FTPACK 使用の手引 (version 1.0)

石岡 圭一 (2000/09/19)

1 概要

これは, 高速フーリエ変換を行なうサブルーチンパッケージである. データアクセスをできるだけ連続的にすることにより, ベクトル計算機上での高速化をはかっているが, 通常の計算機上で使用しても十分高速である (ただし, 通常の計算機の CPU およびキャッシュの性質を十分考慮して最適化された FFT ルーチン, 例えば FFTW (`http://www.fftw.org/`) にはさすがにかなわないので, そのような計算機で FFT を実行する必要があり, かつ実行時間の削減が重要である場合には, そのような最適化された FFT ルーチンの使用を薦める). なお, 変換の基底は 2,3,4,5 であるので, これらの素因数の積で表されるデータ長の変換に限られる.

以下のサブルーチン群の中で初期化をおこなうサブルーチン (サブルーチン名が `I` で終わる) は, そのサブルーチン群に属する変換ルーチンを用いる際, かならず最初に 1 回呼ばなければならない. ただしそれ以後は, 異なるデータ数を指定するときに限って初期化ルーチンを呼べばよい. なお, 初期化ルーチンが用いる作業領域は, 同じサブルーチン群に属する変換ルーチンを用いている間変更してはならない. (この作業領域には, 因数と三角関数表が格納されている).

また, ベクトル化の効率を上げるために, 同じ項数の時系列データを複数個同時にフーリエ変換する仕様になっている. つまり, 2 次元配列 `X(I,J),I=1,2,···,M, J=1,2,···,N` が与えられた場合, 各 `I` について, `X(I,1),X(I,2),···,X(I,N)` に対するフーリエ変換を行なう. すなわち, この場合 `N` 項のフーリエ変換を `M` 回繰り返すことになる. 時系列データが 1 種類だけの場合は `M=1` とすればよい.

2　サブルーチンのリスト

離散型原始複素フーリエ変換

FTTZLI(N,IT,T)	初期化をおこなう.
FTTZLM(M,N,X,Y,IT,T)	変換をおこなう.

離散型複素フーリエ変換

FTTZUI(N,IT,T)	初期化をおこなう.
FTTZUF(M,N,X,Y,IT,T)	正変換をおこなう.
FTTZUB(M,N,X,Y,IT,T)	逆変換をおこなう.

離散型実フーリエ変換

FTTRUI(N,IT,T)	初期化をおこなう.
FTTRUF(M,N,X,Y,IT,T)	正変換をおこなう.
FTTRUB(M,N,X,Y,IT,T)	逆変換をおこなう.

離散型 cosine 変換 (台形公式)

FTTCTI(N,IT,T)	初期化をおこなう.
FTTCTF(M,N,X,Y,IT,T)	正変換をおこなう.
FTTCTB(M,N,X,Y,IT,T)	逆変換をおこなう.

離散型 sine 変換 (台形公式)

FTTSTI(N,IT,T)	初期化をおこなう.
FTTSTF(M,N,X,Y,IT,T)	正変換をおこなう.
FTTSTB(M,N,X,Y,IT,T)	逆変換をおこなう.

離散型 cosine 変換 (中点公式)

FTTCMI(N,IT,T)	初期化をおこなう.
FTTCMF(M,N,X,Y,IT,T)	正変換をおこなう.
FTTCMB(M,N,X,Y,IT,T)	逆変換をおこなう.

離散型 sine 変換 (中点公式)

FTTSMI(N,IT,T)	初期化をおこなう.
FTTSMF(M,N,X,Y,IT,T)	正変換をおこなう.
FTTSMB(M,N,X,Y,IT,T)	逆変換をおこなう.

3 サブルーチンの説明

3.1 FTTZLI/FTTZLM

1. 機能

   1 次元 (項数 N) の複素時系列データ $\{\alpha_k\}$ が M 個与えられたとき, 離散型原始複素フーリエ変換を FFT により行なう. ただし, N は $N = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること. FTTZLI は初期化を行う; FTTZLM はフーリエ変換を行う.

2. 定義

   - 原始複素フーリエ変換

     $\{\alpha_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \exp(2\pi i \frac{jk}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

3. 呼び出し方法

```
FTTZLI(N,IT,T)
FTTZLM(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数 M
N	(I)	入力. 変換の項数 N
X	(D)	入力. $\{\alpha_k\}$ 出力. $\{x_j\}$ 大きさ M×N×2 の 3 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N×2 の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ N×2 の 1 次元配列

5. データの格納方法

   X(M,0:N-1,2) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,0,1)	X(I,0,2)	X(I,1,1)	X(I,1,2)	···	X(I,N-1,1)	X(I,N-1,2)
$\mathrm{Re}(x_0)$	$\mathrm{Im}(x_0)$	$\mathrm{Re}(x_1)$	$\mathrm{Im}(x_1)$	···	$\mathrm{Re}(x_{N-1})$	$\mathrm{Im}(x_{N-1})$
$\mathrm{Re}(\alpha_0)$	$\mathrm{Im}(\alpha_0)$	$\mathrm{Re}(\alpha_1)$	$\mathrm{Im}(\alpha_1)$	···	$\mathrm{Re}(\alpha_{N-1})$	$\mathrm{Im}(\alpha_{N-1})$

3.2 FTTZUI/FTTZUF/FTTZUB

1. 機能

   1 次元 (項数 N) の複素時系列データ $\{x_j\}$ または $\{\alpha_k\}$ が M 個与えられたとき, 離散型複素フーリエ正変換, またはその逆変換を FFT により行う. ただし, N は $N = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること. FTTZUI は初期化を行う; FTTZUF はフーリエ正変換を行う; FTTZUB はフーリエ逆変換を行う.

2. 定義

   - フーリエ正変換

     $\{x_j\}$ を入力し、次の変換を行ない、$\{\alpha_k\}$ を求める.

     $$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp(-2\pi i \frac{jk}{N}), \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

   - フーリエ逆変換

     $\{\alpha_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

     $$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \exp(2\pi i \frac{jk}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

3. 呼び出し方法

```
FTTZUI(N,IT,T)
FTTZUF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTZUB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数 M
N	(I)	入力. 変換の項数 N
X	(D)	入力. $\{x_j\}$ または $\{\alpha_k\}$ 出力. $\{\alpha_k\}$ または $\{x_j\}$ 大きさ M×N×2 の 3 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N×2 の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ N×2 の 1 次元配列

5. データの格納方法

   X(M,0:N-1,2) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,0,1)	X(I,0,2)	X(I,1,1)	X(I,1,2)	···	X(I,N-1,1)	X(I,N-1,2)
$\mathrm{Re}(x_0)$	$\mathrm{Im}(x_0)$	$\mathrm{Re}(x_1)$	$\mathrm{Im}(x_1)$	$\cdots$	$\mathrm{Re}(x_{N-1})$	$\mathrm{Im}(x_{N-1})$
$\mathrm{Re}(\alpha_0)$	$\mathrm{Im}(\alpha_0)$	$\mathrm{Re}(\alpha_1)$	$\mathrm{Im}(\alpha_1)$	$\cdots$	$\mathrm{Re}(\alpha_{N-1})$	$\mathrm{Im}(\alpha_{N-1})$

3.3 FTTRUI/FTTRUF/FTTRUB

1. 機能

   1 次元 (項数 N) の実時系列データ $\{x_j\}$ が M 個与えられたとき, 離散型実フーリエ正変換, またはその逆変換を FFT により行う. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a3^b5^c(a, b, c : 0$ または自然数) であること. FTTRUI は初期化を行う; FTTRUF はフーリエ正変換を行う; FTTRUB はフーリエ逆変換を行う.

2. 定義

   - フーリエ正変換

     $\{x_j\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{a_k\}, \{b_k\}$ を求める.

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_j \cos\frac{2\pi jk}{N}, \quad k = 0, 1, \cdots, N/2$$

$$b_k = -\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_j \sin\frac{2\pi jk}{N}, \quad k = 1, 2, \cdots, N/2 - 1$$

   - フーリエ逆変換

     $\{a_k\}, \{b_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

$$x_j = a_0 + a_{N/2}(-1)^j + 2\sum_{k=1}^{N/2-1} (a_k \cos\frac{2\pi jk}{N} - b_k \sin\frac{2\pi jk}{N}) \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

3. 呼び出し方法

```
FTTRUI(N,IT,T)
FTTRUF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTRUB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数 M
N	(I)	入力. 変換の項数 N
X	(D)	入力. $\{x_j\}$ または $\{a_k\}, \{b_k\}$ 出力. $\{a_k\}, \{b_k\}$ または $\{x_j\}$ 大きさ M×N の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ N×2 の 1 次元配列

5. データの格納方法

   X(M,0:N-1) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,0)	X(I,1)	X(I,2)	X(I,3)	···	X(I,N-2)	X(I,N-1)
x_0	x_1	x_2	x_3	···	x_{N-2}	x_{N-1}
a_0	$a_{N/2}$	a_1	b_1	···	$a_{N/2-1}$	$b_{N/2-1}$

3.4 FTTCTI/FTTCTF/FTTCTB

1. 機能

   周期 2π の偶関数 $x(t)$ の半周期を N 等分した $N+1$ 個の標本 $\{x_j\}$,

   $$x_j = x(\frac{\pi j}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N$$

   が M 個与えられたとき, 台形公式による離散型 cosine 変換, またはその逆変換を FFT により行なう. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること.

2. 定義

   - cosine 正変換 (台形公式)

     $\{x_j\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{a_k\}$ を求める.

     $$a_k = \frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_N(-1)^k + \sum_{j=1}^{N-1} x_j \cos\frac{\pi jk}{N}\right) \quad (k = 0, 1, \cdots, N)$$

   - cosine 逆変換 (台形公式)(正変換と定数倍異なるだけ)

     $\{a_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

     $$x_j = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_N(-1)^j + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos\frac{\pi jk}{N} \quad (j = 0, 1, \cdots, N)$$

3. 呼び出し方法

```
FTTCTI(N,IT,T)
FTTCTF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTCTB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数
N	(I)	入力. 変換の項数 - 1 (N)
X	(D)	入力. $\{x_j\}$ または $\{a_k\}$ 出力. $\{a_k\}$ または $\{x_j\}$ 大きさ M×(N+1) の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ 3N の 1 次元配列

5. データの格納方法

   X(M,0:N) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,0)	X(I,1)	···	X(I,N-1)	X(I,N)
x_0	x_1	···	x_{N-1}	x_N
a_0	a_1	···	a_{N-1}	a_N

6. 備考

   - 配列 X と Y との大きさが異なることに注意.

3.5 FTTSTI/FTTSTF/FTTSTB

1. 機能

   周期 2π の奇関数 $x(t)$ の半周期を N 等分した $N-1$ 個の標本 $\{x_j\}$,

   $$x_j = x(\frac{\pi j}{N}), \quad j = 1, 2, \cdots, N-1$$

   が M 個与えられたとき, 台形公式による離散型 sine 変換, またはその逆変換を FFT により行なう. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること.

2. 定義

   - sine 変換 (台形公式)

     $\{x_j\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{b_k\}$ を求める.

     $$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} x_j \sin \frac{\pi jk}{N} \quad (k = 1, 2, \cdots, N-1)$$

   - sine 逆変換 (台形公式)(正変換と定数倍異なるだけ)

     $\{b_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

     $$x_j = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin \frac{\pi jk}{N} \quad (j = 1, 2, \cdots, N-1)$$

3. 呼び出し方法

   ```
   FTTSTI(N,IT,T)
   FTTSTF(M,N,X,Y,IT,T)
   FTTSTB(M,N,X,Y,IT,T)
   ```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数
N	(I)	入力. 変換の項数 (N)
X	(D)	入力. $\{x_j\}$ または $\{b_k\}$ 出力. $\{b_k\}$ または $\{x_j\}$ 大きさ M×N の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ 5N/2 の 1 次元配列

5. データの格納方法

   X(M,N) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,1)	X(I,2)	···	X(I,N-1)	X(I,N)
x_1	x_2	···	x_{N-1}	$x_N = 0$
b_1	b_2	···	b_{N-1}	$b_N = 0$

6. 備考

- 配列 X の 2 次元目の大きさは, 変換データそのものを格納するよりのに必要な N-1 より 1 つだけ大きく N ととらなければならないことに注意が必要である (この部分は作業領域として使われる).

3.6 FTTCMI/FTTCMF/FTTCMB

1. 機能

周期 2π の偶関数 $x(t)$ の半周期を N 等分した N 個の標本 $\{x_{j+1/2}\}$,

$$x_{j+1/2} = x(\frac{\pi(j+1/2)}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

が M 個与えられたとき, 中点公式による離散型 cosine 変換, またはその逆変換を FFT により行なう. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること.

2. 定義

- cosine 正変換 (中点公式)

$\{x_{j+1/2}\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{a_k\}$ を求める.

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{j+1/2} \cos \frac{\pi(j+1/2)k}{N} \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1)$$

- cosine 逆変換 (中点公式)

$\{a_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_{j+1/2}\}$ を求める.

$$x_{j+1/2} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos \frac{\pi(j+1/2)k}{N} \quad (j = 0, 1, \cdots, N-1)$$

3. 呼び出し方法

```
FTTCMI(N,IT,T)
FTTCMF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTCMB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数
N	(I)	入力. 変換の項数 (N)
X	(D)	入力. $\{x_{j+1/2}\}$ または $\{a_k\}$ 出力. $\{a_k\}$ または $\{x_{j+1/2}\}$ 大きさ M×N の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ 6N の 1 次元配列

5. データの格納方法

X(M,0:N-1) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,0)	X(I,1)	···	X(I,N-2)	X(I,N-1)
$x_{1/2}$	$x_{3/2}$	···	$x_{N-3/2}$	$x_{N-1/2}$
a_0	a_1	···	a_{N-2}	a_{N-1}

3.7 FTTSMI/FTTSMF/FTTSMB

1. 機能

周期 2π の奇関数 $x(t)$ の半周期を N 等分した N 個の標本 $\{x_{j+1/2}\}$,

$$x_{j+1/2} = x(\frac{\pi(j+1/2)}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

が M 個与えられたとき, 中点公式による離散型 sine 変換, またはその逆変換を FFT により行なう. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること.

2. 定義

- sine 正変換 (中点公式)

  $\{x_{j+1/2}\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{b_k\}$ を求める.

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{j+1/2} \sin \frac{\pi(j+1/2)k}{N} \quad (k = 1, 2, \cdots, N)$$

- sine 逆変換 (中点公式)

  $\{b_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_{j+1/2}\}$ を求める.

$$x_{j+1/2} = \frac{1}{2} b_N (-1)^j + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin \frac{\pi(j+1/2)k}{N} \quad (j = 0, 1, \cdots, N-1)$$

3. 呼び出し方法

```
FTTSMI(N,IT,T)
FTTSMF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTSMB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数
N	(I)	入力. 変換の項数 (N)
X	(D)	入力. $\{x_{j+1/2}\}$ または $\{b_k\}$ 出力. $\{b_k\}$ または $\{x_{j+1/2}\}$ 大きさ M×N の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ 6N の 1 次元配列

5. データの格納方法

X(M,N) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,1)	X(I,2)	$\cdots$	X(I,N-1)	X(I,N)
$x_{1/2}$	$x_{3/2}$	$\cdots$	$x_{N-3/2}$	$x_{N-1/2}$
b_1	b_2	$\cdots$	b_{N-1}	b_N