流体力学 授業資料 (2025-10-15)

2.1 連続の式

流体の連続の式 (質量保存則) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1}$$

である. ただし, ρ は流体の密度, $\boldsymbol{v}$ は流体の速度である.

2.1.1 連続の式の導出: Euler 的見方

空間に固定した領域 D を考える (図 1). 領域 D 内の流体の質量変化は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho(\boldsymbol{x}, t) dV = -\iint_{\partial D} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS. \tag{2}$$

ここで,

- ρ : 流体の密度
- $\boldsymbol{v}$: 流体運動の速度
- $\boldsymbol{n}$: D を囲む閉曲面 ∂D の外向き単位法線ベクトル

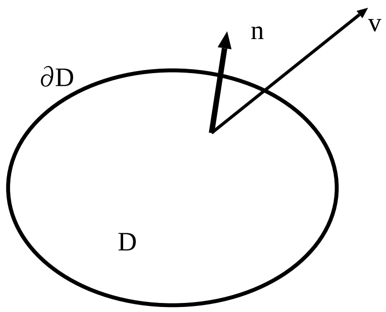

図 1: 空間に固定された領域 D における質量保存.

上式を, Gauss の定理などを使って変形すると,

$$\iiint_D \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \right\} dV = 0. \tag{3}$$

これより, 以下の連続の式が得られる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{4}$$

2.1.2 連続の式の導出: Lagrange 的見方

流体とともに運動する領域 D' において, 領域 D' 内の質量は保存しなければならない. この質量保存則は, 積分を空間に固定した座標で実行することにより次のように書ける.

$$\frac{d}{dt}\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)}\rho(\boldsymbol{x},t)dxdydz = 0. \tag{5}$$

左辺の積分について, 積分変数を $\boldsymbol{x}$ から流体粒子のラベル座標 $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ に変換する.

$$\frac{d}{dt}\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)}\rho(\boldsymbol{x},t)dxdydz = \frac{d}{dt}\iiint_{D'_\xi}\rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta \tag{6}$$

ここで, オイラー座標からラベル座標への座標変換は以下のように行なっている.

$$dxdydz = \left\{\frac{\partial x}{\partial \xi}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \cdots\right\}d\xi d\eta d\zeta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta \tag{7}$$

$$= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}d\xi d\eta d\zeta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta \tag{8}$$

D' が流体とともに運動するので, $\boldsymbol{\xi}$ 座標での積分領域 D'_ξ は任意の時間で変化しない. したがって時間微分は空間積分と交換する.

$$左辺: \frac{d}{dt}\iiint_{D'_\xi}\rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{D'_\xi}\frac{d}{dt}\left(\rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta\right) \tag{9}$$

この時間微分は, ラベル座標一定のもとで実行する Lagrange 微分であることに注

意しよう．$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{\xi}, t$ の関数であることに注意して右辺は次のように変形される．

$$\text{右辺}: \iiint_{D'_\xi} \frac{d}{dt}\left(\rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta\right) \tag{10}$$

$$= \iiint_{D'_\xi} \frac{d\rho(\xi,t)}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta + \underbrace{\iiint_{D'_\xi} \rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) d\xi d\eta d\zeta} \tag{11}$$

$$= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{d\rho(\boldsymbol{x},t)}{dt} dxdydz + \underbrace{\iiint_{D'_\xi} \rho(\boldsymbol{\xi},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right) d\xi d\eta d\zeta}_{\text{ヤコビアンの } Lagrange \text{ 微分を展開した}} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{d\rho(\boldsymbol{x},t)}{dt} dxdydz \\ &\quad + \underbrace{\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right)\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{x}} dxdydz}_{\boldsymbol{x} \text{ 座標系に戻す}} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{d\rho}{dt} dxdydz \\ &\quad + \underbrace{\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right) dxdydz}_{\text{ヤコビアン} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{x}} \text{を各項にかける}} \end{aligned} \tag{14}$$

$$= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{d\rho}{dt} dxdydz + \underbrace{\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dxdydz}_{(17) \text{ を使用}} \tag{15}$$

$$= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) dxdydz \tag{16}$$

ヤコビアンの時間微分の計算では以下を使った．

$$\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{17}$$

したがって，

$$\frac{d}{dt}\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho(\boldsymbol{x},t) dxdydz = \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) dxdydz = 0 \tag{18}$$

となる．これが任意の体積 D' について成り立つから，以下の式が得られる．

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{19}$$

2.1.3 質量保存則 (連続の式) の種々の形

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \tag{22}$$

$$\frac{1}{\rho^{-1}}\frac{d\rho^{-1}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{23}$$

2.2 保存則の一般形

2.2.1 単位体積当りのスカラー量の保存

単位体積あたりのスカラー量 A の保存則は以下のようになる.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \sigma[A]. \tag{24}$$

ここで,

- $\boldsymbol{F}$: A の流束密度 (flux density)
- $\sigma[A]$: 単位体積 · 単位時間当りの A の生成 · 消滅 (source, sink)

$\boldsymbol{F}$ が流体の運動による移流の部分 $A\boldsymbol{v}$ と, その他の部分 $\boldsymbol{F}'$ に分けられる場合,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}') = \sigma[A]. \tag{25}$$

$\boldsymbol{F}' = 0$ の場合,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (A\boldsymbol{v}) = \sigma[A]. \tag{26}$$

2.2.2 単位質量当りのスカラー量の保存

単位質量あたりのスカラー量 s (例えば, 単位質量あたりのエネルギー) の保存の式は以下のようになる.

$$\rho\frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}' = \sigma[\rho s]. \tag{27}$$

移流以外の流束 $\boldsymbol{F}'$ がなく生成消滅もないときには, s は流体の運動にともなって保存する.

$$\frac{ds}{dt} = 0. \tag{28}$$

このような s を **Lagrange 保存量**という.

2.2.3 流束形式, 移流形式

単位体積当りのスカラー量の保存の式において, A として ρs をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla\cdot(\rho s \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}') = \sigma[\rho s]. \tag{29}$$

これと, 単位質量当りのスカラー量の保存の式と比較すると, 次の公式が得られる.

$$\rho\frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla\cdot(\rho s \boldsymbol{v}). \tag{30}$$

さらに Lagrange 微分の Euler 表現を用いると,

$$\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla s\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla\cdot(\rho s \boldsymbol{v}). \tag{31}$$

右辺第 2 項 $\nabla\cdot(\rho s\boldsymbol{v})$ を流束の発散 (flux divergence) , $\rho s\boldsymbol{v}$ を流束密度 (flux density) と呼ぶ. 右辺の形を流束形式 (flux form) という.
左辺第 2 項 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla s$ を移流項 (advective term) と呼ぶ, 左辺の形を移流形式 (advective form) という.

2.2.4 補足

1. 単位質量あたりのスカラー量の保存則 (30)

$$\rho\frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla\cdot(\rho s \boldsymbol{v}) \tag{32}$$

   を用いると, ラグランジュ的保存量 $\frac{ds}{dt} = 0$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla\cdot(\rho s \boldsymbol{v}) = 0 \tag{33}$$

   も満たす.

2. 以下の式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho A dV = \int_{D'} \rho\frac{dA}{dt}dV \tag{34}$$

   その理由は以下の通りである.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho A dV &= \frac{d}{dt}\int_{D'} \rho A\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} = \int_{D'} \frac{d}{dt}(A\rho\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}})d\boldsymbol{\xi} && (35)\\
&= \int_{D'} \frac{dA}{dt}\rho\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} + \int_{D'} A\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) \underbrace{d\boldsymbol{\xi}}_{\frac{d}{dt}\text{ の中に入る}} && (36)\\
&= \int_{D'} \rho\frac{dA}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} + \int_{D'} A \underbrace{\frac{d}{dt}(\rho d\boldsymbol{x})}_{\text{質量保存より } 0} && (37)\\
&= \int_{D'} \rho\frac{dA}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} && (38)\\
&= \int_{D'} \rho\frac{dA}{dt}dV && (39)
\end{aligned}$$

3. 体積の時間変化の式

上式で $A=\rho^{-1}$ の場合を考えると

$$\frac{d}{dt}\int_{D'} dV = \int_{D'} \rho \frac{d\rho^{-1}}{dt} dV = -\int_{D'} \rho^{-1}\frac{d\rho}{dt} dV \tag{40}$$

となる．連続の式を使えば

$$\frac{d}{dt}\int_{D'} dV = \int_{D'} \nabla\cdot\boldsymbol{v} dV \tag{41}$$

が得られる．これは流体粒子の体積の時間変化を表す式である．