本計算によって得られた結果から赤道ジェットの幅[1]を目算で測ったところ, その緯度幅は $0.97242(\tau_{rad}L_D^2)^{0.247345}$ に比例していた. 目測であるため誤差を含むと考えても, およそ $1(\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}$ 程度に比例すると考えられる[2]. この $\tau_{rad}L_D^2$ 依存性をポテンシャル渦度方程式から導く.

まず, 本研究で用いられた方程式系から導いたポテンシャル渦度方程式を再掲する[3].

$$\frac{dq}{dt} \sim \frac{\psi}{\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2} + F.$$

今回は摩擦を考慮していないため, 摩擦項は除いている. この方程式から依存性を導いていく. まず, 各項の空間スケールを考える. ジェットの幅はおよそ 0.5 惑星半径程度, 対して強制のスケールは 0.1 惑星半径程度である. よって大スケールにおいては強制項を無視して考える. 大スケールにおいては移流項が無視できると考えると, このとき, およそ以下のバランスが成り立っているはずである.

$$\frac{\partial q}{\partial t} \sim \frac{\psi}{\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}.$$

また, y 方向のスケールは L_D に比べて小さい[4]として, $q \sim \nabla^2\psi$ とすると, 以下のようになる.

$$\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t} \sim \frac{\psi}{\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}.$$

これが, 大スケールにおける釣り合いを表す微分方程式である. ここでこの微分方程式の形から, ψ を以下のように仮定する.

---

[1] 東向きジェットが最も弱くなる, つまり西向きジェットが最も強くなるところから赤道を挟んで反対側まで.

[2] これを機械的に取る方法は 2 つ. 1 つは最低値を取る緯度を機械的に測って絶対値を取って 2 倍にする. これはジェットが中心からずれている場合は使えない. もう 1 つは両側の最低値を取って緯度を差し引く方法. これはどのような場合であっても使えそう. ただしちょっとスクリプト書くのがめんどくさい.

[3] 本ノートでの L_D は $L_D = \frac{\sqrt{gH}}{2\Omega}$ である. ポテンシャル渦度方程式の導出に用いた L_D(L'_D とする) は $L'_D = \frac{\sqrt{gH}}{f} = \frac{\sqrt{gH}}{2\Omega\sin\theta}$ であるため, $L_D = \sin\theta L'_D$ であることに注意. 実際の計算においては L'_D ではなくこのノートの L_D をパラメータとして振っている.

[4] 実際はあまりスケールが変わらないような気がする...

$$\psi \sim A \exp(i(ly + \omega t)).$$

ここで, l は複素数である [5]. これを元の式に代入して,

$$-i\omega l^2 \psi \sim \frac{\psi}{\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2},$$
$$l \sim \sqrt{\frac{i}{\omega\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}}.$$

l を実数部 l_1 と虚数部 l_2 に分けると,

$$l_1 \sim \sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}},$$
$$l_2 \sim \sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_{rad}(L_D/\sin\theta)^2}}.$$

以下では ψ の減衰スケール l_2^{-1} を考える. ジェットは赤道付近にあるため, $\sin\theta \sim \theta$ として,

$$l_2 \sim \sqrt{\frac{\theta^2}{2\omega\tau_{rad}L_D^2}}$$
$$\sim \theta\sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_{rad}L_D^2}}.$$

惑星半径 $a = 1$ を用いて $\theta = a\theta$ を考えると, θ は距離のスケールを表す. よってこれを減衰振動の波長だと考える. すると, 波長と波数の関係より $\theta = 1/l_2$ なので,

5) つまり, $l_1 = \Re[l], l_2 = \Im[l]$ とすると,

$$\psi \sim A\exp(-l_2 y)\exp(i(l_1 y + \omega t))$$

となり, 減衰振動を表している.

$$l_2^2\sqrt{\frac{1}{2\omega\tau_{rad}L_D^2}},$$
$$l_2^{-1}(2\omega\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}.$$

ここで, この ψ で表される波をロスビー波であると考える. β 面で考えた場合のロスビー波の分散関係式は以下で表される.

$$\omega = -\frac{\beta K}{K^2+L^2}.$$

K と L はそれぞれ x 方向, y 方向のロスビー波の波数である. およそ x 方向と y 方向には同程度の波数があると考えると,

$$\omega \sim \frac{\beta K}{2K^2}$$
$$\sim \frac{\beta}{2K}.$$

よって, これを元の式に代入して,

$$l_2^{-1}(\beta K^{-1}\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}.$$

これで, ロスビー波の減衰スケールを表す表式が求められた. K は計算結果の図から, およそ $K \sim 20/2\pi$ である. また, 赤道付近を考えるため, $\beta \sim 2\Omega = 2\cdot 2\pi = 4\pi$ である. これらを代入して,

$$l_2^{-1} \sim 1.40958066572(\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}$$

赤道ジェットの幅がおよそ $1(\tau_{rad}L_D^2)^{1/4}$ であり, これが赤道ロスビー波が高緯度域に伝搬しながら減衰していくスケールであると考えると, 1.5 倍ほどの値となってしまった.