

マントル・ダイナミクスの素過程

小河正基

(東京大学大学院総合文化研究科)

2019年8月18日

支笏湖 Geophysical Fluid Dynamics セミナー資料

運動方程式:

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

ここで、マントル対流の運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2} M U^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{24} \times \left(\frac{0.01}{3 \times 10^7} \right)^2 = 2 \times 10^5 \text{ J}$$

で自動車 1 台分。(M はマントルの質量、マントル対流の速度を 1cm/yr としている。) マントル対流の典型的時間 1 億年で割ると運動エネルギーの変化率は $7 \times 10^{-11} \text{ W}$ 。これに対してポテンシャル・エネルギーの変化率は、スラブ一枚あたり典型的には、スラブの体積*密度差*重力加速度*スラブの沈降速度として

$$1000 \text{ km} \times 100 \text{ km} \times 5000 \text{ km} \times 4000 \text{ kg m}^{-3} \times 3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} \times 500 \text{ K} \times 10 \text{ ms}^{-2} \times \frac{0.01}{3 \times 10^7 \text{ s}} \\ = 1 \times 10^{11} \text{ W}$$

よって左辺は無視できて

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

連続の式 (固相・一成分系):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{V} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{U}}{V} \right) = 0 \quad (2)$$

ただし、V はモル体積。固体マントルの熱対流では V の時間変化の原因として考えられるのは熱膨張であるが、これは小さいので、

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{U}}{V} \right) = 0 \quad (3)$$

(例えば水星では惑星全体の熱収縮量は 40 億年で半径 5km 程度)。さらに、室内での熱対流だと圧縮による V の空間変化も小さいので (マントルのことはいざ知らず)

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (4)$$

エネルギー方程式 (暫定版)

以下この節では、暫定的にエネルギー方程式を

$$\rho C_p^m \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \rho H \quad (5)$$

とする。(C_p^m は単位質量あたりの比熱、k は熱伝導率、H は単位質量あたりの発熱率。)

流動特性 (1) ニュートン流体

$$\sigma_{ij} = \eta \dot{\epsilon}_{ij} = \eta \left[\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \right]. \quad (6)$$

粘性率 η の典型的値はマントル最上部で 10²⁰ Pa s。粘性率一定で非圧縮だと (1), (4), (6) より

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (7)$$

$\rho = \rho_0(1 - \alpha T)$ 、熱膨張率を α とし、スケーリングの基準を、長さ d (対流層の深さ)、時間 d^2/κ ($\kappa = k/\rho C_p^m$)、温度 ΔT (適当)、内部発熱率の基準を $k\Delta T/d^2$ 、として無次元化すると

$$-\nabla p + Ra T e_z + \nabla^2 \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + H \quad (10)$$

ただし、z-軸は鉛直上向きで、 Ra はレイリー数。

$$Ra = \left(\frac{d}{d_p}\right)^3, \quad d_p = \left(\frac{\eta_0 \kappa}{\rho_0 \alpha_0 \Delta T g}\right)^{1/3} \quad (11)$$

レイリー数の物理的意味：

経験的に $10d_p$ がブルームサイズ。よってレイリー数は対流層の中にブルームがいくつ入るかという量。 $Ra < 1000$ で対流が起きないのは、対流層が浅すぎてブルームが入らないから。

表 1. $10d_p$ の典型的大きさ

岩石 (マントル)	マグマ	水
100 km	1 cm	1 mm

(例) レイリー数の等しい熱対流は同等という流体力学の相似則に従うと、地球のマントル対流と等価な熱対流する水の層の深さ d は $\frac{3000km}{10km} = \frac{d}{0.1mm}$ より 30 mm。この時、地球の 45

億年の年齢 (無次元時間で $4.5 \times 10^9 \times 3 \times \frac{10^7 \kappa}{d^2} = 0.015$) は水の熱対流では 100 秒に相当。

(話題) 熱対流の基本。($H=0$ の場合)

流動特性 (2) リソスフェア

リソスフェアを作るためには粘性率の温度依存性が重要。実験からは活性化型

$$\eta = \eta_0 \exp \left[\frac{E + Pv}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right] \quad (12)$$

温度依存性の強さは、 100°C の温度変化によりマントルの最上部で 1 桁、CMB で 1/2 桁の粘性率変化が生じる程度。非ニュートン流体の対流をニュートン流体の対流でモデル化する場合温度依存性の強さをこの半分程度にすると良いと言われている。

温度依存性の感度が温度とともに変わるのも嫌なので以下では

$$\eta = \eta_0 \exp [E(T_{ref} - T) + Pv] \quad (13)$$

とする。両者の差は特に低温側で顕著である。しかし、温度が低いときの岩石の流動のメカ

ニズムは、シアゾーンの形成や結晶粒子の回転など、もともと複雑である。粘性流体として扱うこと自体に無理があり、式(12)に固執することは意味がない。

(話題) スタグナント・リッド、3D 球殻マントルの対流安定性

流動特性 (3) リソスフェアの破壊とプレート・テクトニクス

プレート運動を再現するためには、リソスフェアの破壊によるプレート境界の形成をモデル化する必要がある。

(a) 降伏モデル

応力が降伏応力 $\sigma_Y = \sigma_0 + \mu P$ (μ は摩擦係数) を越えると割れて実効粘性率が下がるとい
うモデル。粘性率はその瞬間の応力により決定されるのが特徴。(13)の粘性率を η_v とし
て

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \eta_v \dot{\epsilon}_{ij} & \text{if } \sigma < \sigma_Y \\ \frac{\sigma_Y}{\dot{\epsilon}_{11}} \dot{\epsilon}_{ij} & \text{if } \sigma \geq \sigma_Y \end{cases} \quad (14)$$

(話題) 降伏応力モデルによるプレート・テクトニクスのモデル化。このモデルでは、
応力が降伏応力に達したところがプレート境界となるため、応力分布の時間変化に
じてプレート境界の存続や位置が大きく変化し、プレート運動は不安定となる。

(b) 応力履歴モデル

このモデルでは、過去に高応力が発生しリソスフェアが割れた時は、割れたという記憶
を ω というパラメーターに格納し保存する。 $(\omega > 1$ なら割れている状態。)

$$\eta = \eta_v \exp\left(-\frac{F\omega}{1+\omega}\right) \quad (15)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \omega = \Gamma \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \lambda \omega \quad (16)$$

$$\lambda = \lambda_0 \exp(ET) \quad (17)$$

λ_0 を十分大きくとり、 ω はほとんど常に(16)の定常解の近くにいるようにする。 $F > 4$
の時、この定常解は応力の多価函数となる。プレート内部解 ($\omega < 1$) は $\sigma < \sigma_P$ の時、
プレート境界解 ($\omega > 1$) は $\sigma > \sigma_m$ の時に存在する。ここで

$$\sigma_{P,m} = \left(\frac{\Gamma}{\lambda_0 \eta_*}\right)^{-1/2} \left[\frac{F}{2} - 1 \pm \sqrt{\frac{F^2}{4} - F}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{F}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{F}}\right)\right] \quad (18)$$

複号は P に対して-、m に対して+をとる。また $\eta_* = \eta_0 \exp(ET_{ref} + Pv)$ 。 $\sigma_P > \sigma_m$ が成
り立つ。

(話題) 応力履歴モデルによるプレート・テクトニクスのモデル化。このモデルでは、
応力が多少変動しても、リソスフェアの状態がプレート内部解とプレート境界解の間

を飛び移ることはないのでプレート運動は安定する。

エネルギー方程式と相関係：

エネルギー方程式は内部エネルギーを用いて書くと

$$dE = d'Q - PdV$$

より

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{V} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{Ue}{V} \right) = \Phi - P \nabla \cdot \mathbf{U}$$

となる。(Φは内部発熱や熱拡散などによる熱の出入り。) 対流する物質に対して仮定する相関係とこの式との整合性を保つためには右辺の第 2 項を正しく評価する必要があるが、ここで問題が起こる。第一に、融解などの相転移が起こるとき、 $\nabla \cdot \mathbf{U}$ は相転移速度に依存するため、新たに相転移の kinetics に対するモデルが必要となる。(世の中の相転移を伴う対流のモデルは皆この形をとる。) 第二に、通常のマントル対流の計算では、体積があらかじめ決められた容器(箱や球殻)の中に流体を入れて計算するため、流体の体積変化を許す計算は一般にはできない。しかし、不用意に $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ を仮定してエネルギー方程式を計算すると、人為的なエネルギー源が発生してしまう。これらの問題を回避するため、エネルギー方程式はエンタルピーの形で書く。

$$h = e + PV$$

として

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{V} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{h\mathbf{U}}{V} \right) = \Phi + \frac{dP}{dt} = \Phi - \rho g U_z。$$

ただし、このままだと右辺第二項が圧倒的に大きくなってしまうため、以下では基準になるモル体積を V_0 、 $e^+ = h - PV_0$ 、 $\Delta V = V - V_0$ として、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^+}{V} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{e^+\mathbf{U}}{V} \right) = \Phi - \frac{\Delta V}{V} \rho g U_z$$

の形に書く。相関係の計算は、熱平衡が成り立つという仮定の下で

$$\mu_A = \mu_B$$

の式から行う。

(A) 一成分・一相系 (固体)

単位モルあたりの比熱 C_p は Dulong-Petit の法則により $3nR$ 。

(例: オリーブ石 (Mg_2SiO_4): $C_p = 21R$)

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$$

より

$$S = S_c(P) + C_p \ln T$$

化学ポテンシャルは

$$S = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p$$

より

$$\mu = C_p T - T[S_c(P) + C_p \ln T] + \Psi_0(P)$$

モル体積は

$$V_s = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = \frac{d\Psi_0}{dP} - T \frac{dS_c}{dP}$$

ここで、 V_s が P と T に対して線形に依存すると仮定する。

$$V_s = V_0(1 + \alpha T)(1 - K^{-1}P) \quad (\text{A1})$$

この時、固体 1 モルあたりの化学ポテンシャルは

$$\mu_s^0 = C_p T - T(S_0 + C_p \ln T) + (1 + \epsilon)\Psi_0 \quad (\text{A2})$$

ただし

$$\epsilon = \alpha T, \quad \Psi_0 = V_0 \int_0^P (1 - K^{-1}P) dP = V_0\left(P - \frac{P^2}{2K}\right)$$

エンタルピーは

$$h_s = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mu_s^0}{T}\right) = C_p T + \Psi_0 \quad (\text{A3})$$

第一項と第二項の大きさは同程度。

内部エネルギーは

$$\begin{aligned} e_s = h_s - PV &= C_p T + PV_0 - \frac{1}{2}K^{-1}V_0 P^2 - PV_0(1 + \epsilon)(1 - K^{-1}P) \\ &\approx C_p T - \epsilon PV_0 + \frac{1}{2}V_0 P^2 / K \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

エントロピーは

$$S = S_0 + C_p \ln T - \alpha \Psi_0 \quad (\text{A5})$$

エネルギー方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e_s}{V_s}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{e_s}{V_s} \mathbf{U}\right) = \Phi - P \nabla \cdot \mathbf{U}$$

ただし

$$\Phi = k \nabla^2 T + \rho H + \eta \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$$

連続の式から

$$\nabla \cdot \mathbf{U} \approx \frac{d}{dt} \left(\epsilon - \frac{P}{K}\right) = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon + \frac{U_z}{K} \rho g$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e_s}{V} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{e_s}{V} \mathbf{U} \right) &= \Phi - P \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon + \frac{U_z}{K} \rho g \right] \\ &= \Phi - \left[\frac{\partial(P\epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon P \mathbf{U}) - \epsilon \nabla \cdot (P \mathbf{U}) + \frac{U_z}{K} \rho g P \right]\end{aligned}$$

$$e_s^+ = e_s + \epsilon P V = C_p T + \frac{1}{2} V_0 P^2 / K$$

として

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e_s^+}{V} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{e_s^+}{V} \mathbf{U} \right) = \Phi - \epsilon \rho g U_z - \frac{P}{K} \rho g U_z \quad (\text{A6})$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial e_s^+}{\partial t} + \frac{1}{V} \mathbf{U} \cdot \nabla e_s^+ = \Phi - \epsilon \rho g U_z - \frac{P}{K} \rho g U_z$$

$$\rho C_p^m \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T \right] = \Phi - \epsilon \rho g U_z \quad (\text{A7})$$

ただし $\rho C_p^m = C_p / V$

熱対流と断熱圧縮

$\rho = \rho_0(z)(1 - \alpha T)$ 、 $\rho_0(z) = \frac{M}{V_0} \left[1 + \frac{\rho g}{K} (d - z) \right]$ 、 M は分子量、熱膨張率を $\alpha = \alpha_0 \alpha(z)$ とし、

密度を $\rho_0 = \rho_0(z = d) = \frac{M}{V_0}$ で無次元化する。(高さ z はコア・マントル境界を原点として測

る。) 無次元化した量に元と同じ記号を使う。

・非弾性近似：式(1), (3), (A7)

$$-\nabla p + Ra \rho_0(z) \alpha(z) T \mathbf{e}_z + \nabla \cdot [\eta (\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U})] = \mathbf{0} \quad (\text{A8})$$

$$\nabla \cdot [\rho_0(z) \mathbf{U}] = 0 \quad (\text{A9})$$

$$\rho_0(z) \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T + D \alpha(z) T U_z \right] = \Phi \quad (\text{A10})$$

ただし、

$$D = \alpha_0 g d / C_p^m \quad (\text{A11})$$

(話題) スーパー地球のマントル対流

・拡張ブシネスク近似：(A9)の代わりに

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (\text{A12})$$

・ブシネスク近似：式 (A10) で $D=0$ とし Φ の中の粘性散逸項も同程度の大きさなので無視。これにより式(1)および(4)-(6)を得る。

(B) 一成分・二相系 (固相・固相)

(以下では $K \rightarrow \infty$ とする。)

基本は(A)と同じ。 V_H を高圧相のモル体積として、

$$V_L = V_0(1 + \epsilon), V_H = (V_0 - \Delta V_s^0)(1 + \epsilon) \quad (B1)$$

高圧相の化学ポテンシャルは相境界の位置を再現できるように、

$$\mu_H = \mu_s^0 + \Delta S(T - T_A) - P\Delta V_s^0(1 + \epsilon) \quad (B2)$$

とする。相境界の位置は

$$T = T_A + \frac{P\Delta V_s^0}{\Delta S}(1 + \epsilon) \quad (B3)$$

高圧相のエンタルピー、内部エネルギーは

$$h_H = h_s - T_A\Delta S - P\Delta V_s^0 = C_p T - T_A\Delta S + P(V_0 - \Delta V_s^0) \quad (B4)$$

$$e_H = C_p T - T_A\Delta S - \epsilon P(V_0 - \Delta V_s^0) \quad (B5)$$

連続の式は、 ζ を高圧相の体積分率、 \dot{m} [$\text{mol m}^{-3}\text{s}^{-1}$] を相転移速度として

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\zeta}{V_H} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\zeta}{V_H} \mathbf{U} \right) = \dot{m} \quad (B6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1-\zeta}{V_L} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1-\zeta}{V_L} \mathbf{U} \right) = -\dot{m} \quad (B7)$$

よって

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{d\epsilon}{dt} - \Delta V_s \dot{m} \quad (B8)$$

(A)と同様にして $\epsilon\Delta V_s/V_0$ の項を無視すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\zeta(e_H - P\Delta V_s)}{V_H} + \frac{1-\zeta}{V_L} e_s \right] + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{U} \left[\frac{\zeta(e_H - P\Delta V_s)}{V_H} + \frac{1-\zeta}{V_L} e_s \right] \right\} = \Phi - P \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{\zeta}{V_H} \Delta V_s \mathbf{U} \cdot \nabla P \quad (B9)$$

さらに、

$$e_H^+ = e_H - P\Delta V_s + \epsilon P V_H = C_p T - T_A\Delta S - P\Delta V_s \quad (B10)$$

$$\frac{e^+}{V_0} = \frac{\zeta}{V_H} e_H^+ + \frac{1-\zeta}{V_L} e_s^+ \quad (B11)$$

と置く。 $\epsilon \rightarrow 0$ 、(B9)(B11)で $V_H = V_L = V_0$ という近似の下で

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^+}{V_0} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{e^+}{V_0} \mathbf{U} \right) = \Phi - \frac{\zeta\Delta V_s}{V_0} \mathbf{U} \cdot \nabla P \quad (B12)$$

$$e^+ = C_p T - \zeta(T_A\Delta S + P\Delta V_s). \quad (B13)$$

あるいは、(B6)を用いて(B9)から真面目に計算すると

$$\rho C_p^m \frac{dT}{dt} - (T_A\Delta S + P\Delta V_s)\dot{m} = \Phi + \epsilon \mathbf{U} \cdot \nabla P = \Phi - \rho g \alpha T U_z \quad (B14)$$

と書くこともできる。これが一般に使われる式。 \dot{m} を別に与えてやる必要がある。

(話題) ポスト・スピネル転移とマントル対流。

(C) 一成分・二相系 (固相・液相)

液相の化学ポテンシャルは、 $\mu_l = \mu_s$ から融解曲線が得られるように決める。

$$\mu_l = \mu_s^0 + \Delta h[1 + g(P)(1 + \epsilon) - T/T^m] \quad (C1)$$

融点は

$$T = T^m[1 + g(P)(1 + \epsilon)] \quad (C2)$$

エンタルピーは、

$$h_l = h_s + \Delta h[1 + g(P)] \quad (C3)$$

モル体積は

$$V_l = V_0(1 + \epsilon) + \Delta h \frac{dg(P)}{dP} (1 + \epsilon) \equiv (V_0 + \Delta V_l^0)(1 + \epsilon) \quad (C4)$$

内部エネルギーは

$$\begin{aligned} e_l &= e_s + \Delta h[1 + g(P)] - P\Delta V_l \\ &= C_p T + \Delta h[1 + g(P)] - \epsilon P V_0 - P\Delta V_l \end{aligned} \quad (C5)$$

ただし、 $\Delta V_l = \Delta V_l^0(1 + \epsilon)$ 。

連続の式

$$\text{液相: } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{V_l} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} \right) = \dot{m} \quad (C6)$$

$$\text{固相: } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1-\phi}{V_s} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1-\phi}{V_s} \mathbf{U} \right) = -\dot{m} \quad (C7)$$

ただし ϕ は液相の体積分率、 \mathbf{u} は液相の速度、 \dot{m} は単位体積あたりの融解速度。

(A1), (C4)より $\epsilon\Delta V_l$ の項を無視して

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\phi \mathbf{u} + (1 - \phi) \mathbf{U}] &= \dot{m} \Delta V_l + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} \cdot \nabla V_l + \frac{1-\phi}{V_s} \mathbf{U} \cdot \nabla V_s \\ &= \Delta V_l \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{V_l} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} \right) \right] + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} \cdot \nabla V_l + \frac{1-\phi}{V_s} \mathbf{U} \cdot \nabla V_s \\ &= \Delta V_l \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{V_l} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} \right) \right] + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} \cdot \nabla \Delta V_l + V_0 \left[\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} + \frac{1-\phi}{V_s} \mathbf{U} \right] \cdot \nabla \epsilon \end{aligned} \quad (C8)$$

エネルギー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{V_l} e_l + \frac{1-\phi}{V_s} e_s \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\phi}{V_l} e_l \mathbf{u} + \frac{1-\phi}{V_s} e_s \mathbf{U} \right) = \Phi - P \nabla \cdot [\phi \mathbf{u} + (1 - \phi) \mathbf{U}] \quad (C9)$$

$$\Phi = k\nabla^2 T + \rho H + \eta \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\mu\phi}{k_\phi} (\mathbf{u} - \mathbf{U})^2 \quad (\text{C10})$$

ただし k_ϕ は浸透率。

$$\frac{e}{v_0} \equiv \frac{\phi}{V_l} e_l + \frac{1-\phi}{V_s} e_s \quad (\text{C11})$$

と置いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{v_0} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{e}{v_0} \mathbf{U} \right) = -\nabla \cdot \left[\frac{\phi e_l}{V_l} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \right] + \Phi - P\nabla \cdot [\phi \mathbf{u} + (1-\phi)\mathbf{U}] \quad (\text{C12})$$

(C8)より

$$\begin{aligned} P\nabla \cdot [\phi \mathbf{u} + (1-\phi)\mathbf{U}] = \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{V_l} P\Delta V_l \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} P\Delta V_l \right) + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} P \left(1 - \frac{\phi\Delta V_l^0}{V_l} \right) - \frac{\phi}{V_l} \Delta V_l \mathbf{u} \cdot \nabla P + P V_0 \left[\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} + \frac{1-\phi}{V_s} \mathbf{U} \right] \cdot \nabla \epsilon \end{aligned}$$

また

$$\nabla \cdot \left(\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} + \frac{1-\phi}{V_s} \mathbf{U} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{V_l} + \frac{1-\phi}{V_s} \right)$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^+}{v_0} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{e^+}{v_0} \mathbf{U} \right) = -\nabla \cdot \left[\frac{\phi e_l^+}{V_l} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \right] + \Phi + \frac{\phi\Delta V_l}{V_l} \mathbf{u} \cdot \nabla P \\ + \epsilon V_0 \left(\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} + \frac{1-\phi}{V_s} \mathbf{U} \right) \cdot \nabla P + \left(\frac{V_0}{V_l} \phi + \frac{V_0(1-\phi)}{V_s} + \frac{\phi\Delta V_l^0}{V_l^0} - 1 \right) P \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^+}{V_0} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{e^+}{V_0} \mathbf{U} \right) = -\nabla \cdot \left[\frac{\phi e_l^+}{V_l} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \right] + \Phi + \frac{\phi\Delta V_l}{V_l} \mathbf{u} \cdot \nabla P + \epsilon V_0 \left(\frac{\phi}{V_l} \mathbf{u} + \frac{1-\phi}{V_s} \mathbf{U} \right) \cdot \nabla P \quad (\text{C13})$$

ただし

$$e_l^+ = e_l + P\Delta V_l + \epsilon P V_0 = C_p T + \Delta h [1 + g(P)] \quad (\text{C14})$$

$$e_s^+ = e_s + \epsilon P V_0 = C_p T \quad (\text{C15})$$

$$\frac{e^+}{v_0} = \frac{\phi}{V_l} e_l^+ + \frac{1-\phi}{V_s} e_s^+ \quad (\text{C16})$$

以下では $\epsilon \rightarrow 0$ とし、(C16)式で $V_0 = V_s = V_l$ とする。この時

$$e^+ = C_p T + \phi \Delta h [1 + g(P)] \quad (\text{C17})$$

運動方程式

$$-\nabla P + [(1-\phi)\rho_s + \phi\rho_l]\mathbf{g} + \nabla \cdot \left[\eta \left(\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{I} \right) \right] = \mathbf{0} \quad (\text{C18})$$

浸透流の式

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{u} - \mathbf{U}) &= -\frac{k_\phi}{\mu}(\nabla P - \rho_l \mathbf{g}) \\
&= -\frac{k_\phi}{\mu} \left\{ (1 - \phi)(\rho_s - \rho_l) \mathbf{g} + \nabla \cdot \left[\eta \left(\nabla \mathbf{U} + {}^t \nabla \mathbf{U} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{I} \right) \right] \right\} \\
&\approx -\frac{k_\phi}{\mu} (1 - \phi)(\rho_s - \rho_l) \mathbf{g}
\end{aligned} \tag{C19}$$

ただし最後の近似は、系の典型的空間スケールが compaction length $\sqrt{k_\phi \eta / \mu} \approx 1 \text{ km}$ より十分大きい時成り立つ。

液相の密度は

$$\rho_l = \frac{M}{(V_0 + \Delta V_l^0)(1 + \epsilon)} \approx \rho_0 \left(1 - \epsilon - \frac{\Delta V_l^0}{V_0} \right) = \rho_s - \rho_0 \frac{\Delta V_l^0}{V_0} \tag{C20}$$

よって全体の密度は

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_l = \rho_0 \left(1 - \epsilon - \phi \frac{\Delta V_l^0}{V_0} \right) \tag{C21}$$

(話題) 火成活動・マントル湧昇流フィードバック 1

粘性率一定として、無次元化した基礎方程式は

$$-\nabla P + Ra \left(T + \frac{\Delta V_l}{\alpha \Delta T V_0} \phi \right) \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{U} = 0 \tag{C22}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = -\nabla \cdot [\phi(\mathbf{u} - \mathbf{U})] \tag{C23}$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{U} = -K \frac{\phi^2}{\phi_0^3} \frac{\Delta V_l}{V_0} \mathbf{e}_z \tag{C24}$$

$$\frac{\partial e^+}{\partial t} + \nabla \cdot (e^+ \mathbf{U}) = -\nabla \cdot [e_l^+(\mathbf{u} - \mathbf{U})] + \nabla^2 T - \frac{N \Delta V_l}{V_0} \phi u_z \tag{C25}$$

ただし

$$e^+ = T + \phi[1 + g(P)] \tag{C26}$$

エネルギーのスケールは $\Delta h / V_0$ 、温度のスケールは $\Delta h / C_p$ 。パラメーターは

$$K = k_{\phi 0} \rho_0 g d / \kappa \mu, \quad N = \rho_0 V_0 g d / \Delta h \tag{C27}$$

$k_{\phi 0}$ は $\phi = \phi_0 = 0.05$ に於ける浸透率。

\mathbf{U} は二つの部分に分けることができる。

$$\mathbf{U} = \nabla f + \nabla \times \mathbf{A}$$

それぞれの部分は

$$\nabla^2 f = -\frac{\partial}{\partial z} \left[K \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^3 \frac{\Delta V_l}{V_0} \right] \tag{C28}$$

$$Ra \nabla \times \left[\left(T + \frac{\Delta V_l}{\alpha \Delta T V_0} \phi \right) \mathbf{e}_z \right] + \nabla^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{C29}$$

を満足する。 A は Ra に比例するが f は Ra に依らない。 Ra が十分大きい時 A の流れが卓越する。部分溶融域の典型的長さスケールを L (無次元) とすると、この条件は

$$Ra \gg K \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^3 \left(\frac{\alpha \Delta T}{\phi L^2} \right) \quad (C30)$$

粘性率一定のとき、部分溶融域内では f による流れは下向き、 A による流れは上向となる。したがって、条件(C30)が満たされる時、マントル湧昇流によりメルトが生成されると、そのメルトにより駆動される流れは部分溶融域で全体として上向きとなり、メルトの浮力を介した火成活動・マントル湧昇流フィードバックがかかる。

粘性率が変化する場合はこのような分解はできない。ポテンシャル項とソレノイダル項にカップリングが生じる。これによりマグマの移動によるマトリックスの体積変化を起源とする火成活動・マントル湧昇流フィードバックがかかる。

(D)二成分・二相系 (固相・液相)

以下では ϵ のオーダーの項は無視する。組成を $A_\xi B_{1-\xi}$ と書く。二成分は固相では不混和、液相では理想混合液として振る舞うとする。固相での化学ポテンシャルは両成分とも(A2)式の通りとする。液相では

$$\mu_i^{l0} = \mu_s^0 + \Delta h [1 + g(P) - T/T_i^m] \quad (D1)$$

として

$$\mu_i^l = \mu_i^{l0} + RT \ln \xi_i^l \quad (D2)$$

ただし、 $i = A, B$ 、 T_i^m は各成分の圧力ゼロでの融点、 $\xi_A^l = \xi_i$ 、 $\xi_B^l = 1 - \xi_i$ 。共融点組成 ξ_e と温度 T_s は

$$\mu_i^l = \mu_s^0 \quad (D3)$$

から求まる。

$$\xi_e = \frac{e_A}{e_A + e_B}, \quad e_i = \exp \left\{ -\frac{\Delta h [1 + g(P)]}{RT_i^m} \right\} \quad (D4)$$

$$T_s = \frac{\Delta h [1 + g(P)]}{R \ln(e_A + e_B)} \quad (D5)$$

連続の式は、成分 A, B でモル体積が共通ならば(C6)-(C8)がそのまま成り立つ。ただし、流れ場の計算では(C8)の右辺は無視する。

エネルギー保存の式 (C13)、運動方程式(C18)、浸透流の式(C19)も不変。ただし密度は、 M_i ($i = A, B$)を分子量として

$$\rho_s = \frac{[\xi_s M_A + (1 - \xi_s) M_B]}{V_0 (1 + \alpha T)} \approx \rho_0 (1 - \alpha T) [1 + \beta (1 - \xi_s)] \quad (D6)$$

$$\rho_l \approx \rho_0 \left(1 - \alpha T - \frac{\Delta V_l}{V_0}\right) [1 + \beta(1 - \xi_l)] \quad (\text{D7})$$

ここで、 $\rho_0 = M_A/V_0$ 、 $\beta = (M_B - M_A)/M_A$ 。

物質輸送の式は

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\xi) = -\nabla \cdot [\xi_l \phi(\mathbf{u} - \mathbf{U})] \quad (\text{D8})$$

(話題) 火成活動・マントル湧昇流フィードバック 2：対流攪拌

$$\rho_s - \rho_l = \rho_0 \left\{ \frac{\Delta V_l}{V_0} [1 + \beta(1 - \xi_l)] - \beta(\xi_s - \xi_l) \right\} \quad (\text{D9})$$

として基礎方程式(C13), (C17)-(C19),(C23), (D6)-(D8)を解く。

(E) 二成分・液相+固相 (低圧相+高圧相)

化学ポテンシャル

成分 A:

固相・低圧相

$$\mu_A^{sL} = \mu_s^0 = C_p T - T(S_0 + C_p \ln T) + (1 + \epsilon)PV_0 \quad (\text{E1})$$

固相・高圧相

$$\mu_A^{sH} = \mu_A^{sL} + \Delta S(T - T_A) - P\Delta V_s^0(1 + \epsilon), \quad \Delta S < 0 \quad (\text{E2})$$

液相

$$\mu_A^{l0} = \mu_A^{sL} + \Delta h[1 + g(P)(1 + \epsilon)] - T\Delta h/T_A^m \quad (\text{E3})$$

成分 B:

固相

$$\mu_B^s = \mu_A^{sL} - \int_0^P \Delta V_B(1 + \epsilon) dP \quad (\text{E4})$$

液相

$$\mu_B^{l0} = \mu_A^{sL} + \Delta h[1 + g(P)(1 + \epsilon)] - T\Delta h/T_B^m \quad (\text{E5})$$

液相は理想混合溶液として

$$\mu_A^l = \mu_A^{l0} + RT \ln \xi_l \quad (\text{E6})$$

$$\mu_B^l = \mu_B^{l0} + RT \ln(1 - \xi_l) \quad (\text{E7})$$

これに対応して

成分 A、固相

$$V_A^{si} = (V_0 - \Delta V_s^0 \delta_{iH})(1 + \epsilon) \equiv V_A^{sio}(1 + \epsilon), \quad (i = L, H) \quad (\text{E8})$$

$$h_A^{si} = C_p T + PV_0 - \delta_{iH}(T_A \Delta S + P\Delta V_s^0) \quad (\text{E9})$$

$$e_A^{si} = C_p T - \delta_{iH} T_A \Delta S + \epsilon P(V_0 - \delta_{iH} \Delta V_s^0) \quad (\text{E10})$$

成分 B、固相

$$V_B^s = (V_0 - \Delta V_B)(1 + \epsilon) \quad (\text{E11})$$

$$h_B^s = C_p T + P V_0 - \int_0^P \Delta V_B dP \quad (\text{E12})$$

$$e_B^s = C_p T + P \Delta V_B - \int_0^P \Delta V_B dP - \epsilon P (V_0 - \Delta V_B) \quad (\text{E13})$$

液相

$$V^l = (V_0 + \Delta V_l)(1 + \epsilon), \quad \Delta V_l \equiv \Delta h \frac{dg}{dP} \quad (\text{E14})$$

$$h^l = C_p T + P V_0 + \Delta h [1 + g(P)] \quad (\text{E15})$$

$$e^l = C_p T - P \Delta V_l + \Delta h [1 + g(P)] - \epsilon P (V_0 + \Delta V_l) \quad (\text{E16})$$

連続の式は融解する物質の組成を ξ' として、三重点を除いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{V_l} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{\phi}{V_l} \right) = \dot{m} \quad (\text{E17})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(1-\phi)\xi_s}{V_A^s} \right] + \nabla \cdot \left[\mathbf{U} \frac{(1-\phi)\xi_s}{V_A^s} \right] = -\xi' \dot{m} \quad (\text{E18})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(1-\phi)(1-\xi_s)}{V_B^s} \right] + \nabla \cdot \left[\mathbf{U} \frac{(1-\phi)(1-\xi_s)}{V_B^s} \right] = -(1-\xi') \dot{m} \quad (\text{E19})$$

$$V_A^s = V_0 - \delta_{iH} \Delta V_s \equiv V_0 - \Delta V_A^s$$

よって

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\phi \mathbf{u} + (1-\phi) \mathbf{U}] &= \dot{m} [\Delta V_l + \xi' \Delta V_A^s + (1-\xi') \Delta V_B^s] \\ &\quad + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\phi \mathbf{u}}{V_l} \cdot \nabla V_l + (1-\phi) \left[\frac{\xi_s}{V_A^s} \mathbf{U} \cdot \nabla V_A^s + \frac{1-\xi_s}{V_B^s} \mathbf{U} \cdot \nabla V_B^s \right] \end{aligned} \quad (\text{E20})$$

エネルギー方程式：

$$e_l^+ = e_l + \epsilon (V_0 + \Delta V_l) + P \Delta V_l = C_p T + \Delta h [1 + g(p)] \quad (\text{E21})$$

$$e_B^{s+} = e_B^s + \epsilon P (V_0 - \Delta V_B) - P \Delta V_B = C_p T - \int_0^P \Delta V_B dP \quad (\text{E22})$$

$$e_A^{si+} = e_A^{si} + \epsilon P (V_0 - \delta_{iH} \Delta V_s^0) - \delta_{iH} P \Delta V_s = C_p T - \delta_{iH} (T_A \Delta S + P \Delta V_s) \quad (\text{E23})$$

$$\frac{e^+}{V_0} \equiv \frac{\phi}{V_l} e_l^+ + (1-\phi) \left[\frac{1-\xi_s}{V_B^s} e_B^{s+} + \frac{\xi_s(1-\zeta_A)}{V_A^s} e_A^{sL+} + \frac{\xi_s \zeta_A}{V_A^{sH}} e_A^{sH+} \right] \quad (\text{E24})$$

として、(E20)式中の \dot{m} , $\xi' \dot{m}$, $(1-\xi') \dot{m}$ をそれぞれ(E17), (E18), (E19)から消去して $\epsilon \Delta V$ の項を無視すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^+}{V_0} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{U} \frac{e^+}{V_0} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{e_l^+}{V_l} \phi (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \right] &= \Phi + \left\{ \frac{\phi \Delta V_l}{V_l} \mathbf{u} - (1-\phi) \Delta V_s \left[\frac{\xi_s \zeta_A}{V_A^s} + \frac{(1-\xi_s) \zeta_B}{V_B^s} \right] \right\} \mathbf{U} \cdot \nabla P \\ &\quad - P \left\{ \frac{\phi V_0}{V_l} \mathbf{u} + (1-\phi) V_0 \left[\frac{\xi_s}{V_A^s} + \frac{(1-\xi_s) \zeta_B}{V_B^s} \right] \right\} \cdot \nabla \epsilon + \nabla \cdot \{ \epsilon P [\phi \mathbf{u} + (1-\phi) \mathbf{U}] \} \end{aligned} \quad (\text{E25})$$

ただし、 ζ_A, ζ_B は成分A, Bの固相中の高圧相の含有率。さらに $\epsilon, \Delta V^2$ のオーダーの項を無視すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^+}{V_0} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{U} \frac{e^+}{V_0} \right) + \nabla \cdot \left[\frac{e_l^+}{V_l} \phi (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \right]$$

$$= \Phi + \left\{ \frac{\phi \Delta V_l}{v_0} \mathbf{u} - (1 - \phi) \Delta V_s \left[\frac{\xi_s \zeta_A}{v_0} + \frac{(1 - \xi_s) \zeta_B}{v_0} \right] \right\} \mathbf{U} \cdot \nabla P \quad (\text{E26})$$

運動方程式(C18)、浸透流の式(C19)、物質輸送の式(D8)は不変。連続の式は(E20)の右辺を0と置いた式(C23)を用いる。

(話題)玄武岩バリアーとバースト

(話題) 固・液密度逆転とマンツルの成層：

(D9)で β が十分大きいと液相と固相の間で密度逆転が起こる。現実の地球でも下部マンツル深部ではこの逆転が起こる。さらに遷移層深部でも起こる可能性あり。MMU_b フィードバックがかからず、マンツルに内部熱源がない場合、これによりマンツルは化学成層する。