流体力学 授業資料 (2025-10-06)

1　流体とは

1.1　流体の定義

流体とは,「変型しやすい」連続体である.

1.1.1　連続体とは

- 連続体の定義

  微視的スケ-ルについて平均して得られた , 巨視的に連続な物理的性質を持つ仮想的な物質を連続体 (continuum) という.

- 物質粒子とは

  連続体を記述するための最小単位である微小領域を, 連続体を構成する物質粒子 (material particle) と呼ぶ. 連続体が変形する際には, 物質粒子も空間的に移動する.

  各物質粒子は一様な物理的性質を持ち, 温度等の熱力学量も定義できると仮定する. 物質粒子では, 一様な物質に関する物理法則 (質点力学, 熱力学, 電磁気学など) が適用できる, ということも仮定する.

1.1.2　変形しやすいとは

「変型しやすい」とは, わずかに力を加えても変型する, ということである.

- 流体における力: 応力

  流体の最少単位に対して働く力は面に働くとして考える. これは, 分子・原子の衝突により生じる力を平均化したものである.

  連続体中の平面に対して単位面積当りに働く力を応力という. 応力については第 3 回の授業で扱う.

- 変形しやすいということの別の表現 :

  「流体には, 静止状態において応力が面の法線方向にしか現われず, しかもその力は面を押す向きに働く (この力を圧力という).」

  この別表現が成り立つことの説明:

  静止状態において接線方向の応力が存在すると仮定する. このとき, 考えている面をはさんで隣りあった部分には, 同じ大きさで逆向きの力が働く（作用反作用の法則）. 流体は定義により,「変型しやすい」ので, 運動が生じる（図 1）. これは静止状態であることに反する. したがって, 静止状態では, 流体中に接線方向の応力は存在しない.

  また, 静止状態において面を引っ張る向きの法線方向が存在すると仮定する. このとき, その部分は裂けて, 真空状態が生じる（図 2）. したがって, 面を引っ張る向きの法線方向の応力は存在しない.

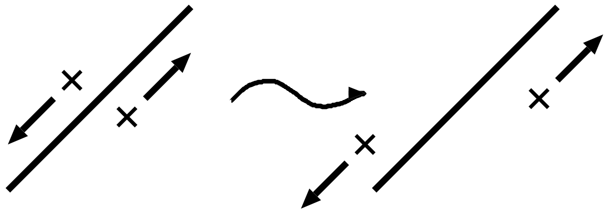

図 1: 静止流体に接線方向の応力が存在する場合.

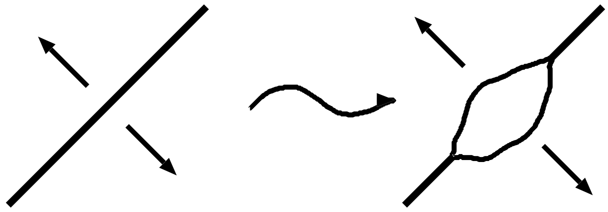

図 2: 静止流体に引っ張る向きの法線方向の応力が存在する場合.

1.2 流体の記述

1.2.1 流体粒子

流体力学では, 物質粒子を特に流体粒子 (fluid particle) と呼ぶ. 流体粒子が流体の基本単位となる.

1.2.2 流体の記述に必要な物理量

流体の振舞いを記述するために必要な物理量として以下が挙げられる.

- 運動学的な量：速度 $\boldsymbol{v}$：分子のブラウン運動速度を平均したもの.
- 熱力学的な量：圧力 p, 密度 ρ, 温度 T, *etc.*

流体上の各点を指定するために連続体上には空間座標を張る. 局所的に定義されている熱力学量や電磁気量は空間座標の関数として表現される.
必要な式は以下の通りである.

- 質量保存則 (mass conservation) または連続の式 (continuity equation).
- 運動方程式: ニュートンの運動方程式を微小部分に適用できると仮定する.
- 構成方程式(constitution equation): 応力と座標・熱力学量との関係式.
- エネルギー保存則: 熱力学第一法則及び第二法則
- 状態方程式

1.2.3 流体運動の記述法

流体粒子の運動を記述する方法には次の 2 通りがある.

1. Lagrange の方法

   流体を流体粒子の集団としてとらえ, 各流体粒子の運動を記述する方法.

   流体粒子を指定する方法として, 初期時刻 $t=0$ における流体粒子の位置 $\boldsymbol{\xi}$ がよく用いられる.

   物理量 A は以下のように表される.

   $$A = A(\boldsymbol{\xi}, t). \tag{1}$$

   $(\boldsymbol{\xi}, t)$ は流体粒子に固定した座標であり, 物質座標またはラグランジュ座標と呼ばれる.

2. Euler の方法

   流体運動を流れの場としてとらえ, 物理量を時間 t · 空間 $\boldsymbol{x}$ の関数として記述する方法.

   物理量 A は以下のように表される.

   $$A = A(\boldsymbol{x}, t) \tag{2}$$

   $(\boldsymbol{x}, t)$ は空間に固定された座標であり, オイラー座標と呼ばれる.

1.2.4 速度, 加速度

時刻 t における流体粒子の位置を $\boldsymbol{x}$ とすると, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{\xi}$ と t の関数として表わされる.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t) \tag{3}$$

流体は連続体であるから $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{\xi}$ の連続関数と見なせる.
流体粒子の速度 $\boldsymbol{v}$, 加速度 $\boldsymbol{a}$ は以下となる.

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}\right)_{\boldsymbol{\xi}}. \tag{5}$$

1.2.5 Lagrange 微分と Euler 微分

- ある流体粒子についての物理量の時間変化を表わす時間微分を Lagrange 微分 (または物質微分 : material differentiation) と呼び, 通常 $\dfrac{d}{dt}$ で表わす.

  $$\frac{dA}{dt} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial A(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} \tag{6}$$

  熱力学の全微分とは区別される. しかし, 流体粒子の熱力学を考える場合には Lagrange 微分と熱力学の全微分は同じ量を表すものとなる.

- 空間のある固定点でみたときの物理量の時間変化を表わす時間微分を Euler 微分と呼び, 通常 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ で表わす.

$$\frac{\partial A}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial A(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{7}$$

1.2.6 Lagrange 微分の Euler 表現

直交直線座標で考える. スカラー量 A の Euler 表現が得られているとする. 時刻 t において $\boldsymbol{x}$ に位置した流体粒子の $\scriptstyle\Delta$ t 後の位置は $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \cdot {\scriptstyle\Delta} t$ である. したがって, 流体粒子にともなう A の変化量 ΔA は,

$$\begin{aligned}\Delta A &= A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \cdot \Delta t, t + \Delta t) - A(\boldsymbol{x}, t) &(8)\\ &= \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \Delta t + v_x \frac{\partial A}{\partial x} \Delta t + v_y \frac{\partial A}{\partial y} \Delta t + v_z \frac{\partial A}{\partial z} \Delta t \quad (\text{直行直線座標の場合}) &(9)\\ &= \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \Delta t + (\nabla A \cdot \boldsymbol{v})\, \Delta t. &(10)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, A. \tag{11}$$

ベクトル量に対しても同様の式が得られる. 直交直線座標系におけるベクトル量の Lagrange 微分の成分表示は

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \tag{12}$$

である.
一般の直交曲線座標では上のような単純な形にはならない. 一般の座標にも適用できる関係式を求めるには, (11) の右辺をベクトル解析の公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{1}{2} \{&\nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) + \nabla\times\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A} + \nabla\times\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{v}\\ &-\nabla\times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\}\end{aligned} \tag{13}$$

となる. [1]

[1] ベクトル解析の公式

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla\times\boldsymbol{A}), &(14)\\ \nabla\times(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) &(15)\end{aligned}$$

を使って $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$ を変形すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} &= \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times (\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \times (\nabla\times\boldsymbol{v}) &(16)\\ &= \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - \{\nabla\times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\}\\ &\quad - \boldsymbol{v} \times (\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \times (\nabla\times\boldsymbol{v}), &(17)\\ 2(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} &= \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla\times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\\ &\quad - \boldsymbol{v} \times (\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \times (\nabla\times\boldsymbol{v}), &(18)\\ 2(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} &= \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla\times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \nabla\times\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{v} + \nabla\times\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A} &(19)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ として, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ をとった場合には次のようになる.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right) - \boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v} \tag{20}$$

A　付録：ベクトル解析のさわり

ここではベクトル解析のさわり (決して「初歩」ではない) を記載する.

A.1　ベクトルとは

- ベクトル

  ベクトルとは大きさと向きを持つ物理量である.

- ベクトルの記法

  ゴシック (太字) 書く: $\boldsymbol{A}$, あるいは矢印をつける: $\overrightarrow{\mathrm{A}}$

- ベクトルの図示

  ベクトルを図示するには, 2 点を結ぶ矢印で示す. このように図示されたベクトルは座標のとり方によらない (直交直線座標系でも球座標系でも同じ矢印に見える).

- ベクトルの成分表示

  座標系を決めると (直交直線座標系を使うか球座標系を使うかを決めると), ベクトルの座標表示をすることができる.

  3 次元直交直線座標系の場合, 原点を始点とするベクトル $\boldsymbol{A}$ は終点の座標 (A_x, A_y, A_z) を用いて,

  $$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \tag{21}$$

  と表示することができる.

- ベクトルの大きさ (あるいは, 長さ) $|\boldsymbol{A}|$

  ベクトルの大きさとは矢印の長さである. 3 次元直交直線座標系の場合, $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ の大きさは

  $$|\boldsymbol{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{22}$$

  となる.

- 単位ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ (あるいは, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$)

  各座標軸に平行で大きさ 1 のベクトルを単位ベクトルという. 3 次元直交直線座標系の場合, 単位ベクトルは以下の 3 つである.

  $$\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0), \tag{23}$$
  $$\boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0), \tag{24}$$
  $$\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1). \tag{25}$$

- 2 つのベクトル $|\boldsymbol{A}|$ と $|\boldsymbol{B}|$ の内積 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$

  2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ とは, $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta$ のことである. ただし, θ は 2 つのベクトルの成す角である.

  3 次元直交直線座標系の場合, $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の内積は

  $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{26}$$

  となる.

- $|\boldsymbol{A}|$ と $|\boldsymbol{B}|$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

  2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ とは, 大きさ $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta$ を持ち $\boldsymbol{A}$ にも $\boldsymbol{B}$ にも直行するベクトルである.

  3 次元直交直線座標系の場合, $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の外積は

  $$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_z) \tag{27}$$

  となる.

  外積の成分を計算するには,

  $$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{28}$$

  や,

  $$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i A_j B_k \tag{29}$$

  などの方法がある. ここで, ε_{ijk} はエディントンのイプシロンである. i, j, k は x, y, z のいずれかを表す. また上式では縮約記法を使っている.

A.2 ベクトル場

座標空間の各点でベクトルが定まる場合, そのようなベクトルの分布をベクトル場という. ベクトルが座標の関数となっているものと言うこともできる. ベクトル場は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

と表現される.

A.3 ベクトル演算子

スカラー場 ϕ もしくはベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して作用する演算子として以下のものがある.

和名	英名	表記方法	3 次元直交座標における表現
勾配	gradient	$\nabla\phi$ もしくは $\nabla\phi$	$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$
発散	divergence	$\nabla{\cdot}\boldsymbol{A}$ もしくは $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$	$\nabla{\cdot}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
回転	rotation	$\nabla{\times}\boldsymbol{A}$ もしくは $\nabla \times \boldsymbol{A}$	$\nabla{\times}\boldsymbol{A} = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\frac{\partial A_k}{\partial x_j}$