

回転球面浅水強制乱流問題の定式化

竹広 真一

2015 年 7 月 2 日

目次

1	概要	2
2	支配方程式系	2
2.1	支配方程式系	2
2.2	渦度・発散を用いた支配方程式系	2
2.3	境界条件	4
3	水平離散化	5
4	時間積分	5
5	使用モジュールとその他の設定	7
6	Scott and Polvani (2008) および Saito and Ishioka (2015) の実験	8
7	参考文献	8

1 概要

この文書では、回転球面浅水強制乱流問題の定式化と数値計算のための離散化について記述する。

2 支配方程式系

ここでは支配方程式系と境界条件を記す。

2.1 支配方程式系

支配方程式系は回転系での球面浅水方程式系である。

2.2 渦度・発散を用いた支配方程式系

球面浅水方程式系を渦度と発散を用いて表した式はつぎのとおりである。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(f+\zeta)U}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(f+\zeta)V}{\partial \mu} - d_\zeta + F(\lambda, \mu, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(f+\zeta)V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(f+\zeta)U}{\partial \mu} - \nabla^2 [g(h+h_s) + E] - d_D, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(hU)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(hV)}{\partial \mu} - d_h, \quad (3)$$

各記号の定義は表 1 に示した。渦度 ζ と発散 D 、単位質量あたりの運動エネルギー E 、演算子 ∇^2 は以下のように定義される。

$$\zeta = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \mu}, \quad (4)$$

$$D = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \mu}, \quad (5)$$

$$E = \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)}, \quad (6)$$

$$\nabla^2 A = \frac{1}{a^2(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 A}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial A}{\partial \mu} \right]. \quad (7)$$

ここで A は任意のスカラーである. 流線関数 ψ と速度ポテンシャル χ を導入すると,

$$U = -\frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \quad (8)$$

$$V = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1-\mu^2}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \mu}, \quad (9)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad (10)$$

$$D = \nabla^2 \chi \quad (11)$$

と表される.

(1) 右辺の $F(\lambda, \mu, t)$ は渦度強制項である. その具体的な形は実験設定の節で記述する. d_ζ, d_D, d_h は角変数に対する散逸項を表している (下記参照).

後の時間積分スキームの構成のために, h を平均成分 $\bar{h}$ とそれからの擾乱 h' を用いて $h = \bar{h} + h'(\lambda, \mu, t)$ と表しておく,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(f+\zeta)U}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(f+\zeta)V}{\partial \mu} \\ & -d_\zeta + F(\lambda, \mu, t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} = & \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(f+\zeta)V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(f+\zeta)U}{\partial \mu} - \nabla^2 [g(h' + h_s) + E] \\ & -d_D \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(h'U)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial(h'V)}{\partial \mu} - \bar{h}D - d_h \quad (14)$$

散逸過程としてレイリー摩擦, ニュートン冷却および超粘性拡散を考慮する. その具体的な形は

$$d_\zeta = -\zeta/\tau_R + (-1)^{N_m-1} \nu_{N_m} (\nabla^2)^{N_m} \zeta, \quad (15)$$

$$d_D = -D/\tau_R + (-1)^{N_m-1} \nu_{N_m} (\nabla^2)^{N_m} D, \quad (16)$$

$$d_h = -h'/\tau_N + (-1)^{N_h-1} \kappa_{N_h} (\nabla^2)^{N_h} h', \quad (17)$$

ここで τ_R, τ_N はそれぞれレイリー摩擦およびニュートン冷却の時定数, N_m, N_h は流れ場および高度場に対する超粘性・拡散の次数, ν_{N_m}, κ_{N_m} は超粘性・拡散係数である.

記号	変数/物理定数
λ	経度
ϕ	緯度
μ	$\sin$ 緯度 ($\equiv \sin \phi$)
t	時間
u	経度方向流速
v	緯度方向流速
U	$u \cos \phi$
V	$v \cos \phi$
h	流体の全厚さ
ζ	渦度
D	発散
E	運動エネルギー
ψ	流線関数
χ	速度ポテンシャル
f	$2\Omega \sin \phi$
Ω	自転角速度
g	重力加速度
a	惑星半径
F	渦度強制
ν_m	水平粘性係数
κ_h	水平拡散係数
N_m	超粘性の次数 (水平ラプラシアン of 階数)
N_h	超拡散の次数 (水平ラプラシアン of 階数)

表 1: 変数, 物理定数の定義

2.3 境界条件

境界条件は緯度, 経度方向ともに周期境界条件である.

$$\zeta(\lambda + 2\pi, \phi) = \zeta(\lambda, \phi), \quad (18)$$

$$\zeta(\lambda, \phi + 2\pi) = \zeta(\lambda, \phi). \quad (19)$$

などと表される.

3 水平離散化

この節では方程式系の空間離散化について説明, プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する.

格子点を経度方向には等間隔, 緯度方向にはガウス緯度上に置き, 物理量 A を格子点上の値で定義したものを $A_{i,j}$ と表すことにする. 添字 i, j は格子点 (λ_i, μ_j) 上の値であることを示す.

$A_{i,j}$ に対する離散スペクトル変換を $\hat{A}_{m,n}$ であらわす. すなわち,

$$A_{i,j} = \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \hat{A}_{m,n}, \quad (20)$$

$$\hat{A}_{m,n} = \frac{1}{2I} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I A_{i,j} e^{-im\lambda_i} P_n^m(\mu_j) w_j, \quad (21)$$

支配方程式 (12), (13), (14), をスペクトル変換すると

$$\frac{\partial \hat{\zeta}_{m,n}}{\partial t} = - \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(f+\zeta)U}{\partial \lambda} \right]_{m,n} - \left[\frac{1}{a} \frac{\partial(f+\zeta)V}{\partial \mu} \right]_{m,n} - \widehat{d}_{\zeta,n,m} + \hat{F}_{n,m} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{D}_{m,n}}{\partial t} = & \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(f+\zeta)V}{\partial \lambda} \right]_{m,n} - \left[\frac{1}{a} \frac{\partial(f+\zeta)U}{\partial \mu} \right]_{m,n} \\ & - g \nabla^2 \hat{h}'_{m,n} - [\nabla^2 \{g\widehat{h}_s + E\}]_{m,n} - \widehat{d}_{D,n,m}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \hat{h}_{m,n}}{\partial t} = - \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(h'U)}{\partial \lambda} \right]_{m,n} - \left[\frac{1}{a} \frac{\partial(h'V)}{\partial \mu} \right]_{m,n} - \bar{h} \hat{D}_{m,n} - \widehat{d}_{h,n,m} \quad (24)$$

非線形項のスペクトル変換は, 格子点上での値を用いて非線形項を評価し, それをスペクトル変換する (変換法) を適用することにする.

散逸過程のスペクトル表現は,

$$\widehat{d}_{\zeta,m,n} = -\nu_{m,n} \hat{\zeta}_{m,n}, \quad \widehat{d}_{D,m,n} = -\nu_{m,n} \hat{D}_{m,n}, \quad \widehat{d}_{h,m,n} = -\kappa_{m,n} \hat{h}'_{m,n}, \quad (25)$$

$$\nu_{m,n} = 1/\tau_R + \nu_{N_m} [n(n+1)]^{N_m}, \quad \kappa_{m,n} = 1/\tau_N + \kappa_{N_m} [n(n+1)]^{N_m}. \quad (26)$$

4 時間積分

ここでは時間積分法について記述し, プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する. 以下では Δt を時間格子間隔, 時刻 $t, t + \Delta t$ における $\hat{\zeta}_{m,n}$ の値をそ

それぞれ $\hat{\zeta}_{m,n}^\tau, \hat{\zeta}_{m,n}^{\tau+1}$ 等と表す.

時間積分の数値スキームとして, 散逸項にはクランク・ニコルソン法, それ以外の項を 4 次のルンゲ・クッタ法を組み合わせる用いる場合の定式化を行なう.

まず強制項を陽解法 (オイラースキーム) により積分する.

$$\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt} = \hat{F}_{n,m}(t) \quad (27)$$

次に散逸項以外の項に関してルンゲ・クッタ法で積分する. (22), (23), (24) から強制項と散逸項以外の時間変化を

$$\left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt} \right)_{ND} [\hat{\zeta}_{m,n}, \hat{D}_{m,n}, \hat{h}'_{m,n}] = - \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(f+\zeta)U}{\partial\lambda} \right]_{m,n} - \left[\frac{1}{a} \frac{\partial(\widehat{f+\zeta})V}{\partial\mu} \right]_{m,n} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\hat{D}_{m,n}}{dt} \right)_{ND} [\hat{\zeta}_{m,n}, \hat{D}_{m,n}, \hat{h}'_{m,n}] &= \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(f+\zeta)V}{\partial\lambda} \right]_{m,n} - \left[\frac{1}{a} \frac{\partial(\widehat{f+\zeta})U}{\partial\mu} \right]_{m,n} \\ &\quad - g\nabla^2 \hat{h}'_{m,n} - [\nabla^2 \{g\widehat{h_s} + E\}]_{m,n} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left(\frac{d\hat{h}_{m,n}}{dt} \right)_{ND} [\hat{\zeta}_{m,n}, \hat{D}_{m,n}, \hat{h}'_{m,n}] = - \left[\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial(h'U)}{\partial\lambda} \right]_{m,n} - \left[\frac{1}{a} \frac{\partial(\widehat{h'V})}{\partial\mu} \right]_{m,n} - \bar{h}\hat{D}_{m,n} \quad (30)$$

と定義する. ここで非線形項で用いられている格子点で定義された変数は各スペクトル変数 $\hat{\zeta}_{m,n}, \hat{D}_{m,n}, \hat{h}'_{m,n}$ からスペクトル逆変換して求められる.

ルンゲ・クッタ法による積分の手順はつぎのようになる. 渦度方程式だけを例に手順を記す. 第 1 段は

$$\left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt} \right)^{k1} = \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt} \right)_{ND} [\hat{\zeta}_{m,n}^\tau, \hat{D}_{m,n}^\tau, \hat{h}'_{m,n}^\tau], \quad (31)$$

$$\hat{\zeta}_{m,n}^{\tau+1/2} = \hat{\zeta}_{m,n}^\tau + \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt} \right)^{k1} \cdot \frac{(\Delta t)}{2}, \quad (32)$$

第 2 段は

$$\left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt} \right)^{k2} = \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt} \right)_{ND} [\hat{\zeta}_{m,n}^{\tau+1/2}, \hat{D}_{m,n}^{\tau+1/2}, \hat{h}'_{m,n}^{\tau+1/2}], \quad (33)$$

$$\hat{\zeta}_{m,n}^{*\tau+1/2} = \hat{\zeta}_{m,n}^\tau + \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt} \right)^{k2} \cdot \frac{(\Delta t)}{2}, \quad (34)$$

第 3 段は

$$\left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)^{k3} = \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)_{ND} [\hat{\zeta}_{m,n}^{*\tau+1/2}, \hat{D}_{m,n}^{*\tau+1/2}, \hat{h}'_{m,n}^{*\tau+1/2}], \quad (35)$$

$$\hat{\zeta}_{m,n}^{*\tau+1} = \hat{\zeta}_{m,n}^{\tau} + \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)^{k3} \cdot (\Delta t), \quad (36)$$

第 4 段は

$$\left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)^{k4} = \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)_{ND} [\hat{\zeta}_{m,n}^{*\tau+1}, \hat{D}_{m,n}^{*\tau+1}, \hat{h}'_{m,n}^{*\tau+1}], \quad (37)$$

最終的に

$$\hat{\zeta}_{m,n}^{\tau+1,ND} = \hat{\zeta}_{m,n}^{\tau} + (\Delta t) \left[\frac{1}{6} \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)^{k1} + \frac{1}{3} \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)^{k2} + \frac{1}{3} \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)^{k3} + \frac{1}{6} \left(\frac{d\hat{\zeta}_{m,n}}{dt}\right)^{k4} \right], \quad (38)$$

以上の手順を発散 $\hat{D}_{m,n}$, 変位擾乱 $\hat{h}'_{m,n}$ についても平行して計算していくことで, 非散逸項の積分が完了する.

ルンゲ・クッタ法による積分ののち, 散逸項からの修正を行なう. 渦度を例にとると,

$$\frac{\zeta_{m,n}^{\tau+1} - \zeta_{m,n}^{\tau+1,ND}}{\Delta t} = -\nu_{m,n} \frac{\zeta_{m,n}^{\tau+1} + \zeta_{m,n}^{\tau+1,ND}}{2}$$

したがって

$$\zeta_{m,n}^{\tau+1} = \frac{1 - \nu_{m,n}(\Delta t)/2}{1 + \nu_{m,n}(\Delta t)/2} \cdot \zeta_{m,n}^{\tau+1,ND}, \quad (39)$$

と修正される. 発散 $\hat{D}_{m,n}$, 変位擾乱 $\hat{h}'_{m,n}$ についても同様に計算する.

5 使用モジュールとその他の設定

スペクトル変換と逆変換, 微分演算は SPMODEL ライブラリ (spml) の `w_module_sjpack` に含まれる関数を用いて行う. スペクトル変換と逆変換の際の数値積分は台形公式を用いて行う. spml が下位で使用する ISPACK の仕様から, 格子点数 I は 2^n でなければならない. 非線形項の計算によって生じるエリアジングを防ぐため, 格子点数 I, J は切断波数 M に対し $I > 3M + 1, J > 3M/2$ を満たすように与える.

6 Scott and Polvani (2008) および Saito and Ishioka (2015) の実験

回転球面浅水強制乱流問題の設定として, Scott and Polvani (2008) および Saito and Ishioka (2015) により行われた実験を参考にして設定する.

強制項の表現は

$$F(\lambda, \mu, t) = 2\text{Re} \left[\sum_{n=n_f-\Delta n/2}^{n_f+\Delta n/2} \sum_{m=1}^n \hat{f}_{m,n}(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \right], \quad (40)$$

$$\hat{f}_{m,n}(t) = \sqrt{\frac{2n(n+1)\varepsilon_0}{(2n+1)\Delta n}} \xi_{m,n}(t), \quad \xi_{m,n}(t) = \frac{e^{i\theta_{m,n}(t)}}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (41)$$

ここで ε_0 はエネルギー注入率の大きさを表すパラメーター, $P_n^m(\mu)$ は 2 に規格化されたルジャンドル陪函数, $\theta_{m,n}(t)$ は区間 $[0, 2\pi]$ での一様乱数であり, 各時間ステップにおいて更新される¹.

長さスケールと時間スケールを球半径 a と自転周期 $2\pi/\Omega$ に選ぶのが簡単である. 重要な力学パラメーターは変形半径 $\frac{L_D}{a} = \frac{\sqrt{g\bar{h}}}{2\Omega}$.

7 参考文献

- 石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版会, 232pp.
- Krishnamurti, T. N., H. S. Bedi, and V. M. Hardiker, 1998: An introduction to global spectral modeling. Oxford Univ. Press, 253 pp.
- 竹広 真一, 佐々木 洋平, 石岡 圭一, 小高 正嗣, 高橋 芳幸, 中島 健介, 石渡 正樹, 林 祥介, spmodel 開発グループ, 2013: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), <http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>, 地球流体電脳倶楽部.

¹w_module_sjpack のスペクトル変数を用いれば l_nm(n,m) (mj0) がスペクトル係数の実数部, l_nm(n,m) (mj0) がスペクトル係数の虚数部を格納しているので, $m \geq 1$ に対して

$$w_F(l_-(n, m)) = \sqrt{\frac{2n(n+1)\varepsilon_0}{(2n+1)\Delta n\Delta t}} \cos \theta_{m,n}(t), \quad w_F(l_-(n, -m)) = \sqrt{\frac{2n(n+1)\varepsilon_0}{(2n+1)\Delta n\Delta t}} \sin \theta_{m,n}(t).$$

実験パラメーター	設定値
切断波数 N_T	170, (683)
時間ステップ Δt	0.0125
球半径 a	1
回転角速度 Ω	2π
重力加速度 g	?
平均深さ $\bar{h}$	?
変形半径 L_D	(1), 0.1, (0.025)
エネルギー注入率 ε_0	5.0×10^7
強制の中心波数 n_f	42
強制の波数幅 Δn	4
レイリー摩擦の時定数 τ_R	∞
ニュートン冷却の時定数 τ_N	$0.25 L_D^{-2}$
超粘性次数 N_m	4 (∇^8)
超拡散次数 N_m	4 (∇^8)
超粘性係数 ν_4	$10/[N_T(N_T + 1)]^4$
超拡散係数 ν_4	$10/[N_T(N_T + 1)]^4$

表 2: 実験パラメーター一覧

	OpenMP 数	1	2	4	6
	real time	...s			
Intel ???	usr time	...s			

表 3: 10 日計算にかかる切断波数 $T170$ での計算時間 (sec)

Scott, R. K., Polvani, L. M., 2007: Forced-dissipative shallow-water turbulence on the sphere and the atmospheric circulation of the giant planets. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 3158–3176.

Scott, R. K., Polvani, L. M., 2008: Equatorial superrotation in shallow water atmospheres. *Geophys. Res. Lett.*, **35**, L24202.

Saito, I., Ishioka, K., 2015: Mechanism for the Formation of Equatorial Superrotation in Forced Shallow-Water Turbulence with Newtonian Cooling. *J. Atmos. Sci.*, **72**, 1466–1483.