ 50km 程度の半径をもち、そこでは鉛直風速は弱く、しばしば下降流となる場合がある。また、台風の周囲を巡る接線風速は約 50 ~ 100km 程度の半径で最大となる。したがってこの鉛直風速の分布は、本論文で示した鉛直風速の分布とよく似ているといえる。

過去の研究では、下端境界に粘着境界条件を課した場合には円形渦によって駆動されるエクマンポンピング速度は、渦の中心軸で最大であると指摘され、したがっ

---

て、台風之眼の形成に必要な鉛直風速分布はエクマンパンピングによって得る事ができないとされていた。しかしながらこれは、過去の研究においては、設定されていたロスビー数が台風之状況を記述するには極めて小さかったためである。ロスビー数を適切な値に設定することにより、台風之眼の形成に必要な鉛直風速分布に近いエクマンパンピング速度が得られることを、本論文では指摘する。

## 謝辞

本論文の執筆にあたり、岩山隆寛准教授には、長期に渡って公私共に、暖かいご指導を頂き、言葉に尽くせないほど感謝しております。また、山中大学教授、林祥介教授、はしもとじょーじ助教には、数々の有益なアドバイスを頂きました。また、神戸大学自然科学研究科、地球及び惑星大気科学研究室に所属する、博士課程、研究員の先輩方には、数多くのご教示を頂きました。また、神戸大学自然科学研究科、宇宙科学研究所所属 COE 研究員、今枝佑輔氏に頂いた数値計算に関するアドバイスのおかげで、大幅に精度が向上した事についても感謝を述べたいと思います。その他にも、非常に多くの方から支えていただきましたこと、感謝しております。みなさま、どうもありがとうございました。

---

## 参考文献

A. Eliassen, (1971) : On the Ekman Layer in a circular Vortex. *J. Meteor. Soc. Jpn.* , **49** , 784.

J. E. Hart, (2000) : A note on nonlinear corrections to the Ekman layer pumping velocity. *Phys. Fluids* , **12** , 131.

S. Ishida and T. Iwayama, (2006) : A Comprehensive Analysis of Nonlinear Corrections to the Classical Ekman Pumping. *J. Meteor. Soc. Jpn.* , **84**, 839.

P. R. Bannon, (1998) : A Comparison of Ekman Pumping in Approximate Models of the Accelerating. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 1446.

R. S. Lindzen and H.-L. Kuo, (1969) : A Reliable Method for the Numerical Integration of a Large Class of Ordinary and Partial Differential Equations. *Mon. Wea. Rev.* , **97**, 732.

K. Ooyama, (1969) : Numerical Simulation of the Life Cycle of Tropical Cyclones. *J. Atmos. Sci.* , **26** , 3.

H. P. Greenspan and L. N. Howard, (1963) : On a time-dependent motion of a rotating fluids. *J. Fluids Mech.* , **17**, 385.

M. Yamasaki, (1968) : Numerical Simulation of Tropical Cyclone Development with the Use of Primitive Equations. *J. Meteor. Soc. Jpn.* , **46**, 178.

R. Wu and W. Blumen, (1982) : An analysis of Ekman boundary layer dynamics incorporating the geostrophic momentum approximation. *J. Atmos. Sci.* , **39**, 1774.

D. W. Denbo and J. S. Allen, (1983) : Mean flow generation on a continental margin by periodic wind forcing. *J. Phys. Oceanogr* , **13**, 78.

J. E. Hart, (1995) : Nonlinear Ekman suction and ageostrophic effects in rapidly rotating fluids. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* , **79** , 201.

J. Pedlosky, (1987) : *Geophysical Fluid Dynamics, 2nd. ed.* Springer.

J. M. Wallace and P. V. Hobbs, (2006) : *Atmospheric Science, 2nd. ed.* Academic Press.

山岬 正紀, (1982) : 台風 , 東京堂出版 , 200 pp .

巽 友正, (1982) : 流体力学 , 培風館 , 444 pp .

## 付録 A 数値計算の手法について

この章では、本研究で用いた数値計算の手法を紹介する。

### A.1 Lindzen and Kuo(1969)の手法

まず初めに、Lindzen and Kuo(1969)の手法を紹介する。ここで紹介する手法は線形常微分方程式の境界値問題を解く手法であり、そのレビューからはじめる。

#### A.1-1 二階線形常微分方程式

ここでは、二階線形常微分方程式、

$$\frac{d^2u}{dx^2} + g(x)\frac{du}{dx} + h(x)u = r(x) \quad (\text{A.1.1})$$

を、 $0 < x < L$ の範囲において解くことを考える。用いる境界条件は、

$$\text{at } x = L, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + a_t u = b_t, \quad (\text{A.1.2})$$

$$\text{at } x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + a_b u = b_b \quad (\text{A.1.3})$$

とする。

方程式系 (A.1.1)–(A.1.3) を有限差分法によって離散化する。0 から  $L$  までの区間を  $N$  等分し、空間を離散化する。すなわち、 $x = 0$  を 0 番目の点とし、 $x = L$  を  $N$  番目の点とする。  $x$  や  $u$  になどの量に付す添え字  $n$  は、 $n$  番目の格子点における量



である事を表す. 差分には中央差分近似を用いるので, 中央差分近似について復習しておく. まず, テイラー展開を用いて,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u(x + \delta x) = u_n + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x^2 + \dots, \\ u_{n-1} &= u(x - \delta x) = u_n - \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x^2 - \dots. \end{aligned}$$

上式を辺々足し引きすると,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_{n-1} &= 2\delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}(\delta x^3), \\ u_{n+1} + u_{n-1} &= 2u_n + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^4). \end{aligned}$$

よって, 求める差分近似式,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\simeq \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\delta x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\simeq \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\delta x^2} \end{aligned}$$

を得る. これらの精度は両方とも  $\delta x^2$  のオーダーである.

中央差分近似を用いて式 (A.1.1) を離散化すると,

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\delta x^2} + g(x_n) \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\delta x} + h(x_n)u = r(x_n),$$

したがって,

$$\begin{aligned} A_n u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} &= D_n, \\ n &= 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{A.1.4}$$

ただし,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\delta x^2} - \frac{g(x_n)}{2\delta x}, \\ B_n &= -\frac{2}{\delta x^2} + h(x_n), \\ C_n &= \frac{1}{\delta x^2} + \frac{g(x_n)}{2\delta x}, \\ D_n &= r(x_n). \end{aligned}$$

ここで  $\delta x$  は, 有限差分近似において用いた格子点間隔である. 方程式 (A.1.4) の解は, Richtmyer(1957) によると, 新しい変数  $\alpha_n$  と  $\beta_n$  を用いて以下のように書ける:

$$u_n = \alpha_n u_{n+1} + \beta_n, \tag{A.1.5}$$

式 (A.1.5) を  $n - 1$  に対して適用すると,

$$u_{n-1} = \alpha_{n-1}u_n + \beta_{n-1} \quad (\text{A.1.6})$$

となる. 方程式 (A.1.6) を式 (A.1.4) に代入すると,

$$\begin{aligned} A_n(\alpha_{n-1}u_n + \beta_{n-1}) + B_nu_n + C_nu_{n+1} &= D_n, \\ (A_n\alpha_{n-1} + B_n)u_n &= -C_nu_{n+1} + D_n - A_n\beta_{n-1}, \\ u_n &= -\frac{C_n}{A_n\alpha_{n-1} + B_n}u_{n+1} + \frac{D_n - A_n\beta_{n-1}}{A_n\alpha_{n-1} + B_n}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

を得る. 式 (A.1.7) と (A.1.5) を比較することで,

$$\alpha_n = -\frac{C_n}{A_n\alpha_{n-1} + B_n}, \quad (\text{A.1.8})$$

$$\beta_n = \frac{D_n - A_n\beta_{n-1}}{A_n\alpha_{n-1} + B_n}, \quad (\text{A.1.9})$$

という  $\alpha_n$  と  $\beta_n$  についての漸化式が得られる.

$\alpha_0, \beta_0$  を決定するために, まず,  $x = 0$  での境界条件式 (A.1.3) を前方差分によって離散化すると,

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - u_0}{\delta x} + a_b u_0 &= b_b, \\ \left(a_b - \frac{1}{\delta x}\right)u_0 + \frac{1}{\delta x}u_1 &= b_b, \\ u_0 &= -\frac{1}{a_b\delta x - 1}u_1 + \frac{b_b\delta x}{a_b\delta x - 1}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

一方, 式 (A.1.5) は  $n = 0$  のとき,

$$u_0 = \alpha_0u_1 + \beta_0$$

である. これらを比較すると,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{a_b\delta x - 1}, \quad (\text{A.1.11})$$

$$\beta_0 = \frac{b_b\delta x}{a_b\delta x - 1}. \quad (\text{A.1.12})$$

$\alpha_0, \beta_0$  が決定できたので, 漸化式 (A.1.8), (A.1.9) から, 全ての  $\alpha_n$  と  $\beta_n$  を求める事ができる.

さらに,  $x = L$  での境界条件式 (A.1.2) について, 後方差分によって離散化を行うと,

$$\begin{aligned} \frac{u_N - u_{N-1}}{\delta x} + a_t u_N &= b_t, \\ -\frac{1}{\delta x} u_{N-1} + \left( a_t + \frac{1}{\delta x} \right) u_N &= b_t, \\ u_{N-1} &= (a_t \delta x + 1) u_N - b_t \delta x. \end{aligned} \tag{A.1.13}$$

一方, (A.1.5) を  $N - 1$  に対して適用すると,

$$u_{N-1} = \alpha_{N-1} u_N + \beta_{N-1}. \tag{A.1.14}$$

式 (A.1.13) を (A.1.14) に代入すると,

$$\begin{aligned} (a_t \delta x + 1) u_N - b_t \delta x &= \alpha_{N-1} u_N + \beta_{N-1}, \\ (a_t \delta x + 1 - \alpha_{N-1}) u_N &= b_t \delta x + \beta_{N-1}, \\ u_N &= \frac{b_t \delta x + \beta_{N-1}}{a_t \delta x - \alpha_{N-1} + 1}, \end{aligned} \tag{A.1.15}$$

となる. 式 (A.1.15) のように  $u_N$  が与えられたので,  $\alpha_n, \beta_n$  と, 漸化式 (A.1.5) を用いて,  $N$  番目の点から 0 番目の点まで順繰りに, 全ての  $u_n$  を決定する事が出来る. この手順は, 全ての  $n$  に対して,

$$A_n \alpha_{n-1} + B_n \neq 0$$

であることをみたますれば妥当であると考えられる.

## A.1-2 二階連立線形常微分方程式

Lindzen and Kuo では二階の常微分方程式を解く手法を応用し, 高階の常微分方程式を解く方法を紹介しているが, ここでは続いて, 彼らの方法を少しだけ拡張して, 二階の常微分方程式を二本連立させた式を解くことを考える. なお, 連立常微分方程式を変数遞減し, 高階の常微分方程式に変形させる事で, Lindzen and Kuo の方法をより直接的に利用する事も可能ではあるが, 行う操作はほとんど変わらないため, ここではそれを紹介する事はしない.

例えば, 以下のような方程式を考える:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + g_1(x) \frac{dv}{dx} + h_1(x)v = r_1(x), \\ \frac{d^2v}{dx^2} + g_2(x) \frac{du}{dx} + h_2(x)u = r_2(x). \end{cases}$$

これは行列とベクトルを用いて,

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \bar{g} \frac{d\mathbf{u}}{dx} + \bar{h}\mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (\text{A.1.16})$$

と書き表される. ここで,  $\mathbf{u}, \mathbf{r}$  のような太字の文字は二次元の列ベクトルを,  $\bar{g}, \bar{h}$  のようなバー付の文字は  $2 \times 2$  の行列を, それぞれ意味し, 具体的には以下の通りである:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u, v)^T, \\ \bar{g} &= \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{h} &= \begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r} &= (r_1, r_2)^T. \end{aligned}$$

ただし,  $(u, v)^T$  などのように表したこの上付き添え字  $T$  は転置ベクトルを取る事を示す記号である. 境界条件として,

$$\text{at } x = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dx} + \bar{a}_b \mathbf{u} = \mathbf{b}_b, \quad (\text{A.1.17})$$

$$\text{at } x = L, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dx} + \bar{a}_t \mathbf{u} = \mathbf{b}_t \quad (\text{A.1.18})$$

を課した状況で (A.1.16) を解くことを考える.

初めに (A.1.16) に中央差分近似を適用して, 以下を得る:

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\delta x^2} + \bar{g}_n \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\delta x} + \bar{h}_n \mathbf{u}_n = \mathbf{r}_n.$$

したがって,

$$\bar{A}_n \mathbf{u}_{n-1} + \bar{B}_n \mathbf{u}_n + \bar{C}_n \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{D}_n. \quad (\text{A.1.19})$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N - 1.$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_n &= \frac{1}{\delta x^2} \bar{I} - \frac{1}{2\delta x} \bar{g}_n, \\ \bar{B}_n &= -\frac{2}{\delta x^2} \bar{I} + \bar{h}_n, \\ \bar{C}_n &= \frac{1}{\delta x^2} \bar{I} + \frac{1}{2\delta x} \bar{g}_n, \\ \mathbf{D}_n &= \mathbf{r}_n.\end{aligned}$$

ここで  $\bar{I}$  は、 $2 \times 2$  の単位行列を意味する。(A.1.19) の解は、

$$\mathbf{u}_n = \bar{\alpha}_n \mathbf{u}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}_n \quad (\text{A.1.20})$$

となる。

式 (A.1.20) を  $n - 1$  に適用すると、

$$\mathbf{u}_{n-1} = \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{u}_n + \boldsymbol{\beta}_{n-1}. \quad (\text{A.1.21})$$

式 (A.1.21) を (A.1.19) に代入すると、

$$\begin{aligned}\bar{A}_n \{ \bar{\alpha}_{n-1} \mathbf{u}_n + \boldsymbol{\beta}_{n-1} \} + \bar{B}_n \mathbf{u}_n + \bar{C}_n \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{D}_n, \\ (\bar{A}_n \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{B}_n) \mathbf{u}_n &= -\bar{C}_n \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{D}_n - \boldsymbol{\beta}_{n-1}, \\ \mathbf{u}_n &= -(\bar{A}_n \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{B}_n)^{-1} \bar{C}_n \mathbf{u}_{n+1} + (\bar{A}_n \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{B}_n)^{-1} (\mathbf{D}_n - \boldsymbol{\beta}_{n-1})\end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

となる。(A.1.22) と (A.1.20) を比較して、

$$\bar{\alpha}_n = -(\bar{A}_n \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{B}_n)^{-1} \bar{C}_n, \quad (\text{A.1.23})$$

$$\boldsymbol{\beta}_n = (\bar{A}_n \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{B}_n)^{-1} (\mathbf{D}_n - \boldsymbol{\beta}_{n-1}) \quad (\text{A.1.24})$$

を得る。

$\bar{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n$  を決定するために、まず、 $x = 0$  での境界条件式 (A.1.17) を前方差分によって離散化すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0}{\delta x} + \bar{a}_b \mathbf{u}_0 &= \mathbf{b}_b, \\ \left( \bar{a}_b - \frac{1}{\delta x} \bar{I} \right) \mathbf{u}_0 + \frac{1}{\delta x} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{b}_b, \\ \mathbf{u}_0 &= -(\bar{a}_b \delta x - \bar{I})^{-1} \mathbf{u}_1 + (\bar{a}_b \delta x - \bar{I})^{-1} \mathbf{b}_b \delta x.\end{aligned} \quad (\text{A.1.25})$$

一方, (A.1.20) を  $x = 0$  に対して適用すると,

$$\mathbf{u}_0 = \bar{\alpha}_0 \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\beta}_0$$

である. これらを比較すると,

$$\bar{\alpha}_0 = -(\bar{a}_b \delta x - \bar{I})^{-1}, \quad (\text{A.1.26})$$

$$\boldsymbol{\beta}_0 = (\bar{a}_b \delta x - \bar{I})^{-1} \mathbf{b}_b \delta x. \quad (\text{A.1.27})$$

$\bar{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0$  が決定できたので, 漸化式 (A.1.23), (A.1.24) から, 全ての  $\alpha_n$  と  $\beta_n$  を求める事ができる.

求めた全ての  $\bar{\alpha}_n, \beta_n$  から, (A.1.20) を用いて,  $\mathbf{u}_n$  を決定するためには,  $x = L$  での境界条件を利用すればよい. まず,  $x = L$  での境界条件式 (A.1.18) を後方差分を用いて離散化すると,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N-1}}{\delta x} + \bar{a}_t \mathbf{u}_N &= \mathbf{b}_t, \\ -\frac{1}{\delta x} \mathbf{u}_{N-1} + \frac{1}{\delta x} (\bar{a}_t \delta x + \bar{I}) \mathbf{u}_N &= \mathbf{b}_t, \\ \mathbf{u}_{N-1} &= (\bar{a}_t \delta x + \bar{I}) \mathbf{u}_N - \mathbf{b}_t \delta x \end{aligned} \quad (\text{A.1.28})$$

一方, (A.1.20) を  $N - 1$  に対して適用して,

$$\mathbf{u}_{N-1} = \bar{\alpha}_{N-1} \mathbf{u}_N + \boldsymbol{\beta}_{N-1} \quad (\text{A.1.29})$$

を得る. これを (A.1.29) に代入すると,

$$\begin{aligned} (\bar{a}_t \delta x + \bar{I}) \mathbf{u}_N - \mathbf{b}_t \delta x &= \bar{\alpha}_{N-1} \mathbf{u}_N + \boldsymbol{\beta}_{N-1}, \\ (\bar{a}_t \delta x + \bar{I} - \bar{\alpha}_{N-1}) \mathbf{u}_N &= \mathbf{b}_t \delta x + \boldsymbol{\beta}_{N-1}, \\ \mathbf{u}_N &= (\bar{a}_t \delta x - \bar{\alpha}_{N-1} + \bar{I})^{-1} (\mathbf{b}_t \delta x + \boldsymbol{\beta}_{N-1}). \end{aligned} \quad (\text{A.1.30})$$

となり  $\mathbf{u}_n$  を決定する事ができる. したがって,  $\bar{\alpha}_n, \beta_n$  と, 漸化式 (A.1.20) を用いて  $N$  番目の点から  $0$  番目の点まで, 順繰りに全ての  $\mathbf{u}_n$  を求める事が出来る.

## A.2 エクマンパンピングの数値計算

ここから、実際に行った計算についてその方法を述べる。本研究では、エクマンパンピングを支配する方程式として直線流の場合 (2.1.1)–(2.1.3), および円形流の場合 (2.2.1)–(2.2.3) を解くが、その為の手法としては、直線流の場合と円形流の場合に差はないので、ここでは直線流の場合の支配方程式を解く手法を紹介する。直線流の場合の支配方程式 (2.1.1)–(2.1.3) を再掲する:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2v = 2\varepsilon \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial s} \right], \quad (\text{A.2.1})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2u = 2\varepsilon \left[ u \frac{\partial(V+v)}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial s} \right], \quad (\text{A.2.2})$$

$$w = - \int_0^s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds. \quad (\text{A.2.3})$$

初めに、ロスビー数  $\varepsilon \ll 1$  として得られる線形エクマンパンピングを、下端に粘着境界条件を与えた場合に計算する方法を、続いて、ロスビー数  $\varepsilon$  を有限の値として得られる非線形エクマンパンピングを求める方法を述べる。最後に、境界条件として二種類のすべり境界条件を課した場合の計算法について述べる。

## A.3 線形エクマンパンピングの計算

ここでは (A.2.1)–(A.2.3) について、 $\varepsilon \ll 1$  とした場合の方程式,

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + 2v = 0, \quad (\text{A.3.4})$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - 2u = 0, \quad (\text{A.3.5})$$

$$w = - \int_0^s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) ds \quad (\text{A.3.6})$$

を、粘着境界条件,

$$\text{at } s = 0, \quad u = 0, \quad v + V = V, \quad (\text{A.3.7})$$

$$\text{at } s = L, \quad u = 0, \quad v + V = 0 \quad (\text{A.3.8})$$

のもとで, Lindzen and Kuo の方法を用いて解く方法について, 大まかに述べる.  
(A.3.4) と (A.3.5) を行列と列ベクトルを用いて書き換えると,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} + \bar{g} \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A.3.9})$$

$$\mathbf{u} = (u, v)^T, \\ \bar{g} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. (A.3.9) に対して, Lindzen and Kuo の方法に基づいて離散化を行うと,

$$\bar{A} \mathbf{u}_{n-1} + \bar{B} \mathbf{u}_n + \bar{C} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{D}, \quad (\text{A.3.10})$$

$$\bar{A} = \frac{1}{\delta s^2} \bar{I}, \\ \bar{B} = -\frac{2}{\delta s^2} \bar{I} + \bar{g}, \\ \bar{C} = \frac{1}{\delta s^2}, \\ \mathbf{D} = (0, 0)^T.$$

ここで  $\delta s$  は差分近似に用いた, 格子点間隔である.

(A.3.10) の解として,

$$\mathbf{u}_n = \bar{\alpha}_n \mathbf{u}_{n+1} + \beta_n \quad (\text{A.3.11})$$

と推定すると, 前節での結果を用いて,

$$\bar{\alpha}_n = -(\bar{A}_n \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{B}_n)^{-1} \bar{C}_n, \quad (\text{A.3.12})$$

$$\beta_n = (\bar{A}_n \bar{\alpha}_{n-1} + \bar{B}_n)^{-1} (\mathbf{D}_n - \beta_{n-1}) \quad (\text{A.3.13})$$

式 (A.3.11) を  $x = 0$  に対して適用すると,

$$\mathbf{u}_0 = \bar{\alpha}_0 \mathbf{u}_1 + \beta_0. \quad (\text{A.3.14})$$

また, 下端の境界条件式 (A.3.8) から,

$$\mathbf{u}_0 = (0, -V)^T. \quad (\text{A.3.15})$$



となるので,

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_0 &= 0, \\ \beta_0 &= (0, -V)^T\end{aligned}$$

を得る事ができる. したがって, (A.3.12), (A.3.13) から, 全ての  $\bar{\alpha}_n, \beta_n$  を決定する事ができる. さらに, 上端の境界条件式 (A.3.7) から,  $\mathbf{u}_N = (0, 0)^T$  となるので, 先に求めた  $\bar{\alpha}_n, \beta_n$  をもとに, (A.3.11) を用いて, 全ての  $\mathbf{u}_n$  を決定する事が出来る. 求めた  $\mathbf{u}_n$  を (A.3.6) に代入し  $w_n$  を求める. このとき積分には Simpson の台形公式を用いた.

粘着境界条件のもとでの線形エクマンパンピングは解析的に解く事ができる. この解析解は,

$$u = -Ve^{-s} \sin s, \quad (\text{A.3.16a})$$

$$v = -Ve^{-s} \cos s, \quad (\text{A.3.16b})$$

$$w = \frac{1}{2} \frac{dV}{dx} \{1 - e^{-s}(\cos s + \sin s)\} \quad (\text{A.3.16c})$$

となる. この解と, 実際に数値計算を行った結果を図 A.1 に示す. 図 A.1 をみると, 数値解と解析解の間に有意な差は見られず, Lindzen and Kuo の方法を用いて, 線形エクマンパンピングが正しく計算されていると言える.

## A.4 非線形エクマンパンピング

つづいて, 非線形エクマンパンピングの計算について記述する.  $\varepsilon$  が有限な値であるとしたときには, (A.2.1)–(A.2.2) の右辺に, 移流項が残る. この場合は, 緩和法を用いることで数値計算を行う事ができる. まず, 方程式 (A.2.1)–(A.2.3) を行列と列ベクトルを用いて,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} + \bar{g} \mathbf{u} = \mathbf{h}, \quad (\text{A.4.1a})$$

$$w = - \int_0^s \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) ds. \quad (\text{A.4.1b})$$

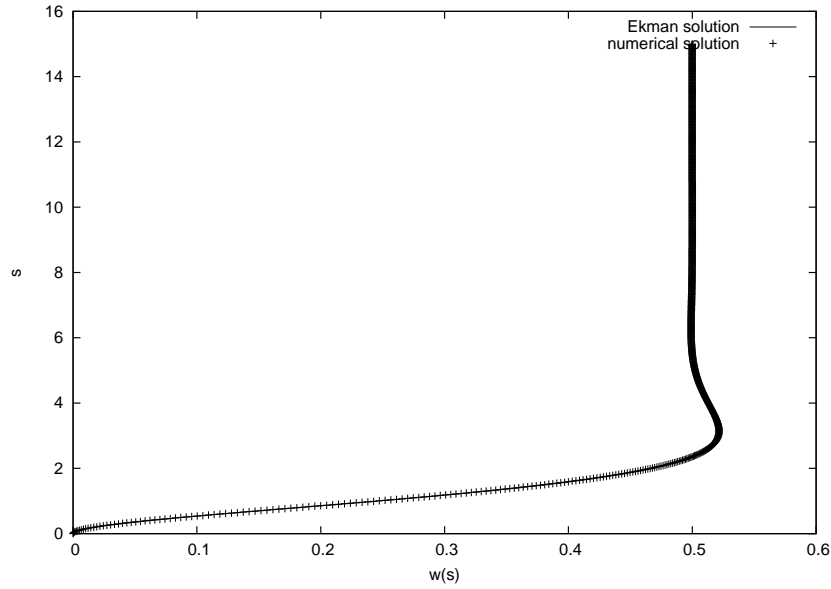


図 A.1: 粘着境界条件のもとでの、線形エクマンポンピングの数値解と解析解の比較. 実線が (A.3.16c) で表される  $w(s)$  の解析解. + が  $w(s)$  の数値解. 縦軸は鉛直座標  $s$ , 横軸が  $w(s)$  である.

$$\mathbf{u} = (u, v)^T, \quad (\text{A.4.1c})$$

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.1d})$$

$$\mathbf{h} = 2\varepsilon \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial s}, u \frac{\partial(V+v)}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial s} \right)^T. \quad (\text{A.4.1e})$$

と書けるとする. つまり, 移流項を全て非斉次項として扱う.

つぎに,  $\mathbf{h} = 0$  として得られる解析解 (A.3.16), すなわち,

$$u^{(0)} = -V e^{-s} \sin s, \quad (\text{A.4.2})$$

$$v^{(0)} = -V e^{-s} \cos s, \quad (\text{A.4.3})$$

$$w^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dx} \{1 - e^{-s} (\cos s + \sin s)\} \quad (\text{A.4.4})$$

を繰り返しの 0 回目の解とする. ここで, 上付き添え字  $i$  は繰り返し回数を意味する. 第一回目の計算に用いる  $\mathbf{h}^{(1)}$  は,

$$\mathbf{h}^{(1)} = 2\varepsilon \left( u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + w^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial s}, u^{(0)} \frac{\partial(V+v^{(0)})}{\partial x} + w^{(0)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial s} \right) \quad (\text{A.4.5})$$

とする。したがって繰り返し回数  $i = n$  回目には,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial s^2} + \bar{g} \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{h}^{(n)}, \quad (\text{A.4.6})$$

$$w^{(n)} = - \int_0^s \left( \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \right) ds. \quad (\text{A.4.7})$$

$$\mathbf{h}^{(n)} = \left( u^{(n-1)} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x} + w^{(n-1)} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial s}, u^{(n-1)} \frac{\partial (V + v^{(n-1)})}{\partial x} + w^{(n-1)} \frac{\partial v^{(n-1)}}{\partial s} \right), \quad (\text{A.4.8})$$

となる。この繰り返しを,  $\mathbf{u}^{(n)}, w^{(n)}$  と  $\mathbf{u}^{(n-1)}, w^{(n-1)}$  との間に差がなくなるまで行い,  $\mathbf{u}^{(n)}, w^{(n)}$  を非斉次微分方程式 (A.2.1)–(A.2.3) の解とする。

方程式系 (A.4.1) にたいして, 粘着境界条件 (A.3.7)–(A.3.8) を課し,  $V = x \exp(-x^2/2)$ ,  $\varepsilon = 0.5$  という条件のもと, ここで紹介した数値計算法によって解いた結果を図 A.2 に示した。繰り返しが 0 回から 10 回までは,  $\varepsilon$  を少しずつ大きくしていき, より滑らかに収束が起こるように工夫をしている。その後繰り返しが 10 回から以降は,  $\varepsilon = 0.5$  を与えて, 計算している。また, より大きなロスビー数の場合には,  $\mathbf{u}^{(n+1)} = a\mathbf{u}^{(n+1)} + (1-a)\mathbf{u}^{(n)}$  と, 重み付き平均を用いて安定に収束した解が得られるような工夫を行ったことも付け加えておく。

#### A.4-1 すべり境界条件を与えた非線形エクマンポンピングの計算

本論文では, 下端に与える境界条件として, 粘着境界条件, 一次すべり境界条件, 二次すべり境界条件の三種類の境界条件を用いた非線形エクマンポンピングを計算している。このうち, 粘着境界条件を下端境界に適用する方法については, A.3 にて記述したので, 一次すべり境界条件を適用する方法と, 二次すべり境界条件を適用する方法について紹介する。

まず, 一次すべり境界条件とは,

$$\text{at } s = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial s} = C_d u, \\ \frac{\partial v}{\partial s} = C_d (v + V) \end{array} \right. \quad (\text{A.4.9})$$

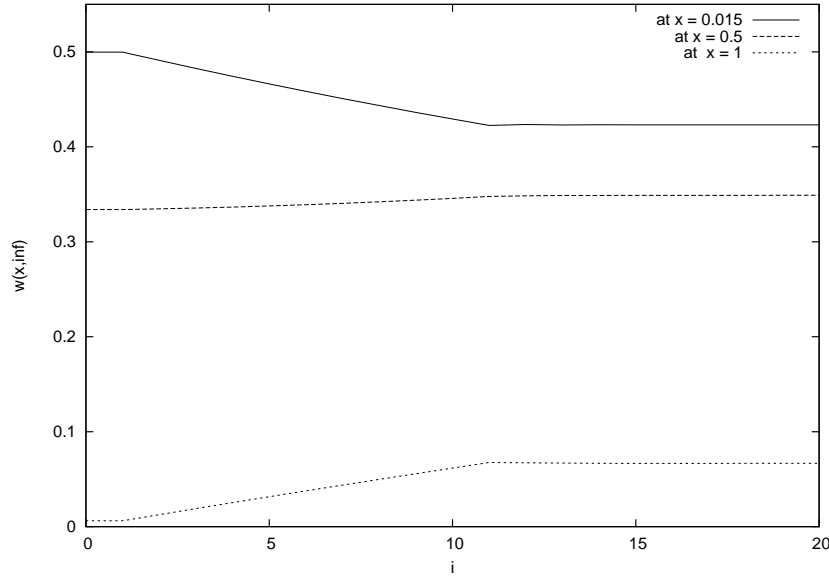


図 A.2: 非線形エクマンポンピングによって得られる境界層上端での鉛直速度の繰り返し回数による収束の様子. 横軸には繰り返し回数  $i$  を, 縦軸には境界層上端での鉛直速度  $w(x, \infty)$  をとった. 実線は  $x = 0.015$  におけるポンピング速度を, 破線は  $x = 0.5$  におけるポンピング速度を, 点線は  $x = 1$  におけるポンピング速度を意味する.

である. この条件式を前方差分によって離散化すると,

$$\frac{u_1 - u_0}{\delta s} = C_d u_0, \quad (\text{A.4.10})$$

$$-\left(\frac{1}{\delta s} + C_d\right) u_0 = -\frac{1}{\delta s} u_1, \quad (\text{A.4.11})$$

$$u_0 = \frac{1}{1 + C_d} u_1 \delta s \quad (\text{A.4.12})$$

$$\frac{v_1 - v_0}{\delta s} = C_d (v_0 + V), \quad (\text{A.4.13})$$

$$-\left(\frac{1}{\delta s} + C_d\right) u_0 = -\frac{1}{\delta s} v_1 + C_d V, \quad (\text{A.4.14})$$

$$u_0 = \frac{1}{1 + C_d} u_1 \delta s + \frac{C_d V \delta s}{1 + C_d \delta s} \quad (\text{A.4.15})$$

したがって, Lindzen and Kuo の方法に適用して,

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{1}{1 + C_d \delta s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4.16})$$

$$\beta_0 = \left(0, \frac{1}{1 + C_d} \delta s\right)^T. \quad (\text{A.4.17})$$

となる. よって, 全ての  $\bar{\alpha}_n, \beta_n$  を求める事ができ, さらに, 残りの境界条件と  $\bar{\alpha}_n, \beta_n$  を用いて,  $u_n$  を計算する事ができる.

続いて二次すべり境界条件とは,

$$\text{at } s = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial s} = C_d u V_s, \\ \frac{\partial v}{\partial s} = C_d (v + V) V_s. \end{array} \right. \quad (\text{A.4.18})$$

ただし,

$$V_s = \sqrt{u^2 + (v + V)^2}. \quad (\text{A.4.19})$$

この境界条件を用いるために問題となるのは,  $V_s$  が非線形であることである. したがって,  $V_s$  を緩和法を用いて一つ前の繰り返し時における  $u, v$  から求める. すなわち,  $i = n$  回目での計算における  $V_s$  を  $V_s^{(n)}$  として,

$$V_s^{(n)} = \sqrt{(u^{(n-1)})^2 + (v^{(n-1)} + V)^2} \quad (\text{A.4.20})$$

として計算を行う. この繰り返しを,  $u^{(n)}, w^{(n)}$  と  $u^{(n-1)}, w^{(n-1)}$  との間に差がなくなるまで行い,  $u^{(n)}, w^{(n)}$  を下端に二次すべり境界条件を課した非斉次微分方程式 (A.2.1)–(A.2.3) の解とする.