

# Bénard 対流のノート

村上 真也

2014 年 7 月 24 日

これは, Bénard 対流の基本についてまとめた文書である. 線形不安定を主に扱う. 境界条件としては応力なし条件 (以後 free と略す), 剛体壁すべりなし条件 (以後 rigid と略す), 温度固定条件を考える. 熱フラックス固定条件については今のところ考慮しない.

## 目次

1	支配方程式の導出	2
1.1	基礎方程式 . . . . .	2
1.2	ブシネスク近似 . . . . .	2
1.3	問題設定 . . . . .	4
1.4	基本場 . . . . .	4
2	無次元化	7
3	境界条件	10
3.1	応力なし条件 . . . . .	10
3.2	剛体壁すべりなし条件 . . . . .	12
3.3	温度固定条件 . . . . .	12
3.4	熱フラックス一定条件 . . . . .	13
4	ノーマルモード	13
5	線形不安定	14
5.1	rigid-rigid, TT の場合 . . . . .	14
5.2	free-free の場合 . . . . .	23

5.3	free-rigid の場合 . . . . .	26
6	弱非線形解析	27
6.1	単純な振幅展開 . . . . .	28
7	変分法	39
7.1	even モード . . . . .	44
7.2	odd モード . . . . .	50
8	回転系	53
8.1	支配方程式 . . . . .	53
8.2	ノーマルモード解 . . . . .	54
8.3	free-free の場合 . . . . .	55
8.4	変分法を用いた臨界 Rayleigh 数の求め方の定式化 . . . . .	57
8.5	rigid-rigid の場合 . . . . .	60
8.6	free-rigid の場合 . . . . .	62

## 1 支配方程式の導出

### 1.1 基礎方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -g\rho\delta_{i3} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \Phi, \quad (4)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2. \quad (5)$$

### 1.2 ブシネスク近似

ここでは基礎方程式にブシネスク近似を施す.

密度の温度依存性を次式で近似的に与える.

$$\rho = \rho_0 \{1 - \alpha(\theta - \theta_0)\} \quad (6)$$

ここで  $\alpha$  は体膨張率である. ところで,

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \alpha(\theta_0 - \theta) \ll 1, \quad \text{when } \theta_0 - \theta \leq 10 \text{ K} \quad (7)$$

ここで, 理想気体について  $\alpha \approx 3 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , 典型的な液体について  $\alpha \approx 5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  である.

$(\rho - \rho_0)/\rho_0 = \alpha(\theta_0 - \theta)$  なので,  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  も  $O(\alpha)$  である. よって, (1) 式は,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (8)$$

となる. 従って, 応力テンソル  $\sigma_{ij}$  は,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

と簡略化される. 運動方程式は, 浮力項以外で  $\rho, \mu$  を定数とみなすと,

$$\rho_0 \frac{Du_i}{Dt} = -g\rho_0 \{1 - \alpha(\theta - \theta_0)\} \delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad (10)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho_0} + gz \right) + \alpha g(\theta - \theta_0) \delta_{i3} + \nu \Delta u_i \quad (11)$$

となる. ここで,  $\nu := \mu/\rho_0$ ,  $\Delta := \partial^2/\partial x_j^2$ .

オーダーを考えると,  $\Phi$  は無視できる<sup>\*1</sup>. 一方で, 圧縮に伴う加熱は無視できない:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (12)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (13)$$

$$-p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{p}{\rho} \frac{D}{Dt} \rho_0 \{1 - \alpha(\theta - \theta_0)\} = \frac{\rho_0}{\rho} p \frac{D}{Dt} (-\alpha\theta) \approx -\alpha p \frac{D\theta}{Dt}. \quad (14)$$

<sup>\*1</sup> Drazin and Reid (2004)[1] にはちゃんと議論がある.

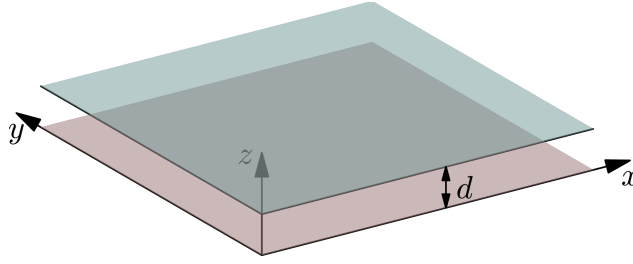


図1 Rayleigh-Bénard 対流における2枚の平板の配置.

理想気体に対して,  $p = (C_p - C_v)\rho\theta$ ,  $\alpha = 1/\theta$  となるので\*2,

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= \rho \frac{DC_v\theta}{Dt} + \alpha(C_p - C_v)\rho\theta \frac{D\theta}{Dt} \\ &= \rho C_p \frac{D\theta}{Dt} = k\Delta\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

従って,

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{k}{\rho C_p} \Delta\theta \approx \frac{k}{\rho_0 C_p} \Delta\theta =: \kappa \Delta\theta \quad (17)$$

### 1.3 問題設定

$x$ - $y$  平面に並行に  $z = 0$ ,  $z = d$  にそれぞれ平板を配置し,  $z \in [0, d]$  に流体が満たされている状態を考える (図1). このとき, 下端  $z = 0$  で一様に流体を温めたとき, 流れ場と温度場がどうなるかを考える.

### 1.4 基本場

ここから, 有次元変数にはアスタリスクを付けて表示する. 定数にはアスタリスクを付けないことに注意.

二枚の平板に挟まれた流体層を考える. 下端から温められている状態を考えるが, 物理的には温度を固定するか熱フラックスを固定するかの二通りが考えられる.

\*2 理想気体の状態方程式を用いて  $\rho = \frac{p}{R\theta}$  であるから, 体膨脹係数  $\alpha$  は定義より

$$\alpha := -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_p = \frac{R\theta}{p} \frac{p}{R\theta^2} = \frac{1}{\theta}. \quad (15)$$

### 1.4.1 温度境界条件

上端  $z_* = d$  と下端  $z_* = 0$  で温度の境界条件を与える.

上下端で温度固定境界条件の場合は,

$$\theta_* = \theta_0, \quad \text{at } z_* = 0, \quad (18)$$

$$\theta_* = \theta_1, \quad \text{at } z_* = d \quad (19)$$

となる. 下端で温度固定, 熱フラックス固定境界条件の場合は

$$\theta_* = \theta_0, \quad \text{at } z_* = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} = -F, \quad \text{at } z_* = 0. \quad (21)$$

上下端で熱フラックス固定境界条件の場合は

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} = -F, \quad \text{at } z_* = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} = -F, \quad \text{at } z_* = d \quad (23)$$

となる. ただし, 上下端で熱フラックスを固定した場合は

$$\left. \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} \right|_{z_*=0}^{z_*=d} = 0 \quad (24)$$

を満たす必要がある.

### 1.4.2 熱伝導解

熱伝導解を考える. つまり, 運動なし  $\mathbf{u} = 0$  で定常な解を考える.  $\mathbf{u} = 0$  だから,

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho_0} + gz \right) + g\alpha(\theta - \theta_0)\delta_{i3}, \quad (25)$$

$$0 = \kappa \Delta \theta \quad (26)$$

が解くべき式である.

解は

$$\theta_* - \theta_0 = -\beta z_*, \quad (27)$$

$$p_*(z_*) = p_0 - \rho_0 g \left( z_* + \frac{1}{2} \alpha \beta z_*^2 \right) \quad (28)$$

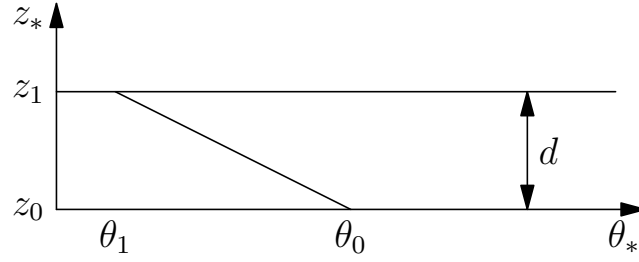


図2 熱伝導解の温度の  $x$ - $z$  断面図 (上下端で温度固定の場合).

である. ここで  $p_0$  は下端の圧力である.

上下端で温度固定境界条件の場合は,

$$\beta = (\theta_0 - \theta_1)/d. \quad (29)$$

下端で温度固定, 熱フラックス固定境界条件の場合は

$$\beta = F. \quad (30)$$

上下端で熱フラックス固定境界条件の場合は

$$\beta = F \quad (31)$$

で  $\theta_0, \theta_1$  は不定である.

#### 1.4.3 基本場

基本場  $U_*$ ,  $\Theta_*$ ,  $P_*$  は熱伝導解とする.

$$U_* = 0, \quad (32)$$

$$\Theta_* = \theta_0 - \beta z_*, \quad (33)$$

$$P_* = p_0 - g\rho_0 \left( z_* + \frac{1}{2} \alpha \beta z_*^2 \right). \quad (34)$$

#### 1.4.4 摂動場の方程式と線形化

速度ベクトル, 温度, 圧力を基本場とそれからのずれに分けて書くと,

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u}'_*(\mathbf{x}_*, t_*), \quad (35)$$

$$\theta_* = \Theta_*(z_*) + \theta'_*(\mathbf{x}_*, t_*), \quad (36)$$

$$p_* = P_*(z_*) + p'_*(\mathbf{x}_*, t_*) \quad (37)$$

とする。

ブシネスク近似方程式を改めて列挙すると、

$$\nabla_* \cdot \mathbf{u}_* = 0, \quad (38)$$

$$\frac{Du_{*i}}{Dt_*} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p_*}{\rho_0} + gz_* \right) - \alpha g(\theta_0 - \theta_*)\delta_{i3} + \nu \Delta_* u_{*i}, \quad (39)$$

$$\frac{D\theta_*}{Dt_*} = \kappa \Delta_* \theta_*. \quad (40)$$

これに代入して、摂動に関する方程式を得る：

$$\nabla_* \cdot \mathbf{u}'_* = 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}'_*}{Dt_*} &= -\nabla_* \left\{ \frac{p_0}{\rho_0} - g \left( z_* + \frac{1}{2} \alpha \beta z_*^2 \right) + gz_* + \frac{p'_*}{\rho_0} \right\} - g\alpha(\beta z_* - \theta'_*)\mathbf{k} + \nu \Delta_* \mathbf{u}'_*, \\ &= -\nabla_* \frac{p'_*}{\rho_0} + g\alpha\theta'_*\mathbf{k} + \nu \Delta_* \mathbf{u}'_*, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{D\theta'_*}{Dt_*} = \frac{D\theta'_*}{Dt_*} + \frac{D\Theta_*}{Dt_*} = \frac{D\theta'_*}{Dt_*} - \beta w'_* = \kappa \Delta_* \theta'_* \quad (43)$$

となる。

これを線形化して、

$$\nabla_* \cdot \mathbf{u}'_* = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'_*}{\partial t_*} = -\nabla_* \frac{p'_*}{\rho_0} + g\alpha\theta'_*\mathbf{k} + \nu \Delta_* \mathbf{u}'_*, \quad (45)$$

$$\frac{\partial \theta'_*}{\partial t_*} - \beta w'_* = \kappa \Delta_* \theta'_* \quad (46)$$

となる。

## 2 無次元化

長さ  $L$ , 時間  $T$ , 速度  $U$ , 温度  $\theta$  は, それぞれ  $L = [d]$ ,  $T = [d^2/\kappa]$ ,  $\theta = [\beta d] = [\theta_0 - \theta_1]$ ,  
 また,  $\frac{U}{T} = \left[ \frac{1}{\rho_0} \nabla p \right] = \frac{1}{L} \left[ \frac{p}{\rho_0} \right]$ ,  $U/T = [d/(d^2/\kappa)^2]$ , 従って,  $[p] = [\rho_0]L^2T^{-2} = [\rho_0]\kappa^2/d^2$

なので、無次元化した変数をアスタリスクなしの記号で表して、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_*/d, \quad (47)$$

$$t = \kappa t_*/d^2, \quad (48)$$

$$\mathbf{u} = d\mathbf{u}'_*/\kappa, \quad (49)$$

$$\theta = \theta'_*/(\beta d), \quad (50)$$

$$p = d^2 p'_*/(\rho_0 \kappa^2) \quad (51)$$

とする。

方程式を無次元化すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + RPr\theta\mathbf{k} + Pr\Delta\mathbf{u} \quad (53)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \Delta\theta \quad (54)$$

となる。ここで、二つの無次元数、Rayleigh 数  $R$ 、Prandtl 数  $Pr$  を

$$R := \frac{g\alpha\beta d^4}{\kappa\nu}, \quad (55)$$

$$Pr := \frac{\nu}{\kappa} \quad (56)$$

と定義した。

渦度方程式を導出する。運動方程式のローテーションを取る。渦度  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  を用いて

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = RPr\nabla \times (\theta\mathbf{k}) + Pr\Delta\boldsymbol{\omega} \quad (57)$$

さらに渦度方程式のローテーションを取る。ここで、次式を用いる：

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) &= \varepsilon_{lmi} \mathbf{e}_l \partial_m (\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k) \\ &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_l \partial_m \partial_j u_k \\ &= \delta_{jl} \delta_{km} \mathbf{e}_l \partial_m \partial_j u_k - \delta_{jm} \delta_{kl} \mathbf{e}_l \partial_m \partial_j u_k \\ &= \mathbf{e}_j \partial_j \partial_k u_k - \mathbf{e}_k \partial_j^2 u_k \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta\mathbf{u} \\ &= -\Delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (58)$$

ここで恒等式  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$  を用いた。同様に、

$$\nabla \times (\nabla \times (\theta\mathbf{k})) = \nabla(\nabla \cdot (\theta\mathbf{k})) - \Delta(\theta\mathbf{k}) = \nabla\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \Delta\theta\mathbf{k} \quad (59)$$



であるから,

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial t} = -RPr \nabla \times (\nabla \times (\theta \mathbf{k})) + Pr \Delta^2 \mathbf{u} \quad (60)$$

$$= RPr \left( \Delta \theta \mathbf{k} - \nabla \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) + Pr \Delta^2 \mathbf{u} \quad (61)$$

となる.

特に  $z$  方向は

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial t} = RPr \Delta_1 \theta + Pr \Delta^2 w \quad (62)$$

ここで,  $\Delta_1 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  とした.

$\theta$  を消去すると,

$$\left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta w = R \Delta_1 \theta, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \theta = w \quad (63)$$

であるから,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta w = R \Delta_1 w \quad (64)$$

となる. あるいは,  $w$  を消去して,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta \theta = R \Delta_1 \theta \quad (65)$$

となる.

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (66)$$

を  $x, y$  で偏微分することで,

$$\Delta_1 u = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y}, \quad (67)$$

$$\Delta_1 v = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \quad (68)$$

が得られ,  $\omega_3$  は渦度方程式の  $\mathbf{k}$  成分の式

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} = Pr \Delta \omega_3 \quad (69)$$

より与えられる. こうして  $\omega_3, w$  がそれぞれ求まるので,  $u, v$  も求めることができる.

### 3 境界条件

#### 3.1 応力なし条件

応力なし条件 (自由表面境界条件) では, 摂動の応力がゼロ, 上面が自由表面で変位が

$$z_* = d + \xi'_*(x_*, y_*, t_*) \quad (70)$$

とする.

ここで level set 法を使う.  $F := z_* - d - \xi'_*$  なる関数を考えて,  $F$  がゼロになるところに境界が位置すると考える. 自由表面の法線方向は  $F$  の勾配を取って,

$$\nabla_*(z_* - d - \xi'_*) = \mathbf{k} - \frac{\partial \xi'_*}{\partial x_*} \mathbf{i} - \frac{\partial \xi'_*}{\partial y_*} \mathbf{j} \quad (71)$$

その大きさは,

$$\left\{ \left( \frac{\partial \xi'_*}{\partial x_*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi'_*}{\partial y_*} \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (72)$$

であるから, 単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left( -\frac{\partial \xi'_*}{\partial x_*} \mathbf{i} - \frac{\partial \xi'_*}{\partial y_*} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \left\{ \left( \frac{\partial \xi'_*}{\partial x_*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi'_*}{\partial y_*} \right)^2 + 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbf{k} - \nabla_{H^*} \xi'_*) \{ (\nabla_{H^*} \xi'_*)^2 + 1 \}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{k} - \nabla_{H^*} \xi'_* + O\{ (\nabla_{H^*} \xi'_*)^2 \} \end{aligned} \quad (73)$$

となる. 変形した表面の応力の法線成分は, 摂動を加えていない場のそれと一致しなければならない. つまり,  $-p_1 = -P_*(d)$  である. 変形した表面の応力の法線成分は,  $z_* = d + \xi'_*$  で,

$$\begin{aligned} -p_1 &= \sigma_{ij^*} n_i n_j \\ &= -P_*(z_*) - p'_* + \mu \left( \frac{\partial u'_{i^*}}{\partial x_{j^*}} + \frac{\partial u'_{j^*}}{\partial x_{i^*}} \right) n_i n_j + \left( \lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u'_{k^*}}{\partial x_{k^*}} \end{aligned} \quad (74)$$

ここで,

$$P_*(d + \xi'_*) = P_*(d) + \xi'_* \left( \frac{dP_*}{dz_*} \right)_{z_*=d} + O(\xi'^2_*) \quad (75)$$

また,

$$P_* = p_0 - g\rho_0 \left( z_* + \frac{1}{2}\alpha\beta z_*^2 \right) \quad (76)$$

だったので,

$$\frac{dP_*}{dz_*} = -g\rho_0(1 + \alpha\beta d) = -g\rho_1 \quad (77)$$

となる. ここで,  $\rho = \rho_0\{1 - \alpha(\theta - \theta_0)\}$ ,  $\theta_1 - \theta_0 = -\beta d$ ,  $\rho_1 = \rho_0(1 + \alpha\beta d)$  を用いた.

これらによって,  $-p_1$  は,  $z_* = d$  において,

$$-p_1 = -P_* - \xi_* \left( \frac{dP_*}{dz_*} \right) - p'_* + 2\mu \frac{\partial w_*}{\partial z_*} + \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial u'_{k*}}{\partial x_{k*}} \quad (78)$$

ここで,

$$\mu \left( \frac{\partial u'_{i*}}{\partial x_{j*}} + \frac{\partial u'_{j*}}{\partial x_{i*}} \right) n_i n_j = 2\mu \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \quad (79)$$

となることを用いた. これは, 摂動を加えていない状態を考えると,  $i, j$  ともに 3 の場合を考えることになるので, このことから直ちに得る. 従って,  $z_* = d$  において,

$$\xi_* = \frac{1}{g\rho_1} \left\{ p'_* - 2\mu \frac{\partial w_*}{\partial z_*} + \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla_* \cdot \mathbf{u}'_* \right\} \quad (80)$$

を得る.

これを無次元化して,  $z = 1$  において,

$$\begin{aligned} \xi &= \xi'_*/d = \frac{1}{dg\rho_1} \left\{ \frac{\rho_0\kappa^2}{d^2} p_* - 2\mu \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial w}{\partial z} - \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\kappa}{d^2} \nabla \cdot \mathbf{u} \right\} \\ &= \frac{\alpha\beta\kappa\mu}{\alpha\beta g\rho_1 d^3} \left\{ \frac{\rho_0\kappa}{\mu} p_* - 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{2}{3} - \frac{\lambda}{\mu} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right\} \\ &= \frac{\alpha\beta\rho_0 d}{R\rho_1} \left\{ Pr^{-1} p_* - 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{2}{3} - \frac{\lambda}{\mu} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right\} \end{aligned} \quad (81)$$

が成り立つ.

$\alpha\beta d = (\rho_1 - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$  を用いると,

$$\xi = 0 \quad (82)$$

を得る. ここで, 非線形の運動学的条件は,

$$w = \frac{D\xi}{Dt} \quad \text{at} \quad z = 1 + \xi. \quad (83)$$

これは線形化の後,

$$w = 0 \quad \text{at} \quad z = 1 \quad (84)$$

となる\*3.

接線応力がゼロになる条件は,

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \text{at} \quad z = 1 \quad (85)$$

である.  $z = 1$  で  $w$  が恒等的にゼロなので,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \text{at} \quad z = 1. \quad (86)$$

よって,  $\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  より,

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = 1 \quad (87)$$

(86) 式を  $x, y$  で偏微分する.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0, \quad \text{at} \quad z = 1 \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad \text{at} \quad z = 1$$

よって,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{at} \quad z = 1 \quad (88)$$

### 3.2 剛体壁すべりなし条件

剛体壁を置いてそこで流れがすべりなし条件を満たすとき, rigid と呼ぶ.  $z = 0, 1$  で rigid とすると,  $z = 0, 1$  において  $u = v = w = 0$ , よって  $\omega_3 = 0$ . 連続の式より,  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  である.

### 3.3 温度固定条件

温度  $\theta$  については, 境界で温度固定する条件

$$\theta = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, 1 \quad (89)$$

を課す.

---

\*3 Davis and Segel (1968) を読め, とのこと.

### 3.4 熱フラックス一定条件

熱フラックス一定の境界条件, つまり

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -F \quad \text{at } z = 0, 1 \quad (90)$$

を課すことも考えられる. ここで  $F$  は熱フラックスである.

いくつかの実験では  $F = 0$  が採用されている (Jeffreys, 1928; Sparrow, Goldstein & Jonsson, 1964).

## 4 ノーマルモード

支配方程式系は  $x, y$  について対称なので,  $s = \sigma + i\omega$  として,

$$w = W(z)f(x, y)e^{st}, \quad \theta = T(z)f(x, y)e^{st} \quad (91)$$

と置いた.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \Delta \theta \quad (92)$$

は,  $D := d/dz$  を用いて,

$$(D^2 + \Delta_1 - s)Tf = -fW \quad (93)$$

と変形できる. この両辺を  $Tf$  で割ると, 変数分離形

$$\frac{1}{T}D^2T + \frac{W}{T} - s = -\frac{1}{f}\Delta_1f =: a^2 \quad (94)$$

に帰着できる. 従って,

$$\Delta_1f + a^2f = 0, \quad (95)$$

$$(D^2 - a^2 - s)T = -W \quad (96)$$

となる. また,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta w = RPr\Delta_1\theta + Pr\Delta^2w, \quad (97)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\left(\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta w = R\Delta_1w \quad (98)$$

は,

$$\begin{aligned}(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/Pr)W &= a^2RT, \\ (D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/Pr)W &= -a^2RW,\end{aligned}\tag{99}$$

となる.

境界条件は,  $z = 0, 1$  において,

$$W = DW = T = 0, \quad \text{rigid},\tag{100}$$

$$W = D^2W = T = 0, \quad \text{free}.\tag{101}$$

または

$$W = DW = T = D^4W - 2a^2D^2W - s/PrD^2W = 0, \quad \text{rigid},\tag{102}$$

$$W = D^2W = T = D^4W = 0, \quad \text{free}\tag{103}$$

となる.

## 5 線形不安定

線形不安定問題を各種境界条件の場合に概観する.

### 5.1 rigid-rigid, TT の場合

力学的境界条件は rigid-rigid, 温度の境界条件は両端で温度固定 (TT) の場合を考える.

$s = 0$  のとき,

$$(D^2 - a^2)^3W = -a^2RW\tag{104}$$

である. 境界条件は,

$$W = DW = D^4 - 2a^2D^2W = 0,\tag{105}$$

$$D^4W = 2a^2D^2W \quad \text{at } z = 0, 1.\tag{106}$$

ここで  $\zeta := z - \frac{1}{2}$  を定義して,  $\zeta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  の範囲で考えることにする (対称性をよくするため).

解は even モード, odd モードと呼んで次のように書き表す.

$$W_e := \sum_{i=1}^3 A_i \cosh q_i \zeta, \quad (107)$$

$$W_o := \sum_{i=1}^3 B_i \sinh q_i \zeta. \quad (108)$$

ここで  $q_i$  は  $(q^2 - a^2)^3 = -a^2 R$  の解. また,

$$a^6 \lambda^3 := a^2 R \quad (109)$$

として特性指数  $\lambda$  を定義する. 従って, 記号的に\*4

$$D^2 = a^2(1 - \lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3)), \quad (110)$$

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 = 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (111)$$

と表せる. ここで  $\omega_2^2 = \omega_3, \omega_3^2 = \omega_2$  に注意する.

$q_i$  を具体的に求めると,

$$(q^2 - a^2)^3 + a^6 \lambda^3 = 0 \quad (112)$$

となるが, ここで,

$$x^3 + y^3 = 0, \quad (113)$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \quad (114)$$

を用いて, 第一項を  $x^3$ , 第二項を  $y^3$  として考えると,

$$(q^2 - a^2 + a^2 \lambda) \{ (q^2 - a^2)^2 - (q^2 - a^2) a^2 \lambda + a^4 \lambda^2 \} = 0 \quad (115)$$

と変形できる. ここから, 一つ目の括弧内がゼロである場合から解が一つ, 二つ目の括弧内  
がゼロである場合から解が二つ出てきて, \*5

$$q_1 = ia(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (116)$$

$$q_2 = a \left( 1 + \frac{\lambda}{2} - i\lambda\sqrt{3} \right), \quad (117)$$

$$q_3 = a \left( 1 + \frac{\lambda}{2} + i\lambda\sqrt{3} \right) \quad (118)$$

$$(119)$$

---

\*4 ここで  $\omega_i$  は渦度ではなく 1 の三乗根.

\*5 負号の解は何故考慮しないのか?

となる.  $q_2, q_3$  をさらに変形する. 次の変形

$$(a \pm ib)^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (120)$$

$$\cos \theta := \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta := \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (121)$$

$$(a \pm ib)^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \pm i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (122)$$

を用いて,

$$\left( 1 + \frac{\lambda}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \right)^{\frac{1}{2}} = (1 + \lambda + \lambda^2)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1 + \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}} \pm i \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda}{\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (123)$$

とする. ここで,  $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  を用いて,

$$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}} \left\{ \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} + \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \right) \right\}, \quad (124)$$

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}} \left\{ \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} - \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \right) \right\} \quad (125)$$

となるので, これを代入して

$$1 + \frac{\lambda}{2} \pm i \lambda \frac{\sqrt{3}}{2} = A \pm iB, \quad (126)$$

$$2A^2 := \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} + \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \right), \quad (127)$$

$$2B^2 := \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} - \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \right) \quad (128)$$

を得る.

境界  $\zeta = \frac{1}{2}$  での  $W_e$  に関する条件から,

$$\begin{pmatrix} \cosh \frac{q_1}{2} & \cosh \frac{q_2}{2} & \cosh \frac{q_3}{2} \\ \frac{q_1}{2} \sinh \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \sinh \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \sinh \frac{q_3}{2} \\ \omega_1^2 \cosh \frac{q_1}{2} & \omega_2^2 \cosh \frac{q_2}{2} & \omega_3^2 \cosh \frac{q_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (129)$$

となる.  $A_i$  がゼロでない場合, 係数行列のデターミナントがゼロになるので,

$$\begin{vmatrix} \cosh \frac{q_1}{2} & \cosh \frac{q_2}{2} & \cosh \frac{q_3}{2} \\ \frac{q_1}{2} \sinh \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \sinh \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \sinh \frac{q_3}{2} \\ \omega_1^2 \cosh \frac{q_1}{2} & \omega_2^2 \cosh \frac{q_2}{2} & \omega_3^2 \cosh \frac{q_3}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (130)$$



が成り立つ.  $\omega_i$  を計算すると

$$\begin{vmatrix} \cosh \frac{q_1}{2} & \cosh \frac{q_2}{2} & \cosh \frac{q_3}{2} \\ \frac{q_1}{2} \sinh \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \sinh \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \sinh \frac{q_3}{2} \\ \cosh \frac{q_1}{2} & \omega_3 \cosh \frac{q_2}{2} & \omega_2 \cosh \frac{q_3}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (131)$$

となるが, ここからさらに各列を  $\cosh \frac{q_1}{2}$ ,  $\cosh \frac{q_2}{2}$ ,  $\cosh \frac{q_3}{2}$  で割る.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{q_1}{2} \tanh \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \tanh \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \tanh \frac{q_3}{2} \\ 1 & \omega_3 & \omega_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (132)$$

3行目から1行目を引いて, 3行目に  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  をかけると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{q_1}{2} \tanh \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \tanh \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \tanh \frac{q_3}{2} \\ 0 & \sqrt{3} + i & \sqrt{3} - i \end{vmatrix} = 0 \quad (133)$$

ここまで簡単化すると計算は容易で,

$$iq_1 \tanh \frac{q_1}{2} + (\sqrt{3} - i) \frac{q_2}{2} \tanh \frac{q_2}{2} - (\sqrt{3} + i) \frac{q_3}{2} \tanh \frac{q_3}{2} = 0 \quad (134)$$

から,  $q_i$  を代入して整理すると,

$$-\sqrt{\lambda - 1} \tan \frac{a}{2} \sqrt{\lambda - 1} = \frac{(A + \sqrt{3}B) \sinh aA + (\sqrt{3}A - B) \sin aB}{\cosh aA + \cos aB} \quad (135)$$

となる. ここで,

$$\tanh \frac{x \pm y}{2} = \frac{\sinh x \pm \sinh y}{\cosh x + \cosh y} = \frac{\cosh x - \cosh y}{\sinh x \mp \sinh y} \quad (136)$$

を用いた<sup>\*6</sup>.  $W_0$  についても同様の議論が成り立ち,

$$\sqrt{\lambda - 1} \cot \frac{a}{2} \sqrt{\lambda - 1} = \frac{(A + \sqrt{3}B) \sinh aA - (\sqrt{3}A - B) \sin aB}{\cosh aA - \cos aB} \quad (145)$$

---

<sup>\*6</sup> (136) 式を示す. 次の二つの公式 (これらはストレートフォワードに示せる.)

$$2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} = \sinh x + \sinh y, \quad (137)$$

$$2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} = \cosh x + \cosh y \quad (138)$$

より, 辺々割って,

$$\tanh \frac{x+y}{2} = \frac{\sinh x + \sinh y}{\cosh x + \cosh y}. \quad (139)$$

引数の符号が負のときも考慮すると,

$$\tanh \frac{x \pm y}{2} = \frac{\sinh x \pm \sinh y}{\cosh x + \cosh y} \quad (140)$$

となる.

これらは数値的に解くより他ない. Newton-Raphson 法で解くために, (135) 式と (145) 式を変形して得られる関数  $g_e(\lambda)$ ,  $g_o(\lambda)$  を定義する:

$$g_e(\lambda) := -\sqrt{\lambda-1} \tan \frac{a}{2} \sqrt{\lambda-1} (\cosh aA + \cos aB) - \{(A + \sqrt{3}B) \sinh aA + (\sqrt{3}A - B) \sin aB\}, \quad (146)$$

$$g_o(\lambda) := -\sqrt{\lambda-1} \cot \frac{a}{2} \sqrt{\lambda-1} (\cosh aA - \cos aB) + (A + \sqrt{3}B) \sinh aA - (\sqrt{3}A - B) \sin aB, \quad (147)$$

こうして,  $\lambda$  を求める問題は  $g_e(\lambda)$ ,  $g_o(\lambda)$  の零点を探す問題になった. ここで, Newton-Raphson 法を用いるときには  $g'_e(\lambda)$ ,  $g'_o(\lambda)$  が必要になる. 解析的に微分を求めるのが自然なように思われるが, 実は解析的に求めると収束性が悪いどころか, 収束しない場合すらある. ここでは差分によって微分値を見積もるのがよい.

一般に, 関数  $f'(x)$  を 2 次精度の中央差分によって幅  $\Delta x$  で差分化すると,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (148)$$

となる.

Newton-Raphson 法では,

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \quad (149)$$

によって  $i$  番目の近似値  $x_i$  を求める. 初期値  $x_0$  は適当に与える (与える初期値によって収束値は変わりうる).

となる. 同様にして, 次の二つの公式

$$2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} = \cosh x - \cosh y, \quad (141)$$

$$2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} = \sinh x - \sinh y \quad (142)$$

より,

$$\tanh \frac{x+y}{2} = \frac{\cosh x - \cosh y}{\sinh x - \sinh y} \quad (143)$$

がただちに示せる. 引数の符号が負のときも考慮して, 結局

$$\tanh \frac{x \pm y}{2} = \frac{\cosh x - \cosh y}{\sinh x \mp \sinh y} \quad (144)$$

を得る.

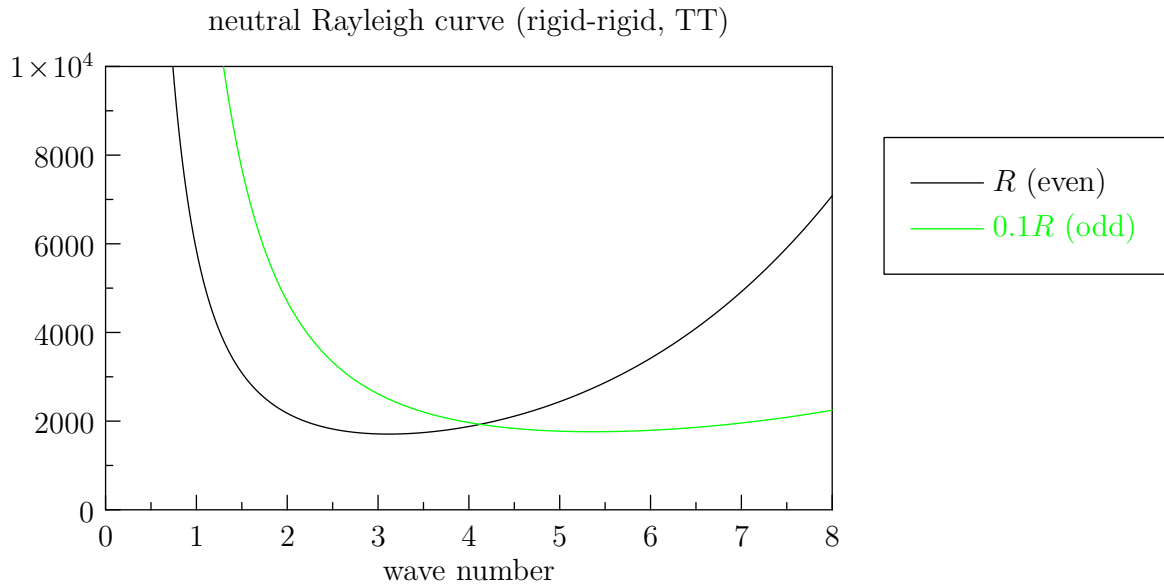


図3 中立曲線 (rigid-rigid, TT). Newton-Raphson 法で求めた.

### 5.1.1 臨界 Rayleigh 数

水平波数  $a$  を与えて, Newton-Raphson 法で求めた  $\lambda$  を  $R$  に直したものを図3に示す. ここで, Newton-Raphson 法の収束判定基準は  $|g_e| < 10^{-8}$ ,  $|g_o| < 10^{-8}$  とした. ここで even モードの臨界波数は  $a_c \approx 3.1163\dots$ , 臨界 Rayleigh 数は  $R_c \approx 1707.762\dots$  である\*7. odd モードの臨界波数は  $a_c \approx 5.365\dots$ , 臨界 Rayleigh 数は  $R_c \approx 17610.39\dots$  である\*8.

\*7 文献値は  $a_c \approx 3.117$ ,  $R_c \approx 1707.762$  (Reid and Harris, 1958).

\*8 文献値は  $a_c \approx 5.365$ ,  $R_c \approx 17610.39$  (Reid and Harris, 1958).

### 5.1.2 臨界モード

$D^2 - a^2 = a^2\lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  を思い出すと,  $s = 0$  だから,  $(D^2 - a^2)^2 W = a^2 RT$  より,  $T$  の even モード  $T_e$  は

$$\begin{aligned}
a^2 RT_e &= (D^2 - a^2)^2 W_e \\
a^6 \lambda^3 T_e &= a^4 \lambda^2 (\omega_1^2 A_1 \cosh q_1 \zeta + \omega_2^2 A_2 \cosh q_2 \zeta + \omega_3^2 A_3 \cosh q_3 \zeta) \\
a^2 \lambda T_e &= \omega_1^2 A_1 \cosh q_1 \zeta + \omega_2^2 A_2 \cosh q_2 \zeta + \omega_3^2 A_3 \cosh q_3 \zeta \\
&= A_1 \cosh q_1 \zeta + \omega_3 A_2 \cosh q_2 \zeta + \omega_2 A_3 \cosh q_3 \zeta \\
&= A_1 \cos a(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} \zeta \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ (C_1 - \sqrt{3}C_2) \cosh aA\zeta \cos aB\zeta + (\sqrt{3}C_1 + C_2) \sinh aA\zeta \sin aB\zeta \right\}
\end{aligned} \tag{150}$$

となる.  $T$  の odd モード  $T_o$  も同様に,

$$\begin{aligned}
a^2 \lambda T_o &= iB_1 \sin a(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} \zeta \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ (-S_1 - \sqrt{3}S_2) \sinh aA\zeta \cos aB\zeta + (\sqrt{3}S_1 - S_2) \cosh aA\zeta \sin aB\zeta \right\}
\end{aligned} \tag{151}$$

となる.

$C_1, C_2$  を決定する.  $\zeta = \pm \frac{1}{2}$  で  $W_e = DW_e = (D^2 - a^2)W_e = 0$  なので,

$$A_1 \cosh \frac{q_1}{2} + A_2 \cosh \frac{q_2}{2} + A_3 \cosh \frac{q_3}{2} = 0, \tag{152}$$

$$A_1 q_1 \sinh \frac{q_1}{2} + A_2 q_2 \sinh \frac{q_2}{2} + A_3 q_3 \sinh \frac{q_3}{2} = 0, \tag{153}$$

$$A_1 \omega_1 \cosh \frac{q_1}{2} + A_2 \omega_2 \cosh \frac{q_2}{2} + A_3 \omega_3 \cosh \frac{q_3}{2} = 0 \tag{154}$$

が成り立つ.  $\omega_1 = 1$  を代入して, 第一式から第三式を引くと,

$$A_2 = -\frac{(\omega_3 - 1) \cosh(q_3/2)}{(\omega_2 - 1) \cosh(q_2/2)} A_3 \tag{155}$$

となる. 第一式と第三式から  $A_2$  を消去して,

$$A_3 = -\frac{(\omega_2 - 1) \cosh(q_1/2)}{(\omega_2 - \omega_3) \cosh(q_3/2)} A_1. \tag{156}$$

これを (155) 式に代入して,

$$A_2 = \frac{(\omega_3 - 1) \cosh(q_1/2)}{(\omega_2 - \omega_3) \cosh(q_2/2)} A_1. \tag{157}$$

ここで  $A_1 = 1$  と置き,  $q_i, \omega_2, \omega_3$  の具体的な値を代入して分母を有理化した形にすると,

$$A_2 = \frac{\cos \frac{a}{2}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{-\cosh \frac{a}{2}A \cosh \frac{a}{2}B - \sqrt{3} \sinh \frac{a}{2}A \sin \frac{a}{2}B - i \sinh \frac{a}{2}A \sin \frac{a}{2}B + i\sqrt{3} \cosh \frac{a}{2}A \cos \frac{a}{2}B}{\cosh^2 \frac{a}{2}A \cos^2 \frac{a}{2}B + \sinh^2 \frac{a}{2}A \sin^2 \frac{a}{2}B} \quad (158)$$

$$A_3 = A_2^* \quad (159)$$

となるので,  $C_1 = A_2 + A_3, C_2 = \frac{1}{i}(A_2 - A_3)$ , より,

$$C_1 = -\cos \frac{a}{2}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\cosh \frac{a}{2}A \cosh \frac{a}{2}B + \sqrt{3} \sinh \frac{a}{2}A \sin \frac{a}{2}B}{\cosh^2 \frac{a}{2}A \cos^2 \frac{a}{2}B + \sinh^2 \frac{a}{2}A \sin^2 \frac{a}{2}B}, \quad (160)$$

$$C_2 = -\cos \frac{a}{2}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\sinh \frac{a}{2}A \sin \frac{a}{2}B - \sqrt{3} \cosh \frac{a}{2}A \cos \frac{a}{2}B}{\cosh^2 \frac{a}{2}A \cos^2 \frac{a}{2}B + \sinh^2 \frac{a}{2}A \sin^2 \frac{a}{2}B} \quad (161)$$

と求まる. 臨界モードのときの  $a, \lambda, A, B$  の値を代入すると,

$$C_1 = 0.120747484545044, \quad (162)$$

$$C_2 = 0.00134355276111146 \quad (163)$$

と求まる\*<sup>9</sup>.

$S_1, S_2$  は  $C_1, C_2$  を求めたときと手続きは同じで,  $\zeta = \pm \frac{1}{2}$  で  $W_o = DW_o = (D^2 - a^2)W_o = 0$  なので,

$$B_1 \sinh \frac{q_1}{2} + B_2 \sinh \frac{q_2}{2} + B_3 \sinh \frac{q_3}{2} = 0, \quad (164)$$

$$B_1 q_1 \cosh \frac{q_1}{2} + B_2 q_2 \cosh \frac{q_2}{2} + B_3 q_3 \cosh \frac{q_3}{2} = 0, \quad (165)$$

$$B_1 \omega_1 \sinh \frac{q_1}{2} + B_2 \omega_2 \sinh \frac{q_2}{2} + B_3 \omega_3 \sinh \frac{q_3}{2} = 0 \quad (166)$$

が成り立つことを用いる. このうち第一式と第三式から  $B_2$  を消去して,

$$B_3 = -\frac{(\omega_2 - 1) \sinh \frac{q_1}{2}}{(\omega_2 - \omega_3) \sinh \frac{q_3}{2}} B_1. \quad (167)$$

\*<sup>9</sup> Reid and Harris (1958)[4] の文献値は  $C_1 = -0.06151664, C_2 = +0.10388700$  である. 一部符号を間違えると文献値に近い値が出るので, 原論文のミスではないかと疑われる (あるいは筆者のミスか).

$B_1 = -i$  と置いて、少し計算を進めると、

$$B_3 = -\frac{\sin \frac{a}{2}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{\sinh aA \cos aB + \sqrt{3} \cosh aA \sin aB - i \cosh aA \sin aB + i\sqrt{3} \sinh aA \cos aB}{\sinh^2 aA \cos^2 aB + \cosh^2 aA \sin^2 aB} \quad (168)$$

となる。  $B_3 = B_2^*$  なので、

$$S_1 = -\sin \frac{a}{2}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\sinh aA \cos aB + \sqrt{3} \cosh aA \sin aB}{\sinh^2 aA \cos^2 aB + \cosh^2 aA \sin^2 aB} \quad (169)$$

$$S_2 = -\sin \frac{a}{2}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{-\cosh aA \sin aB + \sqrt{3} \sinh aA \cos aB}{\sinh^2 aA \cos^2 aB + \cosh^2 aA \sin^2 aB} \quad (170)$$

と求まる。臨界モードのときの  $a, \lambda, A, B$  の値を代入すると、

$$S_1 = -0.0115299316594336, \quad (171)$$

$$S_2 = 0.0130563027646823 \quad (172)$$

となる<sup>\*10</sup>。

### 5.1.3 成長率

中立曲線が求まったので、次に  $a$ - $R$  平面での擾乱の成長率を求める。支配方程式を行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} Pr(D^2 - a^2)^2 & -a^2 RPr \\ 1 & D^2 - a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(z) \\ T(z) \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} D^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(z) \\ T(z) \end{pmatrix} \quad (173)$$

である。これは固有値  $s$ , 固有関数  $(W, T)^T$  を求める一般化固有値問題である。これを数値的に解くことを考える<sup>\*11</sup>。  $0 \leq z \leq 1$  を  $N$  等分して  $N + 1$  点に分ける。このとき離散点は  $z_j$ ,  $0 \leq j \leq N$  となる。ここで  $\Delta z = 1/N$  である。  $W(z_j)$  を  $W_j$  などと表すことにする。  $(D^2 W)_j$ ,  $(D^4 W)_j$  はそれぞれ

$$(D^2 W)_j = \frac{W_{j+1} - 2W_j + W_{j-1}}{\Delta z^2} \quad (174)$$

$$(D^4 W)_j = \frac{W_{j+2} - 4W_{j+1} + 6W_j - 4W_{j-1} + W_{j-2}}{\Delta z^4} \quad (175)$$

<sup>\*10</sup> Reid and Harris (1958)[4] の文献値は  $S_1 = -0.01707389$ ,  $S_2 = +0.00345645$  である。一部符号を間違えると文献値に近い値が出るので、原論文のミスではないかと疑われる (あるいは筆者のミスか)。

<sup>\*11</sup> この部分は [5] を参考にした。

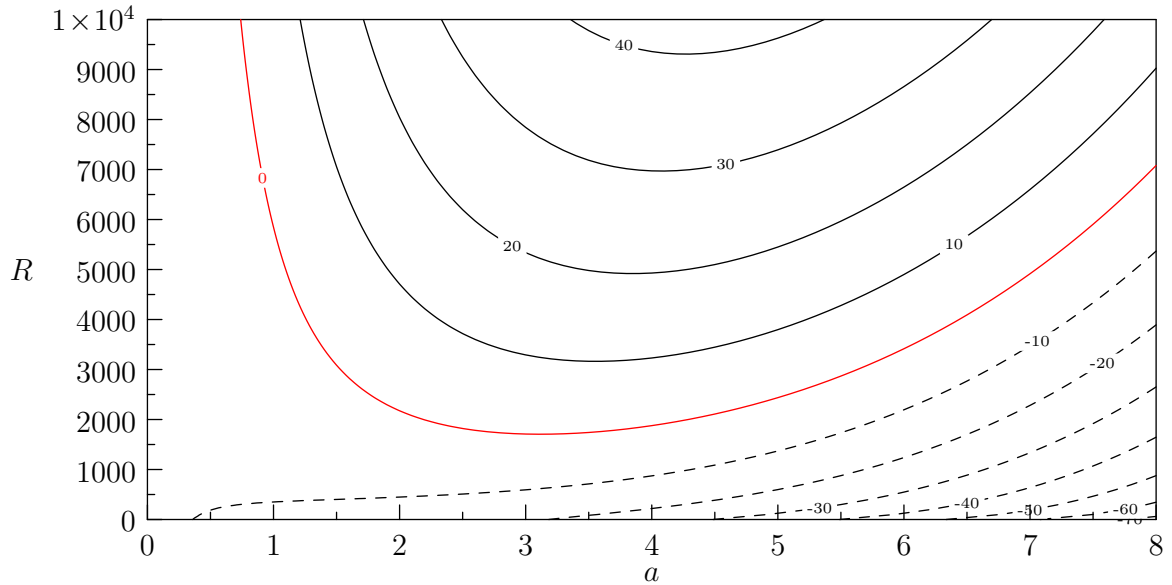


図4  $Pr = 1$  の場合の  $a$ - $R$  平面における擾乱の成長率 (rigid-rigid, TT). 2次精度有限差分で離散化して固有値問題を数値的に解いて求めた. 黒実線が正の成長率, 赤実線が成長率ゼロ (中立), 黒点線が負の成長率を表す.

となる. 境界条件を離散化すると,

$$\frac{W_{-1} - W_1}{2\Delta z} = 0, \quad \frac{W_{N+1} - W_{N-1}}{2\Delta z} = 0, \quad (176)$$

他の境界条件とまとめると,

$$W_0 = 0, \quad W_N = 0, \quad (177)$$

$$W_{-1} = W_1, \quad W_{N+1} = W_{N-1}, \quad (178)$$

$$T_0 = 0, \quad T_N = 0. \quad (179)$$

固有関数は  $2(N + 1) = 2N + 2$  点, そこから境界条件から既知の要素 4 点を除くと  $2N + 2 - 4 = 2(N - 1)$  次の正方行列になる. 離散化した行列を LAPACK の zgegv サブルーチンで解いた結果が図 4 である.

## 5.2 free-free の場合

下端が自由表面であるというのは非現実的であるが, free-free の場合は解析的に取り扱えるために, 歴史的には研究されてきた.

まず支配方程式と境界条件を改めて再掲すると

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2 - s/Pr)W = -a^2RW, \quad (180)$$

$$W = D^2W = D^4W = 0, \quad \text{at } z = 0, 1 \quad (181)$$

である。  $W_j = \sin j\pi z$  なる固有関数で展開する ( $j=1,2,\dots$ )。固有値関係式は

$$(j^2\pi^2 + a^2)(j^2\pi^2 + a^2 + s)(j^2\pi^2 + a^2 + s/Pr) = a^2R \quad (182)$$

となる。ここで  $s$  の 2 次方程式

$$\frac{1}{Pr}s^2 + (j^2\pi^2 + a^2)(1 + 1/Pr)s + (j^2\pi^2 + a^2)^2 - a^2R/(j^2\pi^2 + a^2) = 0 \quad (183)$$

を解くと、

$$s = -\frac{1}{2}(Pr + 1)(j^2\pi^2 + a^2) \pm \left\{ \frac{1}{4}(j^2\pi^2 + a^2)(Pr - 1)^2 + \frac{a^2RPr}{j^2\pi^2 + a^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (184)$$

となる。

### 5.2.1 臨界 Rayleigh 数

中立、つまり  $s = 0$  のとき、固有値関係式より、

$$R_j = \frac{1}{a^2}(j^2\pi^2 + a^2)^3 \quad (185)$$

これが  $j$  番目のモードの中立曲線である。ここで、  $R_1 < R_2 < \dots$  のうち  $R_1(a^2)$  の最小値を求めると、

$$\frac{dR}{da^2} = \frac{1}{a^4}(2a^2 - \pi^2)(\pi^2 + a^2)^2 = 0 \quad (186)$$

となるので、  $a = 2^{-\frac{1}{2}}\pi \approx 2.22\dots$ 、  $R_c = \min R_1(a^2) = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 657.511\dots$  である。図 5 に  $j = 1$  のモードの中立曲線を示す。

### 5.2.2 臨界モード

まだ求めてない。



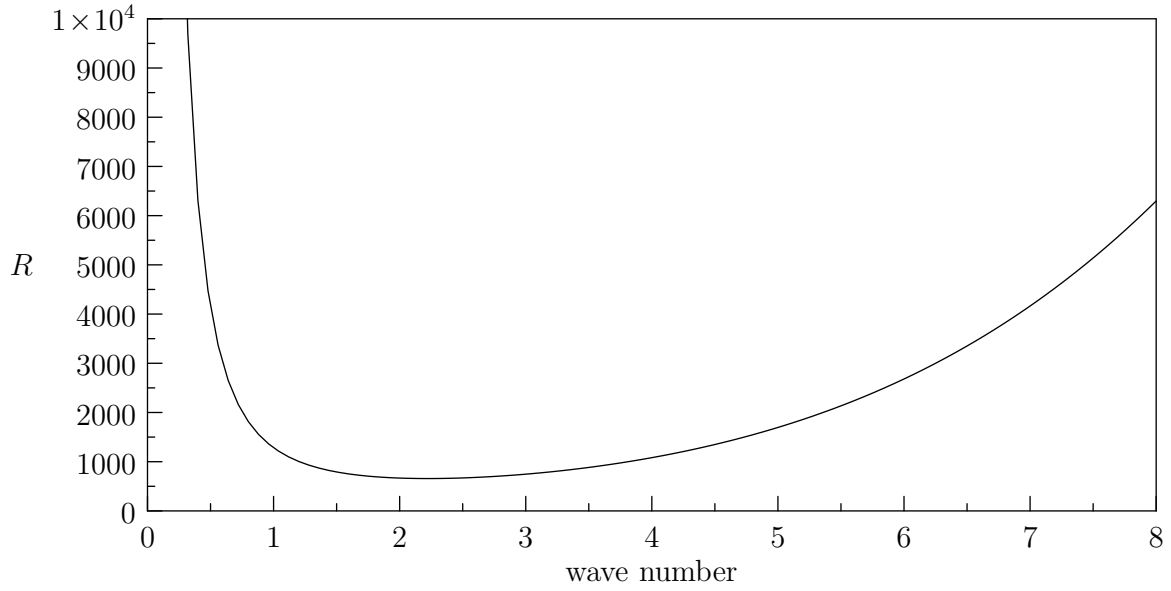


図5  $j = 1$  の中立曲線 (free-free, TT).

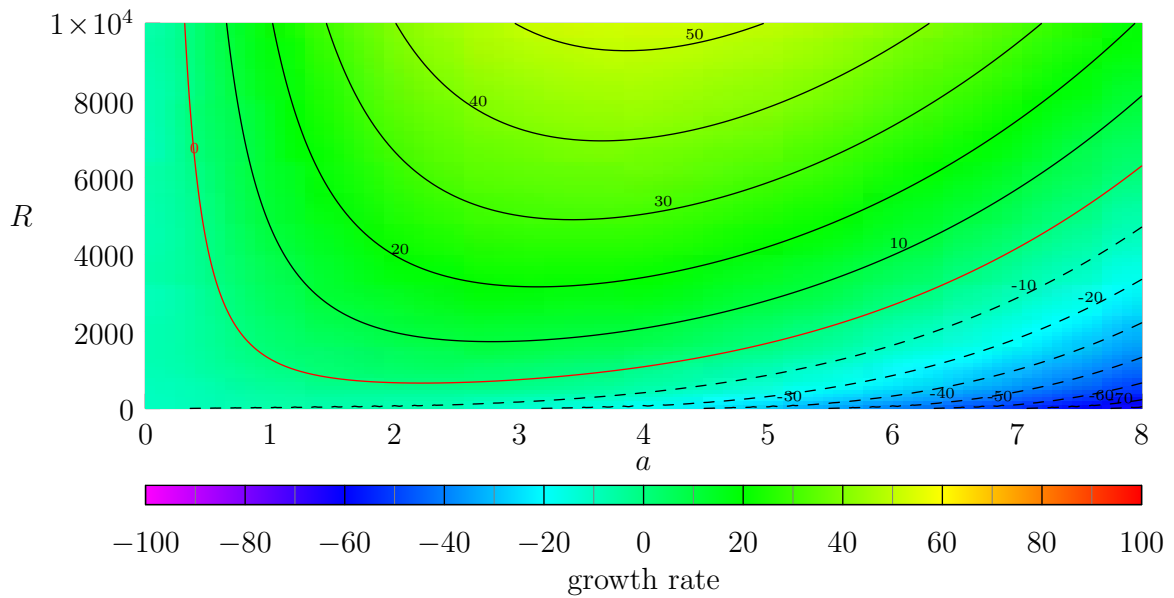


図6  $Pr = 1$  の場合の  $a$ - $R$  平面における擾乱の成長率 (free-free, TT). 黒実線が正の成長率, 赤実線が成長率ゼロ (中立), 黒点線が負の成長率を表す.

### 5.2.3 成長率

成長率は, 既に (184) 式で解析的に求まっている. これを図にしたのが図 6 である.

もちろん rigid-rigid の場合のプログラムを少しだけ変更して数値的に求めることもできる. rigid-rigid の場合と違うのは  $DW = 0$  でなくて  $D^2W = 0$  となることである. 境界条件を離散化すると,

$$\frac{W_{-1} - 2W_0 + W_1}{\Delta z^2} = 0, \quad \frac{W_{N+1} - 2W_N + W_{N-1}}{\Delta z^2} = 0, \quad (187)$$

他の境界条件とまとめると,

$$W_0 = 0, \quad W_N = 0, \quad (188)$$

$$W_{-1} = -W_1, \quad W_{N+1} = -W_{N-1}, \quad (189)$$

$$T_0 = 0, \quad T_N = 0. \quad (190)$$

固有関数は  $2(N + 1) = 2N + 2$  点, そこから境界条件から既知の要素 4 点を除くと  $2N + 2 - 4 = 2(N - 1)$  次の正方行列になる. 離散化した行列を LAPACK の zgegv サブルーチンで解いた結果が図 7 である. 解析解を元にした図と見分けがつかない程度には誤差は小さいようである.

## 5.3 free-rigid の場合

上端が free, 下端が rigid の場合を考える.

### 5.3.1 臨界 Rayleigh 数

rigid-rigid の場合の odd モードの臨界 Rayleigh 数を用いて求めることができる.

対称性より,  $z \in [0, 2]$  の rigid-rigid の場合の反対称モードが臨界モード/臨界 Rayleigh 数を与える. ということかということ, 下端で rigid, 中間で奇関数を与える条件

$$W = D^2W = D^4W = 0, \quad \text{at } z = 1 \quad (191)$$

を満たすべきだからである<sup>\*12</sup>. 高さは  $1/2$  倍され,  $a \propto d$ ,  $R \propto d^4$  であることから, 臨界波数は  $a_c \approx 5.365 \dots / 2 \approx 2.6825 \dots$ , 臨界 Rayleigh 数は  $R_c \approx 17610.39 \dots / 2^4 \approx 1100.649 \dots$  である.

---

\*12 よくわからない.

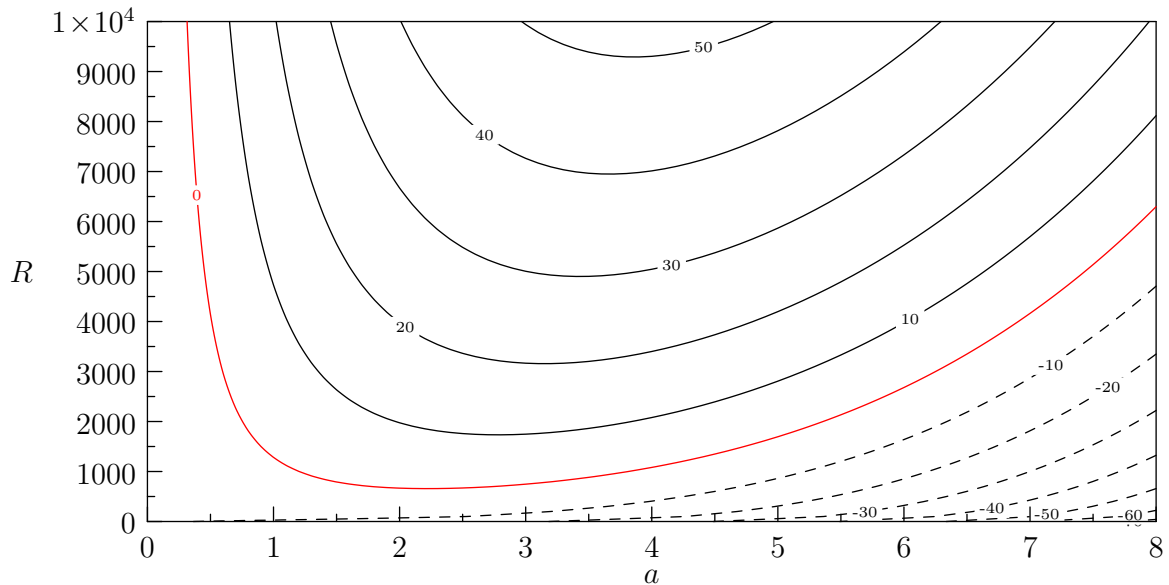


図7  $Pr = 1$  の場合の  $a$ - $R$  平面における擾乱の成長率 (free-free, TT). 2次精度有限差分で離散化して固有値問題を数値的に解いて求めた. 黒実線が正の成長率, 赤実線が成長率ゼロ (中立), 黒点線が負の成長率を表す.

### 5.3.2 臨界モード

まだ求めてない.

### 5.3.3 成長率

free-free, rigid-rigid の場合と同様に上端下端の境界条件を取り扱って, 離散化した行列を LAPACK の zgegv サブルーチンで解いた結果が図 8 である

## 6 弱非線形解析

弱非線形解析を行う.

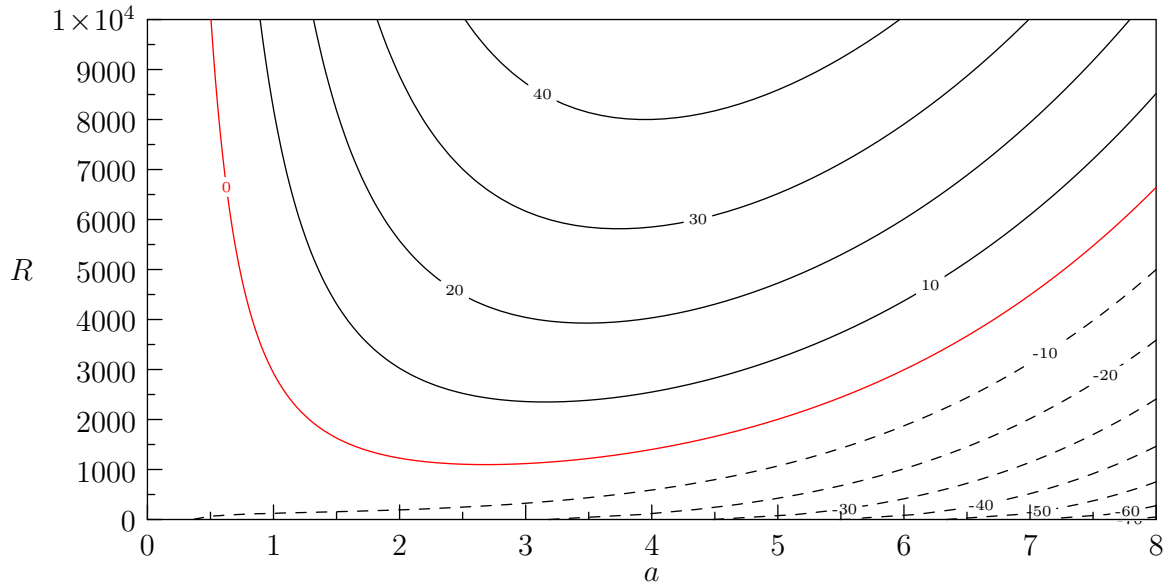


図 8  $Pr = 1$  の場合の  $a$ - $R$  平面における擾乱の成長率 (free-rigid, TT). 2 次精度有限差分で離散化して固有値問題を数値的に解いて求めた. 黒実線が正の成長率, 赤実線が成長率ゼロ (中立), 黒点線が負の成長率を表す.

## 6.1 単純な振幅展開

基本場を熱伝導解として, 振幅展開を行う<sup>\*13</sup>:

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}' + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{u}^{(3)} + \dots, \quad (192)$$

$$\theta = -z + \theta_0 + \varepsilon \theta' + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \varepsilon^3 \theta^{(3)} + \dots, \quad (193)$$

$$p = PrR \left( -\frac{1}{2} z^2 + z\theta_0 \right) + p_0 + \varepsilon p' + \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)} + \dots, \quad (194)$$

$$R = R^{(0)} + \varepsilon R^{(1)} + \varepsilon^2 R^{(2)} + \varepsilon^3 R^{(3)} + \dots. \quad (195)$$

<sup>\*13</sup> [5] を参考にした. なお, ここで現れる定数  $\theta_0$  は適当に無次元化されているものとする.

無次元化した基礎方程式\*14

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + PrR\theta \mathbf{k} + Pr\Delta \mathbf{u}, \quad (196)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (197)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \Delta \theta \quad (198)$$

に代入すると,  $O(1)$  の式は両辺ともゼロとなり消える.

$O(\varepsilon)$  の式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p' + PrR^{(0)}\theta' \mathbf{k} + Pr\Delta \mathbf{u}', \quad (199)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (200)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} - w' = \Delta \theta' \quad (201)$$

となり, 線形方程式と同じ形になる.  $O(\varepsilon^2)$  の式は, いよいよ移流項が入ってきて,

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla p^{(2)} + (PrR^{(0)}\theta^{(2)} + PrR^{(1)}\theta') \mathbf{k} + Pr\Delta \mathbf{u}^{(2)}, \quad (202)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)} = 0, \quad (203)$$

$$\frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \theta' - w^{(2)} = \Delta \theta^{(2)} \quad (204)$$

となる.  $O(\varepsilon^3)$  の式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^{(3)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(2)} \\ = -\nabla p^{(3)} + (PrR^{(0)}\theta^{(3)} + PrR^{(1)}\theta^{(2)} + PrR^{(2)}\theta') \mathbf{k} + Pr\Delta \mathbf{u}^{(3)}, \end{aligned} \quad (205)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(3)} = 0, \quad (206)$$

$$\frac{\partial \theta^{(3)}}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \theta^{(2)} + (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla) \theta' - w^{(3)} = \Delta \theta^{(3)} \quad (207)$$

となる.

---

\*14 線形化してから無次元化したので, これは導出していない. (11) 式において,  $p_* + \rho_0 g z_*$  を  $p_*$ ,  $\theta_0 + \theta_*$  を  $\theta_*$  と置き直して無次元化すると導出できる. このとき熱伝導解は,  $P_* = p_0 - g\rho_0 \frac{1}{2} \alpha \beta z_*^2$ ,  $\theta_* = -\beta z_*$  となる.

$O(\varepsilon^4)$  の式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^{(4)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(3)} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(2)} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(3)} \\ = -\nabla p^{(4)} + (PrR^{(0)}\theta^{(4)} + PrR^{(1)}\theta^{(3)} + PrR^{(2)}\theta^{(2)} + PrR^{(3)}\theta')\mathbf{k} \\ + Pr\Delta \mathbf{u}^{(4)}, \end{aligned} \quad (208)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(4)} = 0, \quad (209)$$

$$\frac{\partial \theta^{(4)}}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\theta^{(3)} + (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla)\theta^{(2)} + (\mathbf{u}^{(3)} \cdot \nabla)\theta' - w^{(4)} = \Delta\theta^{(4)} \quad (210)$$

となる.

$O(\varepsilon^5)$  の式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^{(5)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(4)} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}^{(3)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(2)} + (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(3)} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(4)} \\ = -\nabla p^{(5)} + (PrR^{(0)}\theta^{(5)} + PrR^{(1)}\theta^{(4)} + PrR^{(2)}\theta^{(3)} + PrR^{(3)}\theta^{(2)} + PrR^{(4)}\theta')\mathbf{k} \\ + Pr\Delta \mathbf{u}^{(5)}, \end{aligned} \quad (211)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(5)} = 0, \quad (212)$$

$$\frac{\partial \theta^{(5)}}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\theta^{(4)} + (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla)\theta^{(3)} + (\mathbf{u}^{(3)} \cdot \nabla)\theta^{(2)} + (\mathbf{u}^{(4)} \cdot \nabla)\theta' - w^{(5)} = \Delta\theta^{(5)} \quad (213)$$

となる.

境界条件は線形なので、各々の次数で同じ形の境界条件が成り立つとすればよい.

この問題において、 $0 < \varepsilon \ll 1$  のときの定常解を求める. 振幅方程式は次数の低い方から解いていく必要がある. つまり、まず  $O(\varepsilon)$  で線形定常解を求めないといけない. これまで線形定常解を水平波数ベクトルまで含めて求めてはいなかったので、ここで求めておくことにする. まずは、簡単な 2 次元ロール状対流の場合の解を求めることにする. つまり、 $y$  方向には物理量は依存しないとして考える.

### 6.1.1 $O(\varepsilon)$ の式

速度ベクトルの成分は流れ関数を用いて

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (214)$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (215)$$

と書ける. ここで  $y$  方向の渦度を  $\omega_2$  と書くと,

$$\omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \Delta\psi \quad (216)$$

であることに注意すると, 渦度方程式は,

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial t} = -PrR^{(0)}\frac{\partial\theta}{\partial x} + Pr\Delta\omega_2 \quad (217)$$

となる. これらがプライム付きの方程式でも成り立つこと, いま定常解を求めようとしていることを用いて,

$$R^{(0)}\frac{\partial\theta'}{\partial x} - \Delta^2\psi' = 0, \quad (218)$$

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x} - \Delta\theta' = 0 \quad (219)$$

を解けばよいことになる.  $\psi'$  を消去すると,

$$\nabla^6\psi' = R^{(0)}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} \quad (220)$$

となり, 固有値  $R^{(0)}$ , 固有関数  $\psi'$  を求める一般化固有値問題に帰着する. いま境界条件として上下端で温度固定, free-free とすると, 最小固有値すなわち臨界 Rayleigh 数  $R^{(0)} = R_c = 27\pi^4/4$ , 臨界波数  $a_c = \pi/\sqrt{2}$ , 固有モードすなわち臨界モード

$$\psi' = A' \sin \pi z \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}x, \quad (221)$$

$$\theta' = -\frac{\sqrt{2}}{3\pi}A' \sin \pi z \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}}x \quad (222)$$

を用いて  $A'$  を求めることになる\*15.

ここで, Malkus and Veronis (1958) に倣って,  $\psi^{(2)}, \psi^{(3)}, \dots$  は  $\psi'$  と直交するとする.

---

\*15  $x$  方向を  $\sin$  で展開してよい理由は, 空間方向には一様なため位相を考慮する必要がないからである. 言い替えれば, 臨界モードは勝手な位相を持って出現するが, その位相がゼロになるように系をガリレイ変換したと考えれば良い.

### 6.1.2 $O(\varepsilon^2)$ の式

$O(\varepsilon^2)$  の運動方程式から渦度方程式を作ると,

$$PrR^{(0)}\frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x} - Pr\Delta^2\psi^{(2)} = -PrR^{(1)}\frac{\partial\theta'}{\partial x} - \left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi' \quad (223)$$

$$-w^{(2)} - \Delta\theta^{(2)} = -\frac{\partial\psi'}{\partial z}\frac{\partial\theta'}{\partial x} + \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\theta'}{\partial z} \quad (224)$$

となる. 右辺を計算して整理すると,

$$PrR^{(0)}\frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x} - Pr\Delta^2\psi^{(2)} = -PrR^{(1)}\frac{A'}{3}\sin\pi z\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}x \quad (225)$$

$$-w^{(2)} - \Delta\theta^{(2)} = -\frac{\pi}{6}A'^2\sin 2\pi z \quad (226)$$

となる.  $R^{(1)}$  を決定するために, (225) 式に  $\psi'$  を, (226) 式に  $-PrR^{(0)}\theta'$  をかけて足し,

$$\begin{aligned} & PrR^{(0)}\left(\psi'\frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x} - \theta'\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x}\right) + Pr\left(R^{(0)}\theta'\Delta\theta^{(2)} - \psi'\Delta^2\psi^{(2)}\right) \\ &= -PrR^{(1)}\psi'\frac{A'}{3}\sin\pi z\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}x + PrR^{(0)}\theta'\frac{\pi}{6}A'^2\sin 2\pi z \end{aligned} \quad (227)$$

となる. これを領域積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \int dx \left[ PrR^{(0)}\left(\frac{\partial\psi'\theta^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(2)}\theta'}{\partial x}\right) + \psi^{(2)}\left(PrR^{(0)}\frac{\partial\theta'}{\partial x} - Pr\Delta^2\psi'\right) \right. \\ & \quad \left. + \theta^{(2)}\left(-PrR^{(0)}\frac{\partial\psi'}{\partial x} + PrR^{(0)}\Delta\theta'\right) + PrR^{(0)}\left\{\nabla\cdot(\theta'\nabla\theta^{(2)}) - \nabla\cdot(\theta^{(2)}\nabla\theta')\right\} \right. \\ & \quad \left. - Pr\left\{\nabla\cdot(\psi'\nabla\Delta\psi^{(2)}) - \nabla\cdot(\Delta\psi^{(2)}\nabla\psi') + \nabla\cdot(\Delta\psi'\nabla\psi^{(2)}) - \nabla\cdot(\psi^{(2)}\nabla\Delta\psi')\right\} \right] \\ &= \int_0^1 dz \int dx \left(-PrR^{(1)}\psi'\frac{A'}{3}\sin\pi z\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}x + PrR^{(0)}\theta'\frac{\pi}{6}A'^2\sin 2\pi z\right) \end{aligned} \quad (228)$$

となる. ここで,  $x$  方向に周期的境界条件,  $z$  方向は応力なし境界条件を用いる. また, (218) 式, (219) 式を用いると,

$$\int_0^1 dz \int dx \left(-PrR^{(1)}\psi'\frac{A'}{3}\sin\pi z\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right) = 0 \quad (229)$$

となる. 従って, 任意の  $\psi'$ ,  $A'$  に対してこれが成り立つためには,  $R^{(1)} = 0$  でなければならない.



解の形は,

$$\begin{aligned}\theta^{(2)} &= -\frac{1}{24\pi}A'^2 \sin 2\pi z, \\ \psi^{(2)} &= 0\end{aligned}\tag{230}$$

となるが, 物理的には  $\psi^{(2)} = 0$  ならば, 対応する  $\theta^{(2)}$  もゼロであろう. というわけで, ここでは  $\theta^{(2)} = 0$  とおく.

### 6.1.3 $O(\varepsilon^3)$ の式

$O(\varepsilon^3)$  の運動方程式から渦度方程式を作ると,  $R^{(1)} = 0$  に注意して,

$$\begin{aligned}PrR^{(0)}\frac{\partial\theta^{(3)}}{\partial x} - Pr\Delta^2\psi^{(3)} &= -PrR^{(2)}\frac{\partial\theta'}{\partial x} \\ &+ \left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^{(2)} \\ &+ \left(\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi',\end{aligned}\tag{231}$$

$$\frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial x} - \Delta\theta^{(3)} = -\frac{\partial\psi'}{\partial z}\frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z}\frac{\partial\theta'}{\partial x} + \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial\theta'}{\partial z}\tag{232}$$

となる. 右辺を計算して整理すると,

$$Pr\Delta^2\psi^{(3)} - PrR^{(0)}\frac{\partial\theta^{(3)}}{\partial x} = PrR^{(2)}\frac{1}{3}A' \sin \pi z \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}x,\tag{233}$$

$$\frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial x} - \Delta\theta^{(3)} = \frac{\pi}{12\sqrt{2}}A'^3 \sin \pi z \cos 2\pi z \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}}x\tag{234}$$

となる. (233) 式に  $\psi'$  を, (234) 式に  $-PrR^{(0)}\theta'$  をかけて足し, 領域積分すると,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dz \int dx \left[ PrR^{(0)} \left( \frac{\partial\psi'\theta^{(3)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(3)}\theta'}{\partial x} \right) + \psi^{(3)} \left( PrR^{(0)}\frac{\partial\theta'}{\partial x} - Pr\Delta^2\psi' \right) \right. \\ &\quad + \theta^{(3)} \left( PrR^{(0)}\frac{\partial\psi'}{\partial x} - PrR^{(0)}\Delta\theta' \right) + PrR^{(0)} \left\{ \nabla \cdot (\theta'\nabla\theta^{(3)}) - \nabla \cdot (\theta^{(3)}\nabla\theta') \right\} \\ &\quad \left. - Pr \left\{ \nabla \cdot (\psi'\nabla\Delta\psi^{(3)}) - \nabla \cdot (\Delta\psi^{(3)}\nabla\psi') + \nabla \cdot (\Delta\psi'\nabla\psi^{(3)}) - \nabla \cdot (\psi^{(3)}\nabla\Delta\psi') \right\} \right] \\ &= \int_0^1 dz \int dx \left( PrR^{(2)}\frac{A'^2}{3} \sin^2 \pi z \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}}x + PrR^{(0)}\frac{1}{36}A'^4 \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}}x \sin^2 \pi z \cos 2\pi z \right)\end{aligned}\tag{235}$$

となる. 左辺はゼロになり,  $\int_0^1 dz \sin^2 \pi z \cos 2\pi z = -1/4$  を用いると\*16,

$$R^{(2)} \frac{A'^2}{3} \frac{1}{4} - R^{(0)} \frac{1}{36} A'^4 \frac{1}{8} = 0 \quad (236)$$

となるので,  $R^{(0)}$  に値を代入して  $R^{(2)}$  について整理すると,

$$A' = 0, \pm \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2} \sqrt{R^{(2)}} \quad (237)$$

を得る.  $\varepsilon^2$  の精度で  $R = R_c + \varepsilon^2 R^{(2)}$  なので,  $\varepsilon$  について解くと,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{R - R_c}{R^{(2)}}} \quad (238)$$

となるので,  $\varepsilon^2$  の精度で

$$\psi = \varepsilon \psi' = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2} \sqrt{R - R_c} \sin \pi z \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x, \quad (239)$$

$$\theta = -z + \varepsilon \theta' = -z - \frac{8}{9\pi^3} \sqrt{R - R_c} \sin \pi z \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \quad (240)$$

を得る.

齊次方程式は  $O(\varepsilon)$  の式と同じ形なので, 齊次解は形も同じことを考慮する. また, 6 階の偏微分方程式に書き直すと,

$$\Delta^6 \psi^{(3)} - R^{(0)} \frac{\partial^2 \psi^{(3)}}{\partial x^2} = -\frac{9}{64} \pi^6 A'^3 \sin 3\pi z \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \quad (241)$$

となるので, 流れ関数  $\psi^{(3)}$  は

$$\psi^{(3)} = C_0 A'^3 \sin 3\pi z \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \quad (242)$$

と推定される. これを解くと,

$$C_0 = \frac{9}{54656} \quad (243)$$

---

\*16 これは,

$$\sin^2 \pi z \cos 2\pi z = \sin^2 \pi z (1 - 2 \sin^2 \pi z) = \sin^2 \pi z - 2 \sin^4 \pi z,$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \pi z &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi z \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\pi z + \frac{1}{4} \cos^2 2\pi z \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\pi z + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\pi z \right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\pi z + \frac{1}{8} \cos 2\pi z \end{aligned}$$

となることから求まる.

を得る. 温度  $\theta^{(3)}$  は,

$$\theta^{(3)} = C_1 A'^3 \sin 3\pi z \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \quad (244)$$

と推定して,

$$C_1 = \frac{6841\sqrt{2}}{3115392\pi} \quad (245)$$

を得る.

#### 6.1.4 $O(\varepsilon^4)$ の式

$O(\varepsilon^4)$  の運動方程式から渦度方程式を作ると,  $R^{(1)} = 0$  に注意して,

$$\begin{aligned} PrR^{(0)} \frac{\partial \theta^{(4)}}{\partial x} - Pr\Delta^2 \psi^{(4)} &= -PrR^{(2)} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} - PrR^{(3)} \frac{\partial \theta'}{\partial x} \\ &+ \left( \frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(3)} \\ &+ \left( \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(2)} \\ &+ \left( \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi', \end{aligned} \quad (246)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^{(4)}}{\partial x} - \Delta \theta^{(4)} &= -\frac{\partial \psi'}{\partial z} \frac{\partial \theta^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \theta^{(3)}}{\partial z} \\ &- \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial z} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial \theta'}{\partial z} \end{aligned} \quad (247)$$

となる. 右辺を計算して整理すると,

$$Pr\Delta^2 \psi^{(4)} - PrR^{(0)} \frac{\partial \theta^{(4)}}{\partial x} = -\frac{36\pi^4 A'^4}{54656\sqrt{2}} (\sin^3 \pi z \cos \pi z - 3 \cos 3\pi z \sin \pi z) \sin \sqrt{2}\pi z \quad (248)$$

$$\begin{aligned} \Delta \theta^{(4)} - \frac{\partial \psi^{(4)}}{\partial x} &= C_1 \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} A'^4 \sin 3\pi z \cos \pi z \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \\ &+ C_1 \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}} A'^4 \sin \pi z \cos 3\pi z \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \\ &- C_0 \pi A'^4 \sin \pi z \cos 3\pi z \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \\ &- \frac{\pi}{3} C_0 A'^4 \sin 3\pi z \cos \pi z \cos^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} x \end{aligned} \quad (249)$$

となる. (248) 式に  $\psi'$  を, (249) 式に  $-PrR^{(0)}\theta'$  をかけて足して領域積分すると,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz \int dx \left[ PrR^{(0)} \left( \frac{\partial\psi'\theta^{(4)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(4)}\theta'}{\partial x} \right) + \psi^{(4)} \left( PrR^{(0)} \frac{\partial\theta'}{\partial x} - Pr\Delta^2\psi' \right) \right. \\
& \quad + \theta^{(4)} \left( PrR^{(0)} \frac{\partial\psi'}{\partial x} - PrR^{(0)}\Delta\theta' \right) + PrR^{(0)} \left\{ \nabla \cdot (\theta'\nabla\theta^{(4)}) - \nabla \cdot (\theta^{(4)}\nabla\theta') \right\} \\
& \quad \left. - Pr \left\{ \nabla \cdot (\psi'\nabla\Delta\psi^{(4)}) - \nabla \cdot (\Delta\psi^{(4)}\nabla\psi') + \nabla \cdot (\Delta\psi'\nabla\psi^{(4)}) - \nabla \cdot (\psi^{(4)}\nabla\Delta\psi') \right\} \right] \\
& = -Pr \frac{\pi}{12} R^{(3)} A'^2 \tag{250}
\end{aligned}$$

となる. ここで左辺はゼロであるから, 右辺もゼロで,  $R^{(3)} = 0$  となる.

$\psi^{(4)}$  に関する 6 次の偏微分方程式を作ると, 非斉次項に  $\sin\sqrt{2}\pi x$ , すなわち  $x$  について高調波のみが現れるので, 解もそれに対応して高調波をもつ解となる. いまは  $\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}x$  に比例する解にのみ興味があるため, ここでは無視する. 従って  $\psi^{(4)} = 0$ .  $\theta^{(4)}$  はゼロでなくてもよいが,  $\psi^{(4)}$  がゼロならば物理的にはゼロであろう. というわけで  $\theta^{(4)} = 0$ .

### 6.1.5 $O(\varepsilon^5)$ の式

$O(\varepsilon^5)$  の運動方程式から渦度方程式を作ると,  $R^{(1)} = 0$ ,  $R^{(3)} = 0$  に注意して,

$$\begin{aligned}
PrR^{(0)} \frac{\partial\theta^{(5)}}{\partial x} - Pr\Delta^2\psi^{(5)} & = -PrR^{(2)} \frac{\partial\theta^{(3)}}{\partial x} - PrR^{(4)} \frac{\partial\theta'}{\partial x} \\
& + \left( \frac{\partial\psi'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(4)} \\
& + \left( \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(3)} \\
& + \left( \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(2)} \tag{251}
\end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{\partial\psi^{(4)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(4)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi', \tag{252}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi^{(5)}}{\partial x} - \Delta\theta^{(5)} & = -\frac{\partial\psi'}{\partial z} \frac{\partial\theta^{(4)}}{\partial x} + \frac{\partial\psi'}{\partial x} \frac{\partial\theta^{(4)}}{\partial z} \\
& - \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial\theta^{(3)}}{\partial x} + \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial\theta^{(3)}}{\partial z} - \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial z} \frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial\psi^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial z} \\
& - \frac{\partial\psi^{(4)}}{\partial z} \frac{\partial\theta'}{\partial x} + \frac{\partial\psi^{(4)}}{\partial x} \frac{\partial\theta'}{\partial z} \tag{253}
\end{aligned}$$

となる. 右辺を計算して整理すると,

$$Pr\Delta^2\psi^{(5)} - PrR^{(0)}\frac{\partial\theta^{(5)}}{\partial x} = -Pr\frac{3\pi^2}{32}A'^5\frac{6841}{1038464}\sin 3\pi z\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}} + PrR^{(4)}\frac{A'}{3}\sin\pi z\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}x \quad (254)$$

$$\Delta\theta^{(5)} - \frac{\partial\psi^{(5)}}{\partial x} = 0 \quad (255)$$

となる. (254) 式に  $\psi'$  を, (255) 式に  $-PrR^{(0)}\theta'$  をかけて足して領域積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \int dx \left[ PrR^{(0)} \left( \frac{\partial\psi'\theta^{(5)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(5)}\theta'}{\partial x} \right) + \psi^{(5)} \left( PrR^{(0)}\frac{\partial\theta'}{\partial x} - Pr\Delta^2\psi' \right) \right. \\ & \quad + \theta^{(5)} \left( PrR^{(0)}\frac{\partial\psi'}{\partial x} - PrR^{(0)}\Delta\theta' \right) + PrR^{(0)} \left\{ \nabla \cdot (\theta'\nabla\theta^{(5)}) - \nabla \cdot (\theta^{(5)}\nabla\theta') \right\} \\ & \quad \left. - Pr \left\{ \nabla \cdot (\psi'\nabla\Delta\psi^{(5)}) - \nabla \cdot (\Delta\psi^{(5)}\nabla\psi') + \nabla \cdot (\Delta\psi'\nabla\psi^{(5)}) - \nabla \cdot (\psi^{(5)}\nabla\Delta\psi') \right\} \right] \\ & = \int_0^1 dz \int dx \left[ -Pr\frac{3\pi^2}{32}A'^5\frac{6841}{1038464}\sin 3\pi z\sin\pi z\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right. \\ & \quad \left. + PrR^{(4)}\frac{A'}{3}\sin^2\pi z\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{2}}x \right] \\ & = \int_0^1 dz \int dx \left[ PrR^{(4)}\frac{A'}{3}\sin^2\pi z\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{2}}x \right] \quad (256) \end{aligned}$$

となる. 左辺はゼロなので, 右辺もゼロ, 従って  $R^{(4)} = 0^{*17}$ .

### 6.1.6 非線形数値計算

smodel を用いて, 非線形の Boussinesq 方程式を定常状態になるまで時間発展数値計算した. 横軸に  $R$ , 縦軸に流れ関数  $\psi$  の振幅の自乗をプロットしたのが図 9 である. 特に臨界 Rayleigh 数付近で弱非線形計算による見積りが数値計算で得られた定常状態をよく記述していることが分かる.

弱非線形解析が数値計算結果をどのくらいよく記述しているかを定量的に見るために, 数値計算結果の流れ関数  $\psi_{\text{exp}}$  の自乗と, 弱非線形解析の結果の流れ関数  $\psi_{\text{theory}}$  の自乗の差をとり,  $\psi_{\text{exp}}^2$  で割った量の  $R$  依存性を示したのが図 10 である. 実線は  $\psi_{\text{theory}}$  が  $O(\varepsilon)$  までの近似, 破線は  $\psi_{\text{theory}}$  が  $O(\varepsilon^3)$  までの近似を用いたものである.  $R = 3200$  程度まで  $O(\varepsilon^3)$  の誤差の方が  $O(\varepsilon)$  の誤差よりも小さい. 言い替えれば,  $R \in [R_c, 3200]$  の範囲で  $O(\varepsilon^3)$  の弱非線形解は  $O(\varepsilon)$  の弱非線形解よりもよい近似を与える.

\*17 おかしい気がする.

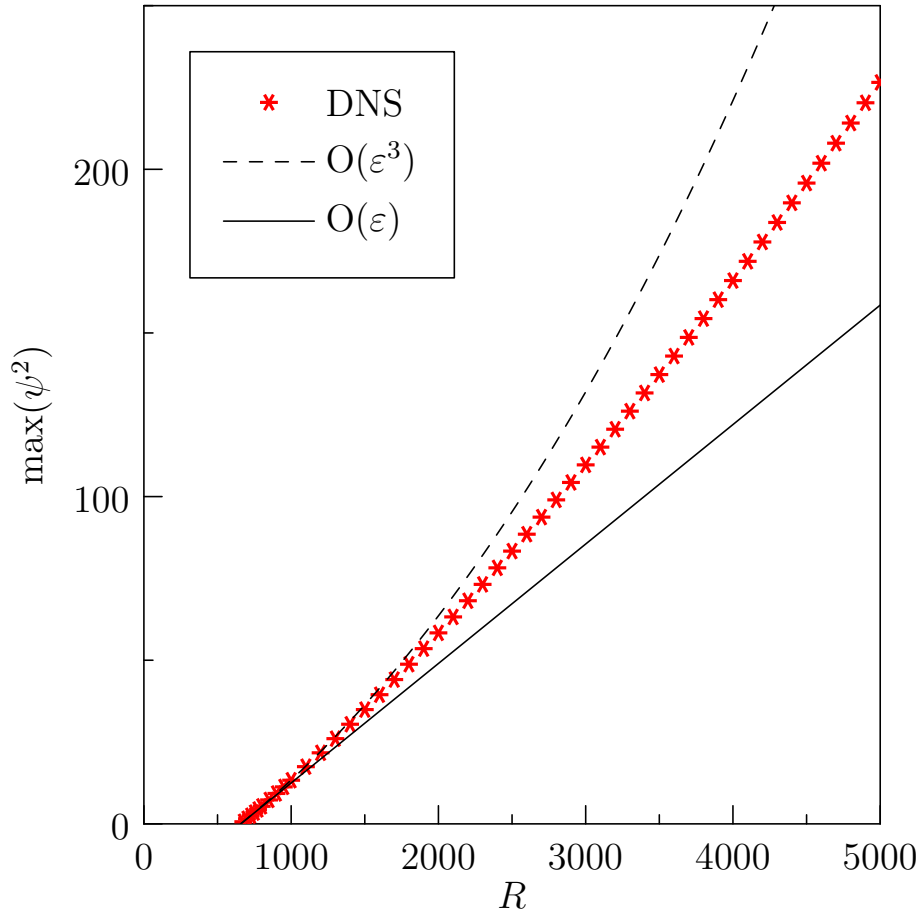


図9  $Pr = 1$  の場合の非線形 Boussinesq 方程式の時間発展問題を定常状態になるまで計算し、流れ関数の振幅の自乗の Rayleigh 数依存性を求めた。赤点が数値計算の結果、黒実線が  $O(\varepsilon)$  までの近似、黒破線が  $O(\varepsilon^3)$  までの近似。

大きな  $R$  (例えば  $R = 5000$ ) において、高次の弱非線形解の方が低次の弱非線形解よりも近似が悪くなるのは、弱非線形解は  $R_c$  付近でのフィッティングがよくなるように多項式近似しているからである。

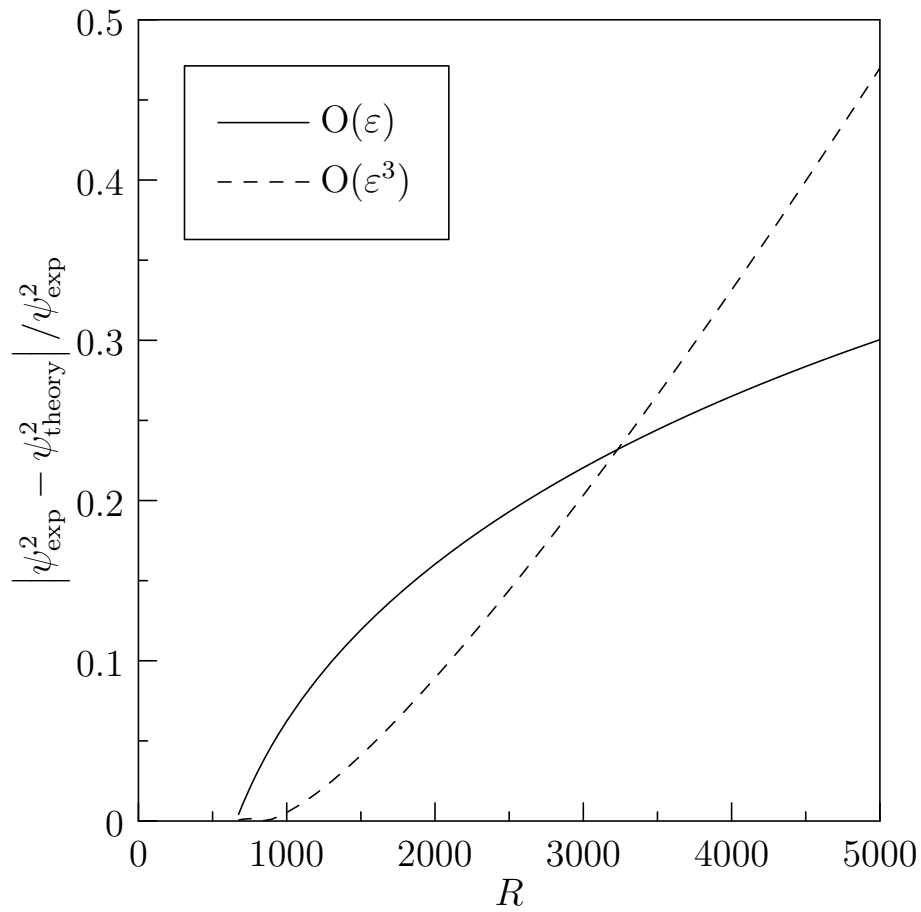


図 10  $Pr = 1$  の場合の非線形 Boussinesq 方程式の時間発展問題を定常状態になるまで計算して得られた流れ関数の振幅と、弱非線形解析から得られた流れ関数の振幅の自乗誤差.

## 7 変分法

変分問題として臨界 Rayleigh 数を導く<sup>\*18</sup>.

$$G = (D^2 - a^2)W, \quad (257)$$

$$F = (D^2 - a^2)^2 W = (D^2 - a^2)G \quad (258)$$

と置くと,

$$(D^2 - a^2)F = -Ra^2W \quad (259)$$

<sup>\*18</sup> [2] を参考にした.

である。  $W$  についての境界条件は,

$$W = 0, \quad (D^2 - a^2)^2 W = 0 \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (260)$$

さらに rigid か free かで  $DW = 0$  または  $D^2W = 0$  である。これを  $W$  と  $F$  の境界条件に読みかえると,

$$W = 0, \quad F = 0 \quad \text{at } z = 0, 1. \quad (261)$$

で, さらに rigid か free かで  $DW = 0$  または  $D^2W = 0$  である。

解を  $R_j$  と書く。 (259) 式に  $F_i$  をかける。積分すると,

$$\int_0^1 F_i (D^2 - a^2) F_j dz = -R_j a^2 \int_0^1 F_i W_j dz = -R_j a^2 \int_0^1 W_j (D^2 - a^2) G_i dz \quad (262)$$

ここで,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_0^1 F_i D^2 F_j - a^2 F_i F_j dz = [F_i D F_j]_0^1 - \int_0^1 D F_i D F_j + a^2 F_i F_j dz \\ &= - \int_0^1 D F_i D F_j + a^2 F_i F_j dz. \end{aligned} \quad (263)$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -R_j a^2 \left( \int_0^1 W_j D^2 G_i dz + \int_0^1 -a^2 W_j G_i dz \right) \\ &= -R_j a^2 \left( [W_j D G_i]_0^1 - \int_0^1 D W_j D G_i dz + \int_0^1 -a^2 W_j G_i dz \right) \\ &= -R_j a^2 \left( -[G_i D W_j]_0^1 + G_i (D^2 - a^2) W_j dz \right) \\ &= -R_j a^2 \int_0^1 G_i G_j dz. \end{aligned} \quad (264)$$

従って,

$$\int_0^1 D F_i D F_j + a^2 F_i F_j dz = R_j a^2 \int_0^1 G_i G_j dz \quad (265)$$

となる。  $i$  と  $j$  を入れ換えて,

$$\int_0^1 D F_j D F_i + a^2 F_j F_i dz = R_i a^2 \int_0^1 G_j G_i dz \quad (266)$$



となるから,

$$R_j a^2 \int_0^1 G_i G_j dz = R_i a^2 \int_0^1 G_j G_i dz. \quad (267)$$

$R_i$  と  $R_j$  は  $i \neq j$  のとき異なる値をとるから,

$$\int_0^1 G_i G_j dz = 0 \quad \text{if } i \neq j. \quad (268)$$

つまり, 異なる  $R_j$  に属する  $G_j$  は直交する.  $i = j$  のとき, (265) 式は,

$$R_j a^2 \int_0^1 G_j^2 dz = \int_0^1 (DF_j)^2 + a^2 F_j^2 dz, \quad (269)$$

$$R_j = \frac{\int_0^1 (DF_j)^2 + a^2 F_j^2 dz}{a^2 \int_0^1 G_j^2 dz} =: \frac{I_1}{a^2 I_2} \quad (270)$$

つまり,  $R_j$  は二つの正定値積分の比である.  $W$  を少し変化させたとき, つまり変分  $\delta W$  を取ったときに対応する  $R$  の変分を  $\delta R$  とする. 変分  $\delta W, \delta F$  の境界条件は

$$\delta W = 0, \quad \delta F = 0, \quad \text{at } z = 0, 1 \quad (271)$$

さらに, rigid か free かで

$$D\delta W = 0 \quad \text{or} \quad D^2\delta W = 0 \quad \text{at } z = 0, 1 \quad (272)$$

である.  $\delta R$  は,

$$\delta R = \frac{1}{a^2 I_2} \left( \delta I_1 - \frac{I_1}{I_2} \delta I_2 \right) = \frac{1}{a^2 I_2} (\delta I_1 - R a^2 \delta I_2). \quad (273)$$

ここで,

$$\delta I_1 = 2 \int_0^1 DFD\delta F + a^2 F\delta F dz, \quad (274)$$

$$\delta I_2 = 2 \int_0^1 G\delta G dz = 2 \int_0^1 (D^2 - a^2)W(D^2 - a^2)\delta W dz. \quad (275)$$

部分積分して,

$$\delta I_1 = 2 [\delta F D F]_0^1 - 2 \int_0^1 \delta F (D^2 - a^2) F dz = -2 \int_0^1 \delta F (D^2 - a^2) F dz, \quad (276)$$

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= 2 \int_0^1 (D^2 W - a^2 W) (D^2 - a^2) \delta W dz \\ &= 2 [D W (D^2 - a^2) \delta W]_0^1 - 2 \int_0^1 D W (D^2 - a^2) D \delta W dz - 2 a^2 \int_0^1 W (D^2 - a^2) \delta W dz \\ &= -2 [W (D^2 - a^2) D^2 \delta W]_0^1 + 2 \int_0^1 W (D^2 - a^2)^2 \delta W dz = 2 \int_0^1 W \delta F dz \end{aligned} \quad (277)$$

となるので,

$$\delta R = \frac{-2}{a^2 I_2} \int_0^1 \delta F \{ (D^2 - a^2) F + R a^2 W \} dz \quad (278)$$

と変形できる. 積分の中を見ると,  $\delta F$  または  $(D^2 - a^2) F + R a^2 W$  がゼロになれば  $\delta R = 0$  となる. 境界条件を満たす任意の変分  $\delta F$  について  $\delta R = 0$  ならば

$$(D^2 - a^2) F = -R a^2 W \quad (279)$$

が成り立たなければならない.  $G_j$  は直交性を持つだけでなく, 正規化されているとする. すなわち,

$$\int_0^1 G_i G_j dz = \delta_{ij}. \quad (280)$$

$G_j$  で構成される任意の関数  $G$  について,

$$G = \sum_{j=1}^{\infty} A_j G_j. \quad (281)$$

ここで,

$$A_j = \int_0^1 G G_j dz \quad (282)$$

が成り立つ. また,

$$1 = \int_0^1 G^2 dz = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_j A_k \int_0^1 G_j G_k dz = \sum_{j=1}^{\infty} A_j^2. \quad (283)$$

$W, F$  を  $A_j$  で表すと,

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} A_j W_j \quad (284)$$

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (D^2 - a^2)^2 W_j = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (D^2 - a^2) G_j. \quad (285)$$

ここで

$$(D^2 - a^2)F = \sum_{j=1}^{\infty} A_j (D^2 - a^2)^3 W_j = -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j R_j W_j \quad (286)$$

である.  $F$  をかけて積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(D^2 - a^2)F dz &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j R_j \int_0^1 W_j F dz \\ &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j R_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^1 W_j (D^2 - a^2)^2 W_k dz \right\} \\ &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_j R_j A_k \int_0^1 (D^2 - a^2) W_j (D^2 - a^2) W_k dz \\ &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_j A_k R_j \int_0^1 G_j G_k dz \\ &= -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j^2 R_j \end{aligned} \quad (287)$$

となる. 従って,

$$\int_0^1 F(D^2 - a^2)F dz = - \int_0^1 [(DF)^2 + a^2 F^2] dz = -a^2 \sum_{j=1}^{\infty} A_j^2 R_j \quad (288)$$

となるので,

$$\int_0^1 [(DF)^2 + a^2 F^2] dz - a^2 R_1 = a^2 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A_j^2 R_j - R_1 \sum_{j=1}^{\infty} A_j^2 \right\} = a^2 \sum_{j=2}^{\infty} (R_j - R_1) A_j^2 \quad (289)$$

となる. 右辺は正である. 従って,

$$R_1 a^2 \leq \int_0^1 [(DF)^2 + a^2 F^2] dz \quad (290)$$

が導かれる\*19. この結果は, 変分法による近似をより正確にしていったときに, 近似値が真値に上から近付いていく性質を示していると思われる.

## 7.1 even モード

変分問題を具体的に解く. even solution を考える. また, rigid 境界を  $z = \pm\frac{1}{2}$  におく. このとき,  $F$  の自然な級数展開は

$$F = \sum_m A_m \cos[(2m+1)\pi z] \quad (291)$$

である. ここで,  $m$  は 1 から  $\infty$  まで動く (が, 煩雑なので省略する). 支配方程式は

$$(D^2 - a^2)^2 W = F, \quad (292)$$

$$(D^2 - a^2)F = -Ra^2 W \quad (293)$$

である. ここで, 境界条件は

$$F = 0, \quad W = DW = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm\frac{1}{2} \quad (294)$$

である.  $W$  を  $A_m$  で書くと  $W = \sum_m A_m W_m$  であったから,

$$(D^2 - a^2)^2 W_m = \cos[(2m+1)\pi z]. \quad (295)$$

ここで  $W_m$  についての境界条件は

$$W_m = DW_m = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm\frac{1}{2} \quad (296)$$

である. ここで,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(D^2 - a^2)W]^2 dz \quad (297)$$

を一定に保ちながら

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(DF)^2 + a^2 F^2] dz \quad (298)$$

---

\*19 等号は  $A_j = 0, j = 2, 3, 4, \dots$  のときにのみ成り立つ.

を最小化する問題を考える．これはラグランジュの未定乗数法の出番である．つまり，

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(DF)^2 + a^2 F^2] dz - Ra^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(D^2 - a^2)W]^2 dz \\ &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(D^2 - a^2)F dz - Ra^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} WF dz \end{aligned} \quad (299)$$

として未定乗数を  $Ra^2$  と置く．右辺第一項は，

$$\begin{aligned} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(D^2 - a^2)F dz &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_m A_m \cos[(2m+1)\pi z] \sum_n A_n [(2n+1)^2 \pi^2 + a^2] \cos[(2n+1)\pi z] \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \frac{A_m^2}{\gamma_{2m+1}}, \end{aligned} \quad (300)$$

$$\gamma_{2m+1} := \frac{1}{(2m+1)^2 \pi^2 + a^2} \quad (301)$$

となり，右辺第二項は

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} WF dz = \sum_n A_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dz \cos[(2n+1)\pi z] \sum_m A_m W_m \quad (302)$$

となるが，ここで  $(n|m)$  を定義する：

$$(n|m) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos[(2n+1)\pi z] W_m dz \quad (303)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (D^2 - a^2)^2 W_n W_m dz \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (D^2 - a^2) W_n (D^2 - a^2) W_m dz. \end{aligned} \quad (304)$$

最後の等式から， $n, m$  について対称であるのがよくわかる．こうして， $J$  は

$$J = \frac{1}{2} \sum \frac{A_m^2}{\gamma_{2m+1}} - Ra^2 \sum_n \sum_m A_n (n|m) A_m \quad (305)$$

と書き換えられた．極値を調べるため，

$$\frac{\partial J}{\partial A_n} = 0 \quad (306)$$

を要請する. 偏微分の  $A_n$  の添字を  $l$  に変えて計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial A_l} &= \sum_m \frac{A_m}{\gamma_{2m+1}} - Ra^2 \left[ \sum_n \sum_m \delta_{nl}(n|m)A_m + \sum_n \sum_m A_n(n|m)\delta_{ml} \right] \\
&= \sum_m \frac{A_m}{\gamma_{2m+1}} - Ra^2 \left[ \sum_m (l|m)A_m + \sum_n A_n(n|l) \right] \\
&= \sum_m \frac{A_m}{\gamma_{2m+1}} - Ra^2 \left[ \sum_m (l|m)A_m + \sum_m A_n(m|l) \right] \\
&= \sum_m \left[ \frac{A_m}{\gamma_{2m+1}} - 2Ra^2(l|m)A_m \right] \tag{307}
\end{aligned}$$

となるので,

$$\sum_m \left[ \frac{\delta_{mn}}{a^2 R \gamma_{2m+1}} - 2(l|m) \right] A_m = 0 \tag{308}$$

が要請される.  $A_m$  が非ゼロになるためには, デターミナント

$$\left\| \frac{\delta_{mn}}{a^2 R \gamma_{2m+1}} - 2(n|m) \right\| = 0 \tag{309}$$

が成り立たなければならない.  $(D^2 - a^2)F = -Ra^2W$  より,

$$F = (D^2 - a^2)W = \sum_m A_m \cos(2m+1)\pi z \tag{310}$$

なので,

$$(D^2 - a^2)F = \sum_m -[(2m+1)^2\pi^2 + a^2]A_m \cos(2m+1)\pi z = \sum_m -\frac{A_m}{\gamma_{2m+1}} \cos(2m+1)\pi z \tag{311}$$

となる.  $W = \sum_m A_m W_m$  であつたので,

$$\sum_m \frac{A_m}{\gamma_{2m+1}} \cos(2m+1)\pi z = Ra^2 \sum_m A_m W_m \tag{312}$$

となる. これに  $\cos(2n+1)\pi z$  をかけて積分すると,

$$\frac{1}{2} \frac{A_n}{\gamma_{2n+1}} = Ra^2 \sum_m (n|m)A_m \tag{313}$$

となる\*20.

いよいよ臨界 Rayleigh 数を求める.

$$(D^2 - a^2)^2 W_m = \cos(2m + 1)\pi z, \quad (314)$$

$$W_m = DW_m = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (315)$$

の解は

$$W_m = P_m \cosh az + Q_m z \sinh az + \gamma_{2m+1}^2 \cos(2m + 1)\pi z \quad (316)$$

ここで  $P_m, Q_m$  は境界条件から定まる積分定数である. 境界条件  $W_m = 0$  より,

$$P_m \cosh \frac{a}{2} + \frac{Q_m}{2} \sinh \frac{a}{2} = 0 \quad (317)$$

が成り立つ.  $DW_m$  は

$$DW_m = aP_m \sinh az + Q_m \sinh az + Q_m az \cosh az - (2m + 1)\pi \gamma_{2m+1}^2 \sin[(2m + 1)\pi z] \quad (318)$$

となるから,  $DW_m = 0$  より,

$$aP_m \sinh \frac{a}{2} + Q_m \left( \sinh \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cosh \frac{a}{2} \right) = (2m + 1)\pi \gamma_{2m+1}^2 (-1)^m \quad (319)$$

が成り立つ. それぞれの式に  $\sinh, \cosh$  をかけて  $P_m$  を消去すると,

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{(2m + 1)\pi \gamma_{2m+1}^2 (-1)^m \cosh \frac{a}{2}}{\frac{1}{2} \sinh a + \frac{a}{4} (\cosh 2a + 1) - \frac{a}{4} (\cosh 2a - 1)} \\ &= \frac{2(2m + 1)\pi \gamma_{2m+1}^2 (-1)^m}{\sinh a + a} \cosh \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (320)$$

となる.  $P_m$  は

$$\begin{aligned} P_m &= -\frac{1}{2} \frac{\sinh \frac{a}{2}}{\cosh \frac{a}{2}} Q_m \\ &= \frac{(2m + 1)\pi \gamma_{2m+1}^2 (-1)^{m+1}}{\sinh a + a} \sinh \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (321)$$

---

\*20 ここもいまひとつ結論がよくわからない

となる.  $(n|m)$  を具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}
(n|m) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos[(2n+1)\pi z] W_m dz \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [P_m \cosh az + Q_m z \sinh az + \gamma_{2m+1}^2 \cos(2m+1)\pi z] \cos[(2n+1)\pi z] dz \\
&= \frac{1}{2} \gamma_{2m+1}^2 \delta_{mn} + P_m \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cosh az \cos(2n+1)\pi z dz + Q_m \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z \sinh az \cos(2n+1)\pi z dz
\end{aligned} \tag{322}$$

となる. ここで,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cosh az \cos[(2n+1)\pi z] dz = 2(-1)^n (2n+1) \pi \gamma_{2n+1} \cosh \frac{a}{2} \tag{323}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z \sinh az \cos[(2n+1)\pi z] dz = (-1)^n (2n+1) \pi \gamma_{2n+1} \left( \sinh \frac{a}{2} - 4a \gamma_{2n+1} \cosh \frac{a}{2} \right) \tag{324}$$

であるから\*21,

$$(n|m) = \frac{1}{2} \gamma_{2m+1}^2 \delta_{mn} + (-1)^n (2n+1) \pi \gamma_{2n+1} \left\{ 2P_m \cosh \frac{a}{2} + Q_m \left( \sinh \frac{a}{2} - 4a \gamma_{2n+1} \cosh \frac{a}{2} \right) \right\} \tag{329}$$

---

\*21

$$\begin{aligned}
C_0 &:= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cosh az \cos[(2n+1)\pi z] dz \\
&= \left[ \frac{1}{(2n+1)\pi} \cosh az \sin[(2n+1)\pi z] \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{a}{(2n+1)\pi} \sinh az \sin[(2n+1)\pi z] dz \\
&= \frac{2}{(2n+1)\pi} \cosh \frac{a}{2} (-1)^n + \left[ \frac{a}{(2n+1)^2 \pi^2} \sinh az \cos[(2n+1)\pi z] \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{a^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cosh az \cos[(2n+1)\pi z] dz \\
&= \frac{2}{(2n+1)\pi} \cosh \frac{a}{2} (-1)^n - \frac{a^2}{(2n+1)^2 \pi^2} C_0
\end{aligned} \tag{325}$$

となるので,  $C_0$  について解いて,  $\gamma_{2n+1} = \{(2n+1)^2 \pi^2 + a^2\}^{-1}$  を用いると,

$$C_0 = 2(2n+1)\pi (-1)^n \gamma_{2n+1} \cosh \frac{a}{2} \tag{326}$$



となる.  $P_m, Q_m$  を代入すると,  $\{\}$  内は

$$\begin{aligned} \{\} &= \frac{2(2m+1)\pi\gamma_{2m+1}^2(-1)^{m+1}}{\sinh a + a} \sinh \frac{a}{2} \cosh \frac{a}{2} \\ &\quad + \frac{2(2m+1)\pi\gamma_{2m+1}^2(-1)^{m+1}}{\sinh a + a} \cosh \frac{a}{2} \left( \sinh \frac{a}{2} - 4a\gamma_{2n+1} \cosh \frac{a}{2} \right) \\ &= -\frac{2(2m+1)\pi\gamma_{2m+1}^2(-1)^{m+1}}{\sinh a + a} 4a\gamma_{2n+1} \cosh^2 \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (330)$$

となるので,

$$(n|m) = \frac{1}{2}\gamma_{2m+1}^2\delta_{mn} - 8a(-1)^{m+n}(2m+1)(2n+1)\pi^2\gamma_{2m+1}^2\gamma_{2n+1}^2\frac{\cosh^2 \frac{a}{2}}{\sinh a + a} \quad (331)$$

となる. “secular determinant” は

$$\left\| \left( \frac{1}{a^2 R \gamma_{2m+1}^2} - \gamma_{2m+1}^2 \right) \delta_{mn} + (-1)^{m+n} 16a\pi^2 \frac{\cosh^2 \frac{a}{2}}{\sinh a + a} (2m+1)(2n+1)\gamma_{2m+1}^2\gamma_{2n+1}^2 \right\| = 0 \quad (332)$$

となる.  $(m, n) = (0, 0)$  とおくと, 第一近似式として

$$\frac{1}{a^2 R \gamma_1^2} - \gamma_1^2 + 16a\pi^2 \frac{\cosh^2 \frac{a}{2}}{\sinh a + a} \gamma_1^4 = 0 \quad (333)$$

---

と導かれる. また,

$$\begin{aligned} C_1 &:= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z \sinh az \cos[(2n+1)\pi z] dz \\ &= \left[ \frac{1}{(2n+1)\pi} z \sinh az \sin[(2n+1)\pi z] \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2n+1)\pi} (\sinh az + az \cosh az) \sin[(2n+1)\pi z] dz \\ &= \frac{1}{(2n+1)\pi} \sinh \frac{a}{2} (-1)^n + \left[ \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2} (\sinh az + az \cosh az) \cos[(2n+1)\pi z] \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2} (2a \cosh az + a^2 z \sinh az) \cos[(2n+1)\pi z] dz \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi} \sinh \frac{a}{2} - \frac{2a}{(2n+1)^2 \pi^2} C_0 - \frac{a^2}{(2n+1)^2 \pi^2} C_1 \end{aligned} \quad (327)$$

となるので,  $C_1$  について解いて,  $C_0$  を代入すると,

$$C_1 = \gamma_{2n+1} (2n+1)\pi (-1)^n \left( \sinh \frac{a}{2} - 4a\gamma_{2n+1} \cosh \frac{a}{2} \right). \quad (328)$$

が求まる. これを  $R$  について解くと,  $\gamma_1 = (\pi^2 + a^2)^{-1}$  を用いて,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{a^2 \gamma_1 \left( \gamma_1^2 - 16a\pi^2 \frac{\cosh^2 \frac{a}{2}}{\sinh a + a} \gamma_1^4 \right)} \\ &= \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2 (1 - 16a\pi^2 \cosh^2 \frac{a}{2} / \{(\sinh a + a)(\pi^2 + a^2)^2\})} \end{aligned} \quad (334)$$

となる.  $a = 3.117$  のとき<sup>\*22</sup>, 臨界 Rayleigh 数の第一近似値  $R = 1715.08$  が求まる<sup>\*23</sup>.

## 7.2 odd モード

odd モードに対する臨界 Rayleigh 数を求めることを考える.  $F$  を sine で展開する.

$$F = \sum_m A_m \sin 2m\pi z. \quad (335)$$

ここで,

$$(D^2 - a^2)^2 W = F = \sum_m A_m \sin 2m\pi z, \quad (336)$$

$$W = \sum_m A_m W_m, \quad (337)$$

$$(D^2 - a^2)^2 W_m = \sin 2m\pi z \quad (338)$$

である. この方程式の解は,

$$W_m = P_m \sinh az + Q_m z \cosh az + \gamma_{2m}^2 \sin 2m\pi z, \quad (339)$$

$$\gamma_{2m} := \frac{1}{4m^2\pi^2 + a^2} \quad (340)$$

である. 境界条件

$$W_m = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (341)$$

より,

$$P_m \sinh \frac{a}{2} + Q_m \frac{1}{2} \cosh \frac{a}{2} = 0 \quad (342)$$

<sup>\*22</sup>  $a = 3.117$  は (334) 式を  $a$  で偏微分して  $R$  の極値を探すことによって求められると想像される. 煩雑だが要確認.

<sup>\*23</sup> 第二近似値, 第三近似値は  $(m, n)$  の  $(0, 0)$  以外の式を考慮することで得られると思われる.

である. 一方,

$$DW_m = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (343)$$

より,

$$DW = aP_m \cosh az + aQ_m z \sinh az + Q_m \cosh az + 2m\pi\gamma_{2m}^2 \cos 2m\pi z \quad (344)$$

であるから,

$$aP_m \cosh \frac{a}{2} + \frac{a}{2}Q_m \sinh \frac{a}{2} + Q_m \cosh \frac{a}{2} + 2m\pi\gamma_{2m}^2 (-1)^m = 0 \quad (345)$$

となる.  $P_m$  を消去すると,

$$Q_m = \frac{4m\pi\gamma_{2m}^2 (-1)^{m+1}}{\sinh a - a} \sinh \frac{a}{2} \quad (346)$$

となり,  $P_m$  は

$$P_m = \frac{2m\pi\gamma_{2m}^2 (-1)^m}{\sinh a - a} \cosh \frac{a}{2} \quad (347)$$

となる.

行列要素  $(n|m)$  は

$$(n|m) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin 2n\pi z W_m dz \quad (348)$$

と定義され,  $W_m$  を代入すると

$$(n|m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin 2n\pi z \{P_m \sinh az + Q_m z \cosh az + \gamma_{2m}^2 \sin 2m\pi z\} dz \quad (349)$$

となり, 積分は

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin 2n\pi z \sinh az dz = -4n\pi (-1)^n \gamma_{2n} \sinh \frac{a}{2}, \quad (350)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z \sin 2n\pi z \cosh az dz = 2n\pi (-1)^n \gamma_{2n} \left( -\cosh \frac{a}{2} + 4a\gamma_{2n} \sinh \frac{a}{2} \right) \quad (351)$$

となるから\*24,

$$(n|m) = \frac{1}{2}\gamma_{2m}^2\delta_{mn} - 32(-1)^{m+n}amn\pi^2\gamma_{2m}^2\gamma_{2n}^2\frac{\sinh^2\frac{a}{2}}{\sinh a - a} \quad (356)$$

となる. そして, “secular determinant” は (309) 式に  $(n|m)$  を代入して,

$$\left\| \left( \frac{1}{a^2 R \gamma_{2m}^2} - \gamma_{2m}^2 \right) + (-1)^{m+n} 64a\pi^2 \frac{\sinh^2\frac{a}{2}}{\sinh a - a} mn\gamma_{2m}^2\gamma_{2n}^2 \right\| = 0 \quad (357)$$

---

\*24

$$\begin{aligned} C_2 &:= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin 2n\pi z \sinh az dz \\ &= \left[ \frac{-1}{2n\pi} \sinh az \cos 2n\pi z \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{a}{2n\pi} \cosh az \cos 2n\pi z dz \\ &= -\frac{(-1)^n}{n\pi} \sinh \frac{a}{2} + \left[ \frac{a}{(2n\pi)^2} \cosh az \sin 2n\pi z \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{a^2}{(2n\pi)^2} \sinh az \sin 2n\pi z dz \\ &= -\frac{(-1)^n}{n\pi} \sinh \frac{a}{2} - \frac{a^2}{(2n\pi)^2} C_2 \end{aligned} \quad (352)$$

となるので,  $C_2$  について解いて,

$$C_2 = -4n\pi(-1)^n\gamma_{2n} \sinh \frac{a}{2} \quad (353)$$

となる. また,

$$\begin{aligned} C_3 &:= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z \sin 2n\pi z \cosh az dz \\ &= \left[ \frac{-1}{2n\pi} z \cosh az \cos 2n\pi z \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2n\pi} (\cosh az + az \sinh az) \sin 2n\pi z dz \\ &= -\frac{(-1)^n}{2n\pi} \cosh \frac{a}{2} + \left[ \frac{1}{(2n\pi)^2} (\cosh az + az \sinh az) \sin 2n\pi z \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2n\pi)^2} (2a \sinh az + a^2 z \cosh az) \sin 2n\pi z dz \\ &= -\frac{(-1)^n}{2n\pi} \cosh \frac{a}{2} - \frac{2a}{(2n\pi)^2} C_2 - \frac{a^2}{(2n\pi)^2} C_3 \end{aligned} \quad (354)$$

となるので,  $C_3$  について解いて,  $C_2$  を代入すると,

$$C_3 = 2n\pi(-1)^n\gamma_{2n} \left( -\cosh \frac{a}{2} + 4a\gamma_{2n} \sinh \frac{a}{2} \right). \quad (355)$$

となる. 第一近似としては,  $(m, n) = (1, 1)$  をとればよくて,

$$R = \frac{1}{a^2 \gamma_2^3 [1 - 64a\pi^2 \gamma_2^2 \sinh^2 \frac{a}{2} / (\sinh a - a)]} \quad (358)$$

または,  $\gamma_2$  を代入して

$$R = \frac{(4\pi^2 + a^2)^3}{a^2 \{1 - 64a\pi^2 \sinh^2 \frac{a}{2} / [(4\pi^2 + a^2)^2 (\sinh a - a)]\}} \quad (359)$$

を得る.  $a = 5.365$  のとき, 臨界 Rayleigh 数  $R = 17803.24$  を得る.

## 8 回転系

回転系での Bénard 対流を考える<sup>\*25</sup>.

### 8.1 支配方程式

運動方程式 (2) 式は

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + 2\rho \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k = -g\rho \delta_{i3} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (360)$$

と修正される. (11) 式と同様に Boussinesq 近似した運動方程式をベクトルで書くと,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + gz \right) + \alpha g(\theta - \theta_0)\mathbf{k} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (361)$$

となる. 熱伝導解は変わらない (運動がない解なので Coriolis 力も働かない).

線形化したのちに無次元化を行う. 非回転系との違いは, 回転角速度を  $\Omega$  で無次元化することである. 無次元化すると,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + Ta^{\frac{1}{2}} Pr \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla p + Pr R \theta \mathbf{k} + Pr \Delta \mathbf{u}. \quad (362)$$

ここで, Taylor 数

$$Ta := \frac{4\Omega d^4}{\nu^2} \quad (363)$$

---

<sup>\*25</sup> [2] を参考にした.

を導入した. 渦度方程式は,  $\nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) = -(\mathbf{k} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$  を用いて,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - PrTa^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -PrR\nabla \times (\theta \mathbf{k}) + Pr\Delta \boldsymbol{\omega} \quad (364)$$

となる. 特に  $z$  方向は,

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - PrTa^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w}{\partial z} = PrR\Delta_1 \theta + Pr\Delta \omega_z. \quad (365)$$

渦度方程式のローテーションをさらにとつて,

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial t} + PrTa^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial z} = PrR \left( \Delta \theta \mathbf{k} - \nabla \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) + Pr\Delta^2 \mathbf{u} \quad (366)$$

を得る. 特に  $z$  方向は

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial t} + PrTa^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = PrR\Delta_1 \theta + Pr\Delta^2 w. \quad (367)$$

これで支配方程式が揃った. 改めて書くと,

$$\left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta w + Ta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = R\Delta_1 \theta \quad (368)$$

$$\left( \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \omega_z - Ta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w}{\partial z} = R\Delta_1 \theta \quad (369)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \theta = w \quad (370)$$

である.

## 8.2 ノーマルモード解

次の形のノーマルモード解を考える.

$$w = W(z) \exp[i(k_x x + k_y y + st)], \quad (371)$$

$$\theta = \Theta(z) \exp[i(k_x x + k_y y + st)], \quad (372)$$

$$\omega_z = \Omega_z(z) \exp[i(k_x x + k_y y + st)]. \quad (373)$$

これを支配方程式に代入して,

$$[s/Pr - (D^2 - a^2)](D^2 - a^2)W + Ta^{\frac{1}{2}} D\Omega_z = -Ra^2 \Theta, \quad (374)$$

$$[s/Pr - (D^2 - a^2)]\Omega_z - Ta^{\frac{1}{2}} DW = 0, \quad (375)$$

$$[s - (D^2 - a^2)]\Theta = W \quad (376)$$

を得る. 定常 ( $s = 0$ ) ならば,

$$(D^2 - a^2)^2 W - Ta^{\frac{1}{2}} D\Omega_z = Ra^2 \Theta, \quad (377)$$

$$(D^2 - a^2)\Omega_z = -Ta^{\frac{1}{2}} DW, \quad (378)$$

$$(D^2 - a^2)\Theta = -W. \quad (379)$$

(377) 式より  $\Omega_z$ ,  $\Theta$  を消去して,

$$(D^2 - a^2)^3 W + TaD^2 W = -Ra^2 W \quad (380)$$

を得る.

境界条件は,

$$W = 0, \quad \Theta = 0, \quad \text{at } z = 0, 1 \quad (381)$$

応力なし条件 (free) の場合はさらに,

$$D\Omega_z = 0, \quad D^2 W = 0 \quad (382)$$

が課され, 剛体壁すべりなし条件 (rigid) の場合はさらに

$$\Omega_z = 0, \quad DW = 0 \quad (383)$$

が課される.

### 8.3 free-free の場合

両端応力なし (free-free) の場合の境界条件について考える. (381) 式は, (377) 式より,

$$D^6 W = 0 \quad (384)$$

と書き直せる. (377) 式を  $D^2$  で微分すると, 次々に高階の境界条件, すなわち偶数階微分はゼロという条件が現れるので, いま解として適当なのは

$$W = A \sin n\pi z \quad (385)$$

である.  $\Omega_z$  は (378) 式より,

$$\Omega_z = \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + a^2} Ta^{\frac{1}{2}} A \cos n\pi z \quad (386)$$

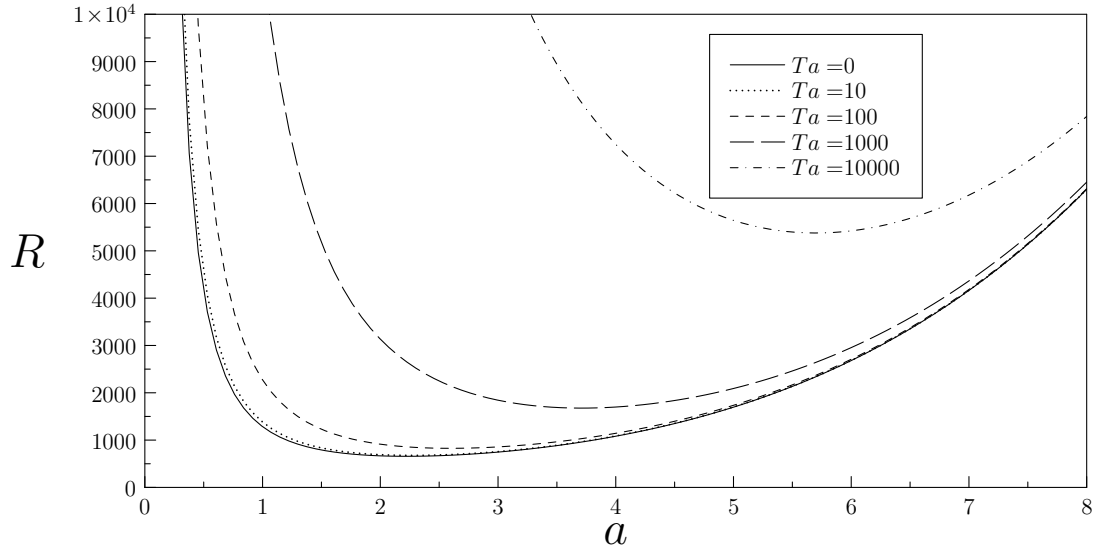


図 11 異なる Taylor 数  $Ta$  に対応した中立曲線.  $Pr$  には依らない.

となる. (380) 式に解を代入すると, ただちに

$$R = \frac{1}{a^2}[(n^2\pi^2 + a^2)^3 + Tan^2\pi^2] \quad (387)$$

を得る. 最小の  $R$  を与える  $a$  を求めるため,  $a^2$  で微分すると,

$$2a^6 + 3n^2\pi^2a^4 - n^6\pi^6 - Tan^2\pi^2 = 0 \quad (388)$$

というふうに  $a^2$  についての 3 次方程式が得られる. これを解くと,

$$a^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{8}n^6\pi^6 + \frac{Ta}{4}n^2\pi^2 + \frac{1}{4}n^2\pi^2\sqrt{Tan^4\pi^4 + Ta^2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}n^6\pi^6 + \frac{Ta}{4}n^2\pi^2 - \frac{1}{4}n^2\pi^2\sqrt{Tan^4\pi^4 + Ta^2}} - \frac{n^2\pi^2}{2} \quad (389)$$

となる.  $n = 1, Ta = 0$  のとき,

$$a = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (390)$$

となり,  $Ta = 0$  のときの臨界波数を得る.

$Ta$  を変えたときの中立曲線を図 11 において示す. Taylor 数  $Ta$  が大きくなると, 臨界 Rayleigh 数が大きくなる様子が分かる. これは, 系の回転によって不安定が抑制されていることを示唆している.

$Ta$  と  $R_c, a_c$  の表を表 1 に示す.



表 1 上下端応力なし (free-free) の場合の, Taylor 数  $Ta$  ごとの臨界波数  $a_c$  と臨界 Rayleigh 数  $R_c$ .

	$Ta$	$a_c$	$R_c$
	0	2.22144146907918	657.511364479516
	10	2.27012202129941	677.076850409427
	100	2.59354489845482	826.289568432469
	1000	3.71043910653597	1676.118026177
	10000	5.69797441833215	5377.14198282842
	100000	8.62610554465596	21309.0018669476
	1000000	12.8632069432664	92223.6121990245

#### 8.4 変分法を用いた臨界 Rayleigh 数の求め方の定式化

まず, 関数  $F$  を定義する:

$$F := (D^2 - a^2)^2 W - Ta^{\frac{1}{2}} D\Omega_z \quad (391)$$

従って, 支配方程式は

$$(D^2 - a^2)F = -Ra^2 W, \quad (392)$$

$$(D^2 - a^2)\Omega_z = -Ta^{\frac{1}{2}} DW. \quad (393)$$

境界条件は

$$W = F = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, 1 \quad (394)$$

である. (392) 式に  $F$  をかけて  $z$  について積分すると,

$$\int_0^1 F(D^2 - a^2)F dz = -Ra^2 \int_0^1 FW dz \quad (395)$$

(395) 式の左辺は,

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(D^2 - a^2)F dz &= \int_0^1 FD^2F - a^2F^2 dz = [FDF]_0^1 - \int_0^1 (DF)^2 + a^2F^2 dz \\ &= - \int_0^1 (DF)^2 + a^2F^2 dz. \end{aligned} \quad (396)$$

(395) 式の右辺の積分は,

$$\int_0^1 FWdz = \int_0^1 W(D^2 - a^2)^2W - Ta^{\frac{1}{2}}WD\Omega_z dz \quad (397)$$

さらに (397) 式の右辺第一項は,  $\{(D^2 - a^2)W\}^2 = (D^2W - a^2W)^2 = (D^2W)^2 - 2a^2WD^2W + a^4W$  を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 W(D^2 - a^2)^2Wdz &= \int_0^1 W(D^4W - 2a^2D^2W + a^4W)dz \\ &= [WD^3W]_0^1 - \int_0^1 DW D^3W dz + \int_0^1 (-2a^2WD^2W + a^4W^2)dz \\ &= [DW D^2W]_0^1 + \int_0^1 (D^2W)^2 dz + \int_0^1 (-2a^2WD^2W + a^4W^2)dz \\ &= \int_0^1 (D^2W)^2 - 2a^2WD^2W + a^4W^2 dz = \int_0^1 \{(D^2 - 2a^2)W\}^2 dz \end{aligned} \quad (398)$$

ここで, free, rigid いずれかの条件で  $DW = 0$  または  $D^2W = 0$  となることを用いた. また, (397) 式の右辺第二項は,

$$\begin{aligned} -Ta^{\frac{1}{2}} \int_0^1 WD\Omega_z dz &= -Ta^{\frac{1}{2}} [W\Omega_z]_0^1 + Ta^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \Omega_z DW dz \\ &= -Ta^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \Omega_z (D^2 - a^2)\Omega_z dz \\ &= -Ta^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \Omega_z D^2\Omega_z dz + \int_0^1 -a^2\Omega_z^2 dz \right) \\ &= Ta^{\frac{1}{2}} \left( -[\Omega_z D\Omega_z]_0^1 + \int_0^1 (D\Omega_z)^2 + a^2\Omega_z^2 dz \right) \\ &= Ta^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (D\Omega_z)^2 + a^2\Omega_z^2 dz \end{aligned} \quad (399)$$

ここで, free のときは  $D\Omega_z = 0$ , rigid のときは  $\Omega_z = 0$  となることを用いた. これらをまとめ,

$$\int_0^1 FWdz = \int_0^1 \{(D^2 - a^2)W\}^2 dz + \int_0^1 (D\Omega_z)^2 + a^2\Omega_z^2 dz \quad (400)$$

従って,

$$R = \frac{\int_0^1 (DF)^2 + a^2F^2 dz}{a^2 \int_0^1 \{(D^2 - a^2)W\}^2 + (D\Omega_z)^2 + a^2\Omega_z^2 dz} =: \frac{I_1}{a^2 I_2} \quad (401)$$

となる. ここで  $I_1, I_2$  は正定値をとる積分である. 従って,  $R$  は正定値をとる積分の比である.

$R$  の変分をとる.

$$\delta R = \frac{1}{a^2 I_2^2} (\delta I_1 I_2 - I_1 \delta I_2) = \frac{1}{a^2 I_2} (\delta I_1 - \frac{I_1}{I_2} \delta I_2) = \frac{1}{a^2 I_2} (\delta I_1 - R a^2 \delta I_2). \quad (402)$$

ここで,  $\delta I_1, \delta I_2$  は,

$$\delta I_1 = 2 [\delta F D F]_0^1 - 2 \int_0^1 \delta F (D^2 - a^2) F dz = -2 \int_0^1 \delta F (D^2 - a^2) F dz, \quad (403)$$

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= 2 \int_0^1 D^2 W (D^2 - a^2) \delta W - a^2 W (D^2 - a^2) \delta W + D \Omega_z D \delta \Omega_z + a^2 \Omega_z \delta \Omega_z dz \\ &= 2 [D W (D^2 - a^2) \delta W]_0^1 - \int_0^1 D W D (D^2 - a^2) \delta W dz - 2 \int_0^1 a^2 W (D^2 - a^2) \delta W dz \\ &\quad + 2 [D \Omega_z \delta \Omega_z]_0^1 - 2 \int_0^1 D^2 \Omega_z \delta \Omega_z dz + 2 \int_0^1 a^2 \Omega_z \delta \Omega_z dz \\ &= -2 [W D (D^2 - a^2) \delta W]_0^1 + 2 \int_0^1 W D^2 (D^2 - a^2) \delta W dz - 2 \int_0^1 a^2 W (D^2 - a^2) \delta W dz \\ &\quad - 2 \int_0^1 \delta \Omega_z (D^2 - a^2) \Omega_z dz \\ &= 2 \int_0^1 W (D^2 - a^2)^2 \delta W dz + 2 \int_0^1 T a^{\frac{1}{2}} \delta \Omega_z D W dz \\ &= 2 \int_0^1 W (D^2 - a^2)^2 \delta W dz + 2 T a^{\frac{1}{2}} [\delta \Omega_z D W]_0^1 - 2 T a^{\frac{1}{2}} \int_0^1 W D \delta \Omega_z dz \\ &= 2 \int_0^1 W \{ (D^2 - a^2)^2 \delta W - T a^{\frac{1}{2}} D \delta \Omega_z \} dz = 2 \int_0^1 W \delta F dz \end{aligned} \quad (404)$$

と変形できる. 従って,  $R$  の変分  $\delta R$  は,

$$\begin{aligned} \delta R &= \frac{1}{a^2 I_2} \left( -2 \int_0^1 \delta F (D^2 - a^2) F dz - 2 R a^2 \int_0^1 W \delta F dz \right) \\ &= -\frac{1}{a^2 I_2} \int_0^1 \delta F \{ (D^2 - a^2) F + R a^2 W \} dz \end{aligned} \quad (405)$$

となる. もし  $(D^2 - a^2) F = -R a^2 W$  ならば,  $\delta R = 0$ . もし問題の境界条件を満たす任意の変分

$$\delta F = (D^2 - a^2) \delta W - T a^{\frac{1}{2}} D \delta \Omega_z \quad (406)$$

に対して  $\delta R = 0$  ならば, 逆に  $(D^2 - a^2) F = -R a^2 W$  が成り立たねばならない.

$F$  は  $z = 0, 1$  でゼロになるような一つ以上のパラメータを含む級数であるとする. 選んだ  $F$  の形に対して, 方程式

$$(D^2 - a^2)^2 W - Ta^{\frac{1}{2}} D\Omega_z = F, \quad (D^2 - a^2)\Omega_z = -Ta^{\frac{1}{2}} DW \quad (407)$$

の解として  $W, \Omega_z$  を求める. これらを組み合わせて,  $W$  に関する方程式を導くと,

$$(D^2 - a^2)^3 W + TaD^2 W = (D^2 - a^2)F \quad (408)$$

となる.

## 8.5 rigid-rigid の場合

前節で述べた変分法を使う. 対称性のため,  $z$  座標を  $z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  に変換する. 境界条件は,

$$F = W = DW = Z = 0, \quad \text{at } z = \pm\frac{1}{2}. \quad (409)$$

ここで,  $W$  が even なら  $\Omega_z$  が odd,  $W$  が odd なら  $\Omega_z$  が even で, それぞれ even モード, odd モードと呼ぶ. ここでは even モードを考える. このとき  $F$  は even なので,  $z = \pm\frac{1}{2}$  でゼロになる関数すなわち cosine で展開する:

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos[(2m+1)\pi z]. \quad (410)$$

このように選んだ  $F$  に対して, 解くべき  $W$  の方程式は, (408) 式に (410) 式を代入して,

$$\begin{aligned} (D^2 - a^2)^3 W + TaD^2 W &= - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \{(2m+1)^2 \pi^2 + a^2\} \cos[(2m+1)\pi z] \\ &= - \sum_{m=0}^{\infty} A_m c_{2m+1} \cos[(2m+1)\pi z], \end{aligned} \quad (411)$$

$$c_{2m+1} := (2m+1)^2 \pi^2 + a^2 \quad (412)$$

となる. (411) 式の線形性から,

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} A_m W_m, \quad \Omega_z = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \Omega_{zm} \quad (413)$$

とおけるので,

$$(D^2 - a^2)^3 W_m + TaD^2 W_m =: -c_{2m+1} \cos[(2m+1)\pi z], \quad (414)$$

$$(D^2 - a^2)\Omega_{zm} = -Ta^{\frac{1}{2}} DW_m \quad (415)$$

を解けば良いことになる.

8.4 節の変分法は,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W F dz \quad (416)$$

を一定に保ちながら, パラメータ  $A_m$  を変えたときに

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(DF)^2 + a^2 F^2] dz \quad (417)$$

を最小化することに等しい. これは Lagrange の未定乗数法を使って, 方程式の Fourier 解析

$$(D^2 - a^2) \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos[(2m+1)\pi z] = -Ra^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m W_m \quad (418)$$

から現れる “secular determinant” を解くことと全く等しいことが示せる\*26.

(414) 式の一般解は,

$$W_m = c_{2m+1} \gamma_{2m+1} \cos[(2m+1)\pi z] + \sum_{j=1}^3 B_j^{(m)} \cosh q_j z. \quad (419)$$

ここで, 右辺第一項は非斉次解, 右辺第二項は斉次解である. また,

$$\frac{1}{\gamma_{2m+1}} = [(2m+1)^2 \pi^2 + a^2]^3 + (2m+1)^2 \pi^2 Ta = c_{2m+1}^3 + (2m+1)^2 \pi^2 Ta \quad (420)$$

である.  $B_j^{(m)}$  は積分定数,  $q_j^2$  は 3 次方程式

$$(q^2 - a^2)^3 + Taq^2 = 0 \quad (421)$$

の 3 つの解である. 解 (419) 式に対応する (415) 式の解は, 少しややこしいが,

$$\Omega_{zm} = -Ta^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^3 B_j^{(m)} \frac{q_j}{x_j} \sinh q_j z + (2m+1)\pi \gamma_{2m+1} \sin[(2m+1)\pi z] \right\} \quad (422)$$

---

\*26 よくわからない

となる. ここで,  $x_j := q_j^2 - a^2$ .  $W_m$  を  $D$  で一回だけ微分し, その後で  $(D^2 - a^2)$  だけ積分する格好になる. 境界条件は  $z = \pm \frac{1}{2}$  で  $W = DW = \Omega_z = 0$  であるので,

$$DW_m = \sum_{j=1}^3 B_j^{(m)} q_j \sinh q_j z - (2m+1)\pi c_{2m+1} \gamma_{2m+1} \sin(2m+1)\pi z \quad (423)$$

に留意すると,

$$\sum_{j=1}^3 B_j^{(m)} \cosh \frac{q_j}{2} = 0, \quad (424)$$

$$\sum_{j=1}^3 B_j^{(m)} q_j \sinh \frac{q_j}{2} = (2m+1)\pi (-1)^m c_{2m+1} \gamma_{2m+1}, \quad (425)$$

$$\sum_{j=1}^3 B_j^{(m)} \frac{q_j}{x_j} \sinh \frac{q_j}{2} = (2m+1)\pi (-1)^{m+1} \gamma_{2m+1} \quad (426)$$

が要請される. これを解くと,

$$B_1^{(m)} = (-1)^m (2m+1)\pi \gamma_{2m+1} \left\{ q_3 \left( 1 + \frac{c_{2m+1}}{x_3} \right) \coth \frac{1}{2} q_2 - q_2 \left( 1 + \frac{c_{2m+1}}{x_2} \right) \coth \frac{1}{2} q_3 \right\} \Delta \operatorname{cosech} \frac{1}{2} q_1, \quad (427)$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{q_2 q_3}{x_2 x_3} (x_3 - x_2) \coth \frac{1}{2} q_1 + \frac{q_3 q_1}{x_3 x_1} (x_1 - x_3) \coth \frac{1}{2} q_2 + \frac{q_1 q_2}{x_1 x_2} (x_2 - x_1) \coth \frac{1}{2} q_3 \quad (428)$$

となる<sup>\*27</sup>.  $B_2^{(m)}$ ,  $B_3^{(m)}$  は  $q_j$ ,  $x_j$  の添字をサイクリックに入れ換えた表現になる<sup>\*28</sup>.

## 8.6 free-rigid の場合

rigid-rigid の場合の odd モードから導出できる. rigid-rigid の odd モードは変分問題を解くことで得られる.

## 参考文献

- [1] Drazin, P. G. and Reid, W. H., 2004: Hydrodynamic Stability, *Cambridge Univ. Press*.

---

\*27 フォローできていない.

\*28 フォローできていない.

- [2] Chandrasekhar, S., 1961: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, *Dover*.
- [3] Pellew, A. and Southwell, R. V. F.R.S., 1940: On maintained convective motion in a fluid heated from below, *Proc. R. Soc. London*, **A176**, pp. 312 – 343.
- [4] Reid, W. H. and Harris, D. L., 1958: Some further results on the Benard Problem, *Phys. Fluids*, **1**, pp. 102 – 110.
- [5] 地球流体電脳倶楽部理論グループ, 1993?: 地球流体理論マニュアル基礎理論参照編 平板間のブシネスク流体の対流.
- [6] 竹広 真一, 佐々木 洋平, 石岡 圭一, 小高 正嗣, 高橋 芳幸, 中島 健介, 石渡 正樹, 林 祥介, spmodel 開発グループ, 2013: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), <http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>, 地球流体電脳倶楽部.
- [7] Malkus, W. V. R. and Veronis, G., 1958: Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.*, **4**, pp. 225 – 260.