

流体力学 授業資料 (2026-01-05)

6. ポテンシャルを用いた流れの表現

6.1 速度ポテンシャル, 流線関数

6.1.1 速度ベクトルの分解

速度場 \mathbf{v} を以下のように分解する.

$$\mathbf{v} = \text{grad}\phi + \text{rot}\Psi. \quad (1)$$

ϕ [m² sec⁻¹] は速度ポテンシャル, Ψ [m² sec⁻¹] はベクトルポテンシャル.

- 2 次元直線直交座標系 (x, y) の場合: ベクトルポテンシャルとして

$$\Psi = (0, 0, \Psi) = (0, 0, -\psi) \quad (2)$$

を考えれば良い. このとき,

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

- 2 次元極座標 (r, θ) の場合:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4)$$

6.1.2 流線関数

- 2 次元の場合の Ψ あるいは ψ を特に流線関数という.

- 2 次元非発散流れ $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ の場合,

$$\mathbf{v} = \text{rot}(-\mathbf{k}\psi) = \mathbf{k} \times \text{grad}\psi \quad (5)$$

\mathbf{k} は着目する 2 次元平面と直交する単位ベクトル.

直線直交座標系では

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

極座標系では

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (7)$$

- 例題:

$$\psi = \sin(kx) \cos(ly). \quad (8)$$

- 面 S を通過する流量

$$M = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9)$$

2 次元非発散の場合:

$$M = \int_l \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl = \int_l \mathbf{k} \times \text{grad}\psi \cdot \mathbf{n} dl = \int_l \mathbf{n} \times \mathbf{k} \cdot \text{grad}\psi dl = - \int_l \text{grad}\psi \cdot dl \quad (10)$$

$$= -\psi|_l^2 \quad (11)$$

となる。ここで、ベクトル解析の公式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$ を使った。

6.2 涡無し流れ (ポテンシャル流)

渦無しの流れ $\omega = \text{rot}\mathbf{v} = 0$ の場合、

$$\mathbf{v} = \text{grad}\phi \quad (12)$$

6.2.1 涡無し流れ (ポテンシャル流) の循環

- 単連結領域の場合: 単連結とは、領域内の任意の閉曲線が全て 1 点に縮められるような領域。単連結領域なら任意の閉曲線 C について

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot dl = \int_C \omega \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (13)$$

- $N + 1$ 重連結領域 (N 個の切れ目を入れると单連結領域になる領域) の場合:

$$\Gamma = p_1\Gamma_1 + \dots + p_N\Gamma_N. \quad (14)$$

ここで、 Γ_i は、 $N + 1$ 重連結領域に入れた「切れ目」 Σ_i を 1 回だけ横切る閉曲線についての循環。また p_i は、 Σ_i を正の向きに横切る回数であり、 $p_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ である。 Γ と速度ポテンシャル ϕ の関係は

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot dl = \oint_C \text{grad}\phi \cdot dl = \oint_C d\phi. \quad (15)$$

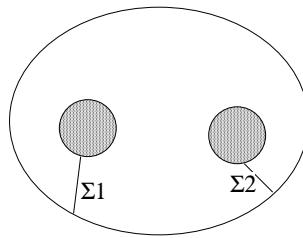


図 1: 3 重連結領域。

- 例: 半径 a の円領域をくり抜いた流れ場(図 2)。

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad \text{ただし } x^2 + y^2 > a^2. \quad (16)$$

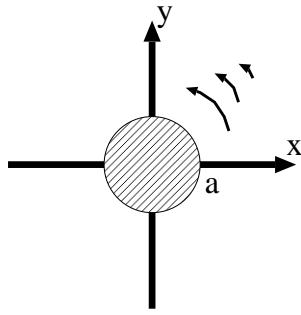


図 2: 円領域のまわりの流れ.

6.2.2 ポテンシャル流の時間発展方程式

運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 = -\frac{1}{\rho} \text{grad}p - \text{grad}\Phi + \mathbf{F} \quad (17)$$

において $\boldsymbol{\omega} = 0$ のので

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 = -\frac{1}{\rho} \text{grad}p - \text{grad}\Phi + \mathbf{F}. \quad (18)$$

順圧 $\rho = \rho(p)$ の場合,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 = -\text{grad} \int \frac{dp}{\rho} - \text{grad}\Phi + \mathbf{F} \quad (19)$$

となる. ここで,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \int^p \frac{dp}{\rho(p)} \quad (20)$$

を使った. \mathbf{F} がナビエ・ストークス型の粘性なら

$$\mathbf{F} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \nu \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}) - \nu \text{rot}(\text{rot} \mathbf{v}) = \nu \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}). \quad (21)$$

したがって, ν が定数の場合

$$\frac{\partial \text{grad} \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 = -\text{grad} \int \frac{dp}{\rho} - \text{grad}\Phi + \text{grad}(\nu \text{div} \mathbf{v}). \quad (22)$$

すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi - \nu \nabla^2 \phi = f(t). \quad (23)$$

$f(t)$ は時間のみに依存する任意関数. これと連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \text{grad} \phi) = 0 \quad (24)$$

とで系を記述する完全な時間発展方程式となる.

6.3 涡無し・縮まない流体における簡単な3次元流れ

渦無し ($\text{rot}v = 0$) で、非圧縮 ($\text{div}v = 0$), $\rho = \rho_0$ となる流体の場合、速度場は

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (25)$$

だけで決まる。したがって、Laplace 方程式を解けば良い。

6.3.1 一様な流れ (uniform flow)

$$\phi = ax + by + cz + d. \quad (26)$$

6.3.2 湧き出し、吸い込み

$$\phi = -\frac{m}{r}. \quad (27)$$

$m [\text{m}^3 \text{ sec}^{-1}]$ は 1 秒間にわき出す/沈み込む流体の体積。わきだし (もしくは、吸い込み) の総量は、半径 r の円の周に沿って速度の動径成分を積分すると求められる。

$$Q = \int_S v \cdot ds = \int_S v_r dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{m}{r^2} r^2 \cos \theta d\theta d\phi = 4\pi m. \quad (28)$$

$4\pi m$ をわきだし (もしくは、吸い込み) の強さという。

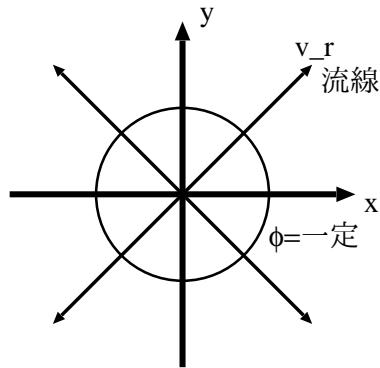


図 3: 湧き出し、吸い込み。

6.3.3 一様流れ場中の湧き出し ($m > 0$)

$$\phi = Ux - \frac{m}{r} = Ur \cos \theta - \frac{m}{r}. \quad (29)$$

ただし x 軸方向が $\theta = 0$ 。

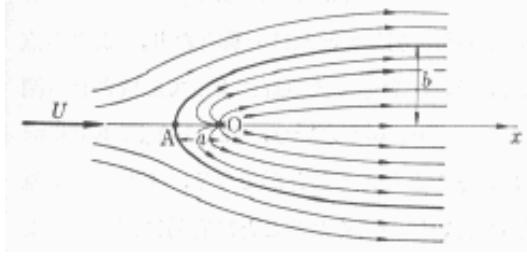


図 4: 一様流中の湧き出し. 原図は今井功 (1973) 「流体力学(前編)」, 裳華房の 3-10 図.

- 淀み点 $|\nu| = 0$

$$v_r = U \cos \theta + \frac{m}{r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt{\frac{m}{U}}, \theta = \pi. \quad (30)$$

つまり, x 軸のとある一点では湧き出しによる速度と一様流がちょうど打ち消しあう. よどみ点は図中では A で示される点である.

- 遠方での広がり

湧き出した流体は無限の下流で半径 b の円筒状の領域を占める. そこでは流速 U になると見える. 流量の保存から

$$Q = 4\pi m = \pi b^2 U, \quad (31)$$

$$b = 2\sqrt{\frac{m}{U}}. \quad (32)$$

6.3.4 二重湧き出し (doublet)

$$\phi = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r_1} \quad (33)$$

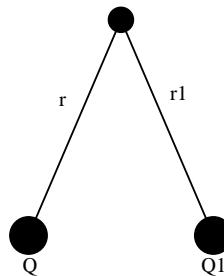


図 5: 二重湧き出しを考える設定.

$r_1 \rightarrow r$ の極限を考える(湧き出しと吸い込みが無限に近接している場合)

$$\phi = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r + \delta r} = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r + \delta r} = -\frac{m\delta r}{r^2} = -\frac{m\delta x \cos \theta}{r^2} \rightarrow -\frac{\mu \cos \theta}{r^2} = -\mu \frac{x}{r^3} \quad (34)$$

ただし $\mu \equiv \lim m\delta x$ が一定となるような極限をとった.

一般の方向 $e = (l, m, n)$ の場合は

$$\phi = e \cdot \text{grad} \frac{\mu}{r} \quad (35)$$

この流れを, Q 点に置かれた軸方向 e , 強さ μ の二重湧き出しによる流れという. 二重湧き出しの流れを 図 6 に示す.

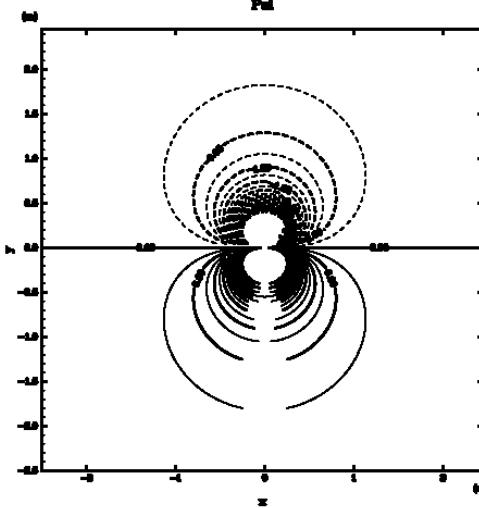


図 6: 二重湧き出し. x 軸上の原点付近に湧き出しと吸い込みを置いた場合.

6.3.5 ランキンの卵型

$$\phi = Ux - \frac{m}{r} + \frac{m}{r_1} \quad (m > 0) \quad (36)$$

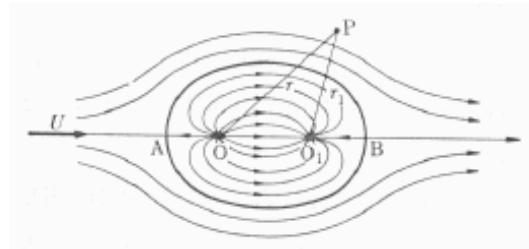


図 7: ランキンの卵型. 原図は今井功 (1973) 「流体力学(前編)」, 裳華房の 3-11 図.

6.4 二次元渦無し・非圧縮流体

6.4.1 複素ポテンシャルによる流れ場の表現

- 二次元の渦無し ($\text{rot}v = 0$) で, 非圧縮 ($\text{div}v = 0$) な流体は, 速度ポテンシャルと流線関数を用いて

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (37)$$

と書ける. したがって, ϕ, ψ で定義される $z = x + iy$ の複素関数

$$f = \phi - i\psi \quad (38)$$

はコーシーリーマンの定理によって解析関数である. $f [(\text{m}^2 \sec^{-1}, \text{m}^2 \sec^{-1})]$ を流れの複素ポテンシャルと言う.

- 流れ場は複素ポテンシャル f を用いて

$$v_x - iv_y = \frac{df}{dz} = qe^{-i\theta} \quad (39)$$

と表現される.

$$v_x = q \cos \theta, \quad v_y = q \sin \theta \quad (40)$$

- 循環 Γ と流量 Q は

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \text{grad}\phi \cdot d\mathbf{l} = \oint d\phi, \quad (41)$$

$$Q = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{k} \times \text{grad}\psi) \cdot d(\mathbf{l} \times \mathbf{k}) \quad (42)$$

$$= \oint \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \text{grad}\psi) \cdot d\mathbf{l} = - \oint \text{grad}\psi \cdot d\mathbf{l} = - \oint d\psi \quad (43)$$

ここで, \mathbf{k} は z 軸方向の単位ベクトルである. よって

$$\oint \frac{df}{dz} = \oint df = \oint d\phi - i \oint d\psi = \Gamma + iQ \quad (44)$$

单連結領域なら f が解析関数であることにより

$$\oint df = \Gamma + iQ = 0 \quad (45)$$

6.4.2 2 次元渦無し・非圧縮流体の簡単な例

- 一様な流れ U (U は実定数)

$$f = Uz = Ux + iUy \quad (46)$$

よって,

$$\phi = Ux, \quad \psi = -Uy. \quad (47)$$

- 湧き出し, 吸い込み

$$f = m \ln z = m \ln(re^{i\theta}) = m(\ln r + i\theta) \quad (48)$$

よって

$$\phi = m \ln r, \quad \psi = -m\theta \quad (49)$$

流線 $\psi = \text{const}$ は $\theta = \text{const}$ で与えられる (原点から出る放射線状の直線群).

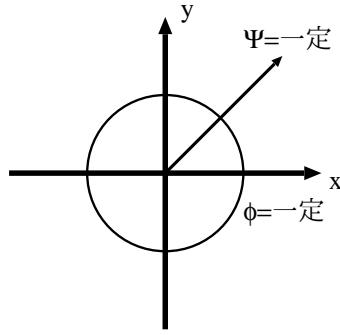


図 8: 湧き出し, 吸い込み

- 二重湧き出し

$$f = m \ln(z - a) - m \ln(z + a) = m \ln \frac{z - a}{z + a} \quad (50)$$

この $a \rightarrow 0$ の極限をとると

$$f = -\frac{\mu}{z} \quad (51)$$

ただし $\mu \equiv \lim_{a \rightarrow 0} 2ma$ これは二次元の二重湧き出し.

- 角(角度 π/n で与えられる)をまわる流れ

$$f = Az^n = Ar^n e^{in\theta}, \quad A > 0, n > 0 \quad (52)$$

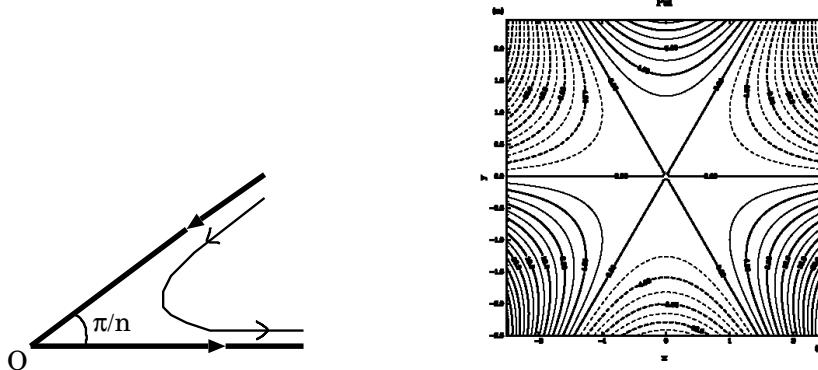


図 9: (左図) $n > 1$ の場合の角をまわる流れのイメージ図. (右図) $n = 3$ の場合の質量流線関数.

流れのポテンシャルと流線関数は

$$\phi = Ar^n \cos n\theta \quad \psi = -Ar^n \sin n\theta \quad (53)$$

$\psi = 0$ となるのは $\theta = \pi/n$. つまり, 原点から出る放射線.

角度が π より大きい, つまり, $0 < n < 1$ のとき(角を曲がる流れ)は

$$|\mathbf{v}| = \left| \frac{df}{dz} \right| = |nAz^{n-1}| \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0 \quad (54)$$

となる.

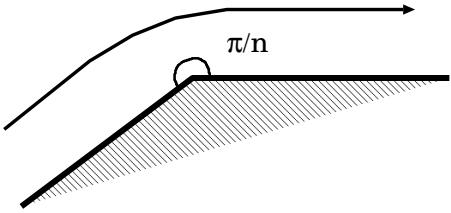


図 10: 角をまわる流れ. $0 < n < 1$ の場合

- 涡糸

$$f = -i\kappa \ln z \quad (55)$$

これは、湧き出しに対する速度ポテンシャルと流れの関数の役割を入れ換えたもの。したがって、流線は原点を中心とする同心円群。

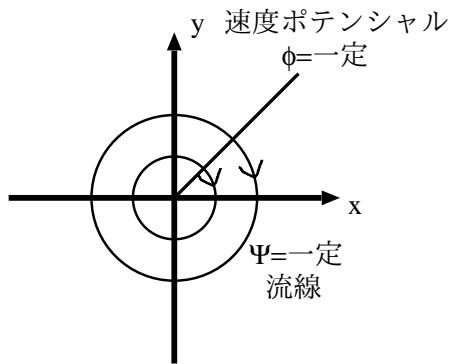


図 11: 涡糸の速度ポテンシャルと流線

6.4.3 円柱のまわりの流れ

速度 U の一様流中に静止する円柱のまわりの流れを考える。図 12 に示すように、一様流の方向に x 軸をとり、円柱の半径を a とする。

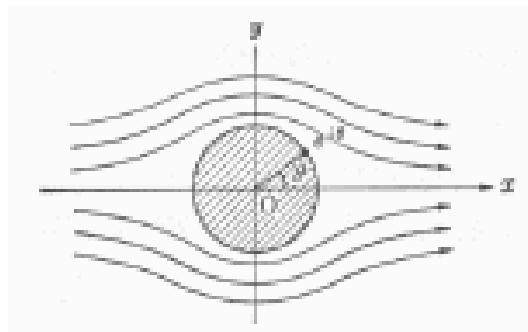


図 12: 円柱のまわりの一様流。原図は今井功 (1973) 「流体力学(前編)」, 義華房の 4-15 図。

- 円柱のまわりの循環が 0 の場合

一様流に対して円柱は x 軸の負の方向に U なる速度で動くことになるから、複素速度ポテンシャルは以下のようになる。

$$f = \underbrace{Uz}_{\text{一様流}} + \underbrace{U \frac{a^2}{z}}_{\text{2重わきだし}} . \quad (56)$$

この f が境界条件(円柱表面で $v_r = 0$)を満たしていることは以下のように確認できる。ポテンシャルは

$$f = \phi - i\psi \quad (57)$$

なので、

$$f = Uz + U \frac{a^2}{z} = Ur e^{i\theta} + Ua^2 r^{-1} e^{-i\theta} = Ur (\cos \theta + i \sin \theta) + Ua^2 r^{-1} (\cos \theta - i \sin \theta) \quad (58)$$

これより

$$\phi = Ur \cos \theta + U \frac{a^2 \cos \theta}{r}, \quad (59)$$

$$\psi = -Ur \sin \theta + U \frac{a^2 \sin \theta}{r}. \quad (60)$$

速度は

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta - U \frac{a^2 \cos \theta}{r^2}, \quad (61)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta - U \frac{a^2 \sin \theta}{r^2} \quad (62)$$

円柱の表面 $r = a$ を考えると、 $\psi = 0$ になる。速度は次のようになる。

$$v_r = U \cos \theta - U \frac{a^2 \cos \theta}{a^2} = 0, \quad (63)$$

$$v_\theta = -U \sin \theta - U \frac{a^2 \sin \theta}{a^2} = -2U \sin \theta \quad (64)$$

よって、境界条件は満たされていることが確認された。

この場合の流れ場は図 13 のようになる。

- 循環($-\Gamma'$)を伴う場合

速度 U の一様流中に静止する円柱のまわりの流れの複素ポテンシャルは

$$f = Uz + U \frac{a^2}{z} + i \frac{\Gamma'}{2\pi} \ln z \quad [\text{m}^2 \text{sec}^{-1}, \text{m}^2 \text{sec}^{-1}] \quad (65)$$

これは、循環無しの場合の円柱の回りの流れに渦糸の流れを重ね合わせたもの。よって、 $\Gamma' > 0$ の場合、流れは上半平面では循環の無い場合に比べて加速され、下半平面では減速される。

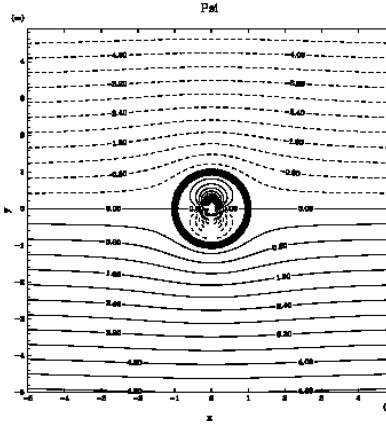


図 13: 円柱のまわりの一様流. $\Gamma = 0$ の場合.

f の表式より,

$$\phi = Ur \cos \theta + U \frac{a^2}{r} \cos \theta - \frac{\Gamma'}{2\pi} \theta, \quad (66)$$

$$\psi = -Ur \sin \theta + U \frac{a^2}{r} \sin \theta - \frac{\Gamma'}{2\pi} \ln r \quad (67)$$

よって

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta - U \frac{a^2}{r^2} \cos \theta, \quad (68)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta - U \frac{a^2}{r^2} \sin \theta - \frac{\Gamma'}{2\pi r} \quad (69)$$

淀み点の位置を求める. 複素速度は

$$\frac{df}{dz} = U - U \frac{a^2}{z^2} + i \frac{\Gamma'}{2\pi z} \quad (70)$$

淀み点は

$$0 = |\nu| = \left| \frac{df}{dz} \right| = \left| U - U \frac{a^2}{z^2} + i \frac{\Gamma'}{2\pi z} \right| \quad (71)$$

よって

$$z = -i \frac{\Gamma'}{4\pi U} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma'}{4\pi U} \right)^2} \quad (72)$$

$\Gamma' \leq 4\pi U$ の時は $|z| = a$ で 淀み点は円柱上, $\Gamma' > 4\pi U$ の時は淀み点は円柱からなれる.

- 円柱に働く力

円柱表面上によどみ点が存在する場合には, 以下のように円柱に働く力を求めることができる.

円柱表面上における速度分布は

$$\nu_\theta|_{r=a} = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma'}{2\pi a}. \quad (73)$$

$$\Gamma' \leq 4\pi U a \quad \Gamma' = 4\pi U a \quad \Gamma' \geq 4\pi U a.$$

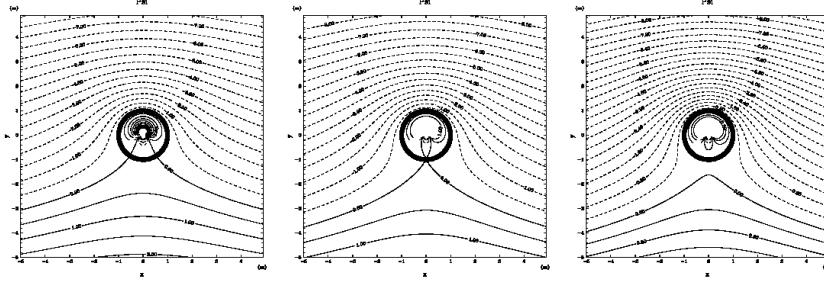


図 14: 円柱まわりの一様流の Γ' 依存性. (a) $\Gamma' \leq 4\pi U a$, (b) $\Gamma' = 4\pi U a$, (c) $\Gamma' \geq 4\pi U a$.

ベルヌーイの定理からよどみ圧と円柱上の任意の点における $p + \rho/2v^2$ は等しい. よって, 表面圧力分布は, p_0 をよどみ圧として,

$$\underbrace{p_0}_{\text{よどみ点}} = \underbrace{p + \frac{\rho_0}{2} v_\theta^2}_{\text{円柱上の点}} \quad (74)$$

$$p = p_0 - \frac{\rho_0}{2} v_\theta^2 \quad (75)$$

$$= p_0 - \frac{\rho_0 U^2}{2} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma'}{2\pi a U} \right)^2 \quad [\text{N m}^{-2}] = [\text{kg m}^{-1} \text{sec}^{-2}] \quad (76)$$

となる. 単位長さあたりに円柱に働く力は以下のようになる.

$$\mathbf{F} = - \int p \mathbf{n} dl \quad (77)$$

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta \quad (78)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \cos \theta \left[p_0 - \frac{\rho_0 U^2}{2} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma'}{2\pi a U} \right)^2 \right] a d\theta \quad (79)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[p_0 \sin \theta - \frac{\rho_0 U^2}{12} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma'}{2\pi a U} \right)^3 \right] a d\theta \quad (80)$$

$$= 0 \quad (81)$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta \quad (82)$$

$$= - \int_0^{2\pi} \sin \theta \left[p_0 - \frac{\rho_0 U^2}{2} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma'}{2\pi a U} \right)^2 \right] a d\theta \quad (83)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 U^2}{2} 2 \frac{\Gamma'}{\pi a U} (\sin \theta)^2 a d\theta \quad (84)$$

$$= \rho_0 U \Gamma' \quad [\text{kg sec}^{-2}] = [\text{N m}^{-1}] \quad (85)$$

となる.

6.5 3次元渦無し流れの例: 一様流中に静止する球

- 速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi = U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (86)$$

となる。速度は

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad (87)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (88)$$

となる。この解が境界条件を満たすことを確認する: $r = a$ では

$$v_r = 0, \quad (89)$$

$$v_\theta = -\frac{3U}{2} \sin \theta \quad (90)$$

- 球のまわりの流れは、一様流と二重わきだしの重ね合わせ。
- 抵抗力は働くない。