第1章　初期渦度擾乱を仮定した地衡流調節問題

文章はあとで...

系の変数 (風速 $\boldsymbol{u} = (u, v)$, 浅水層の厚さ h) を基本場と擾乱場に分けて考える. 簡単のため, 基本場は静止状態であるとする. 微小量同士の乗算を無視すると, 擾乱場に関する f 面近似した強制消散の無い浅水系の基礎方程式は以下になる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' &= -g\frac{\partial h'}{\partial x}, \\
\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' &= -g\frac{\partial h'}{\partial y}, \\
\frac{\partial h'}{\partial t} + H\nabla \cdot \boldsymbol{u'} &= 0. \qquad \text{(a)}
\end{aligned}
$$

こから渦度と発散の式を導くと, 以下のようになる.

$$
\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + f\delta' = 0, \qquad \text{(b)}
$$

$$
\frac{\partial \delta'}{\partial t} - f\zeta' = -g\nabla^2 h'. \qquad \text{(c)}
$$

(a) 式を t で微分して,

$$
\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + H\frac{\partial \delta'}{\partial t} = 0.
$$

(c) 式を代入して,

$$
\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + H\left(f\zeta' - g\nabla^2 h'\right) = 0,
$$
$$
\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 h' - fH\zeta'.
$$

ここで, $c = \sqrt{gH}$ とした. 各項の大きさを比べると, 時間微分項は相対的に小さくなる. よって,

$$
c^2\nabla^2 h' \sim fH\zeta' \tag{d}
$$

がおよそ成り立つため, 時間微分が 0 とみなせるような場においては速度場はおよそ地衡風バランスしている.

この最終状態を得るまでの時間経過を考える. (a2) 式と (c2) 式より, 微小量同士の掛け算は 0 なので,

$$
\frac{d\zeta'}{dt} - \frac{f}{H}\frac{dh'}{dt} = 0,
$$
$$
\frac{d}{dt}\left(\zeta' - \frac{f}{H}h'\right) = 0.
$$

よって, $\zeta' - \frac{f}{H}h'$ は保存量である.

平衡状態の時の重力波のエネルギーの全運動エネルギーに対する比を考える. そのための準備として, まずは初期場として適当な渦度擾乱を与え, 系が平衡状態に達した時の浅水層の厚さの擾乱がどのように表わされるかを考える.

まず, 初期場として $h = H, \zeta = \zeta_0'(x, y)$ で表される場を考える. ζ_0' をフーリエ展開すると, 以下の様な形で表される.

$$
\zeta_0' = \int\int \tilde{\zeta'}_{0,k,l} e^{i(kx+ly)} dkdl.
$$

また, $k^2 + l^2 = K^2$ とする. このとき, 初期場のポテンシャル渦度は,

$$
\zeta' - \frac{f}{H}h' = \zeta_0'.
$$

定常状態を仮定してこれを式 (d) に代入すると,

$$c^2\nabla^2 h' - fH\zeta_0' - f^2 h'.$$

これを $h' = \int\int \tilde{h'}_{k,l} e^{i(kx+ly)} dkdl$ として波数展開して,

$$\begin{aligned}(-c^2K^2 - f^2)\tilde{h'}_{k,l} &= -fH\tilde{\zeta'}_{0,k,l},\\ \tilde{h'}_{k,l} &= \frac{fH}{c^2K^2+f^2}\tilde{\zeta}_{0,k,l}\\ &= \frac{Hf^{-1}}{L_D^2K^2+1}\tilde{\zeta}_{0,k,l}.\end{aligned}$$

ここで, $L_D = c/f$ を用いた. よって, h' は,

$$h' = \int\int \frac{Hf^{-1}}{L_D^2K^2+1}\tilde{\zeta}_{0,k,l} e^{i(kx,ly)} dkdl. \tag{e}$$

この h' を用いて平衡状態における系のポテンシャルエネルギーを求め, これを初期に与えた全エネルギーから差し引くことで, 運動エネルギーとして使われるエネルギーの総和を考える.

まず, 初期に与えたエネルギーを求めるため, $\zeta_0 = \nabla^2\psi_0$ として ψ_0 を求めると,

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi_0 &= \int\int \tilde{\zeta}_{0,k,l} e^{i(kx+ly)} dkdl,\\ \psi_0 &= \int\int \frac{1}{K^2}\tilde{\zeta}_{0,k,l} e^{i(kx+ly)} dkdl.\end{aligned} \tag{f}$$

運動エネルギーは $E_k = \frac{1}{2}\rho H|\boldsymbol{u}|^2 = \frac{1}{2}\rho H\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}$ で表わされるため, 初期に与えた全運動エネルギーは,

$$E_0 = E_{k0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int\int -\frac{\rho H}{2}K^{-2}\tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)} dkdl\right) dxdy.$$

また, ポテンシャルエネルギーは $E_p = \frac{1}{2}\rho g h'^2$ で表わされるため, 平衡状態におけるポテンシャルエネルギーは,

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int\int \frac{\rho g}{2}\left(\frac{Hf^{-1}}{L_D^2K^2+1}\right)^2 \tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)}dkdl\right)dxdy.$$

よって, 運動エネルギーとして使われるエネルギーの総和は,

$$\begin{aligned}E_k = E_0 - E_p &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int\int\left\{-\frac{\rho H}{2}K^{-2} - \frac{\rho g}{2}\left(\frac{Hf^{-1}}{L_D^2K^2+1}\right)^2\right\}\tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)}dkdl\right)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int\int -\frac{\rho H}{2}\frac{(L_D^2K^2+1)^2K^{-2}+L_D^2}{(L_D^2K^2+1)^2}\tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)}dkdl\right)dxdy.\end{aligned}$$

これで, 運動エネルギーとして使われる運動エネルギーの総和が求まった. ここでポテンシャル渦度の保存から, 平衡状態において残っている渦の運動エネルギーを考え, そこから重力波のエネルギーを考える.

ポテンシャル渦度保存の式を書き換えると $(\nabla^2 - L_D^{-2})\psi = Const.$ なので, 式 (f) より,

$$\psi = \int\int \frac{L_D^2}{K^2L_D^2+1}\tilde{\zeta}_{0,k,l}e^{i(kx+ly)}dkdl.$$

渦の運動エネルギーは,

$$E_{vor} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int\int -\frac{\rho H}{2}\frac{K^2L_D^4}{(L_D^2K^2+1)^2}\tilde{\zeta}_{0,k,l}^2 e^{2i(kx+ly)}dkdl\right)dxdy.$$

よって, 渦の運動エネルギーの全運動エネルギーに対する比は,

$$\frac{E_{vor}}{E_k} = \int\int \frac{K^4L_D^4}{(K^2L_D^2+1)^2+K^2L_D^2}dkdl.$$

よって, 重力波のエネルギーの全運動エネルギーに対する比は,

$$\frac{E_{grv}}{E_k} = \int\int \frac{3K^2L_D^2 + 1}{(K^2L_D^2 + 1)^2 + K^2L_D^2} dkdl.$$

$L_D^2K^2 \gg 1$ のとき, E_{grv}/E_k はおよそ L_D^{-2} に比例することになる. 今回の実験結果では L_D^{-3} に比例していたが, 平面と球面では状況が異なり, また自分が飛ばした重力波が惑星を 1 周してまた自分に影響をおよぼすので, これらの影響で一致していないのだと思われる.