

2 次元非静力学モデルの離散化

杉山耕一朗, 小高正嗣, 北守太一

2005 年 4 月 13 日

要旨

理想気体を仮定した乾燥大気に対する 2 次元準圧縮性方程式系の離散化を行う。変数の格子配置は Lorenz グリッドにしたがう。空間方向の離散化は 2 次精度中心差分を用いて行う。時間方向の離散化は時間分割法を用いて行う。運動方程式と圧力方程式は短い時間刻み $\Delta\tau$ で時間積分を行う。音波に関する項の離散化には HE-VI 法を採用し、 u の式は前進差分、 w, π の式は後退差分で評価する。音波にかかわらない項についてはリープフロッグ法を用いて積分する。熱力学の式とその他のトレーサの式は、リープフロッグ法を用いて長い時間刻み Δt で時間積分を行う。

目次

第 1 章	数値計算の概要	2
1.1	格子と変数の配置	2
1.2	空間, 時間方向の離散化の方法	2
第 2 章	空間方向の離散化	4
2.1	平均操作	4
2.2	空間微分の離散化	5
2.2.1	2 次精度中心差分	5
2.2.2	4 次精度中心差分	6
2.3	空間離散化した基礎方程式	7
2.3.1	静水圧の式	7
2.3.2	運動方程式	7
2.3.3	圧力方程式	7
2.3.4	熱力学の式	8
2.4	境界条件	9
2.4.1	周期境界条件の与え方	9
2.4.2	すべりなし条件の与え方	9
2.4.3	応力なし条件の与え方	10
第 3 章	時間方向の離散化	11
3.1	運動方程式と圧力方程式	11
3.1.1	水平方向の運動方程式	12
3.1.2	鉛直方向の運動方程式と圧力方程式	12
3.1.3	運動方程式の外力項	15
3.2	熱力学の式	17
3.3	乱流運動エネルギーの式	18
3.4	時間フィルター	20
第 4 章	参考文献	21
付 録 A	圧力方程式 (??) の左辺の空間微分の書き下し	22
A.1	下部境界	22
A.2	上部境界	23

2 次元非静力学モデルの離散化	2
付 録 B 音波減衰項について	25
付 録 C 差分式の導出と誤差	27
C.1 2 次精度中心差分	27
C.2 4 次精度中心差分	28
謝辞	

第 1 章 数値計算の概要

1.1 格子と変数の配置

本モデルでは 図 1.1 に示すように, 水平・鉛直方向の変数をずらして互い違いに配置する. 配置方法は, 水平方向に Arakawa C グリッド, 鉛直方向には Lorenz グリッドを用いている.

すべてのスカラー量 (ϕ : 気圧偏差, 温位偏差, 水蒸気混合比, 雲水混合比, 雨水混合比) を格子の中心に配置する. ベクトル量 (速度 u, w など) は中心から次のように半格子ずらして配置する. x 方向ベクトル量を評価する点は, 鉛直方向にはスカラー量と同じとし水平方向に半格子ずらす. x 方向ベクトル量を評価する点は, 水平方向にはスカラー量と同じとし鉛直方向に半格子ずらす. 格子点のラベルづけおよび境界は 図 1.2 のように設定する.

1.2 空間, 時間方向の離散化の方法

空間方向の離散化は 2 次精度中心差分を用いて行う. 時間方向の離散化は時間分割法を用いて行う. 運動方程式と圧力方程式は短い時間刻み $\Delta\tau$ で時間積分を行う. 音波に関する項の離散化には HE-VI 法を採用し, u の式は前進差分, w, π の式は後退差分で評価する. 音波にかかわらない項についてはリープフロッグ法を用いて積分する. 熱力学の式とその他のトレーサの式は, リープフロッグ法を用いて長い時間刻み Δt で時間積分を行う.

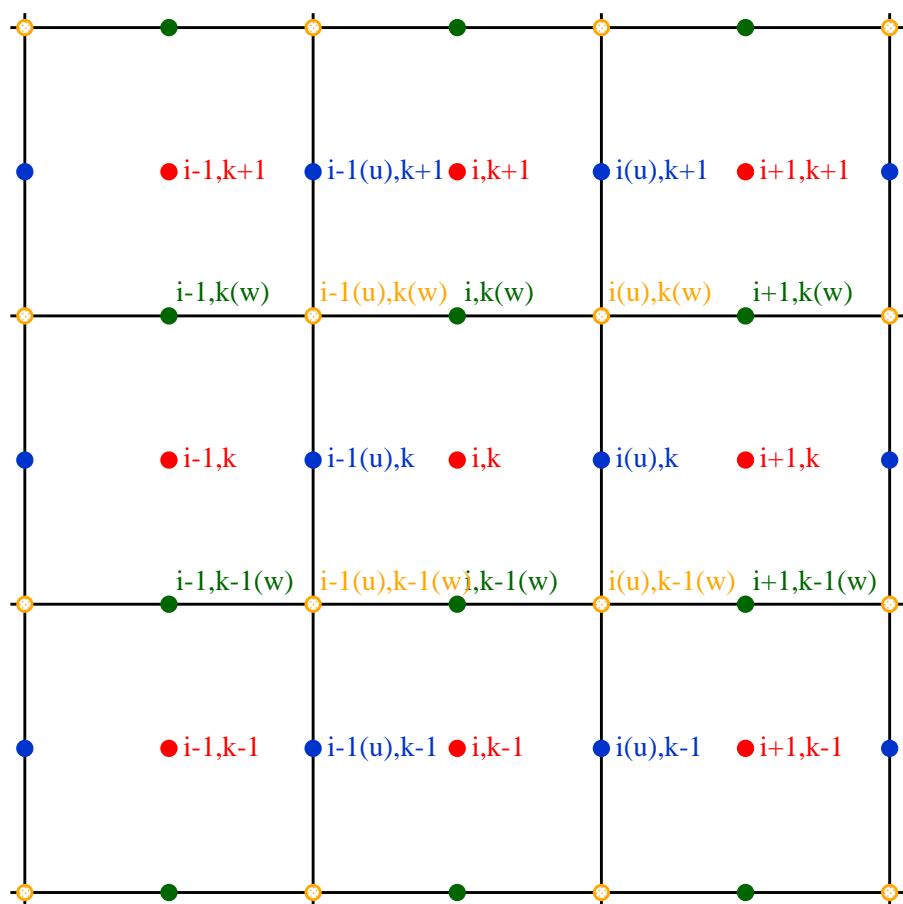
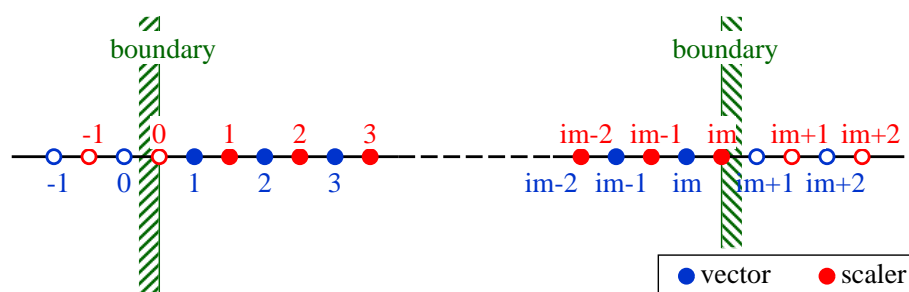


図 1.1: 格子点の配置.

図 1.2: 添字と境界の設定. 実際に計算する添字の範囲は 1 から im とする.

第 2 章 空間方向の離散化

この節では空間微分の離散化の方法とそのため必要となる平均操作、境界条件の与え方について説明する。離散化は 2 次精度差分または 4 次精度差分を用いて行う。

図 1.1 の空間の位置を表す添字として、 x 方向フラックスの格子点を $(i(u), k)$, z 方向フラックスの格子点を $(i, k(w))$, スカラー量の格子点を (i, k) , 格子の角に当たる点を $(i(u), k(w))$ とする (図 1.1 参照)。但し $1 \leq i(u) \leq im$, $1 \leq i \leq im$, $1 \leq k(w) \leq km$, $1 \leq k \leq km$ である。

2.1 平均操作

空間微分の離散化を行う前に、そのために必要となる平均操作を定義しておく。例えば x 方向フラックス格子点で評価される変数をスカラー量の格子点で評価する場合は、フラックス格子点の値を平均してスカラー格子点での値とみなす。

必要となる平均操作を以下に示す。ここでは x 方向のフラックス格子点の変数を $u_{i(u),k}$, z 方向のフラックス格子点の変数を $w_{i,k(w)}$, スカラー格子点の変数を $\pi_{i,k}$ としている。

$$\pi_{i(u),k} \equiv \frac{\pi_{i+1,k} + \pi_{i,k}}{2} \quad (2.1)$$

$$\pi_{i,k(w)} \equiv \frac{\pi_{i,k+1} + \pi_{i,k}}{2} \quad (2.2)$$

$$\pi_{i(u),k(w)} \equiv \frac{\pi_{i,k} + \pi_{i+1,k} + \pi_{i,k+1} + \pi_{i+1,k+1}}{4} \quad (2.3)$$

$$u_{i,k} \equiv \frac{u_{i(u),k} + u_{i-1(u),k}}{2} \quad (2.4)$$

$$u_{i,k(w)} \equiv \frac{u_{i(u),k+1} + u_{i-1(u),k+1} + u_{i(u),k} + u_{i-1(u),k}}{4} \quad (2.5)$$

$$u_{i(u),k(w)} \equiv \frac{u_{i(u),k+1} + u_{i(u),k}}{2} \quad (2.6)$$

$$w_{i,k} \equiv \frac{w_{i,k(w)} + w_{i,k-1(w)}}{2} \quad (2.7)$$

$$w_{i(u),k} \equiv \frac{w_{i+1,k(w)} + w_{i,k(w)} + w_{i+1,k-1(w)} + w_{i,k-1(w)}}{4} \quad (2.8)$$

$$w_{i(u),k(w)} \equiv \frac{w_{i+1,k(w)} + w_{i,k(w)}}{2} \quad (2.9)$$

2.2 空間微分の離散化

2.2.1 2 次精度中心差分

空間微分を 2 次精度差分で離散化する際に必要となる微分操作を以下に示す. ここでは x 方向のフラックス格子点の変数を $u_{i(u),k}$, z 方向のフラックス格子点の変数を $w_{i,k(w)}$, スカラー格子点の変数を $\pi_{i,k}$ としている. x, z 方向ともにフラックス格子点の変数を $\phi_{i(u),k(w)}$ としている.

それぞれの変数に対して微分を評価する格子点は一意に決まる. そのため, 他の格子点において微分を評価する場合には平均操作を用いる.

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial x} \right]_{i(u),k} \equiv \frac{\pi_{i+1,k} - \pi_{i,k}}{\Delta x} \quad (2.10)$$

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \equiv \frac{\pi_{i,k+1} - \pi_{i,k}}{\Delta z} \quad (2.11)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \equiv \frac{u_{i(u),k} - u_{i-1(u),k}}{\Delta x} \quad (2.12)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i(u),k(w)} \equiv \frac{u_{i(u),k+1} - u_{i(u),k}}{\Delta z} \quad (2.13)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{i(u),k(w)} \equiv \frac{w_{i+1,k(w)} - w_{i,k(w)}}{\Delta x} \quad (2.14)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{i,k} \equiv \frac{w_{i,k(w)} - w_{i,k-1(w)}}{\Delta z} \quad (2.15)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{i,k(w)} \equiv \frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i-1(u),k(w)}}{\Delta x} \quad (2.16)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{i(u),k} \equiv \frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i(u),k-1(w)}}{\Delta z} \quad (2.17)$$

2.2.2 4 次精度中心差分

2 次精度中心差分の場合と同様に, 空間微分を 4 次精度差分で離散化する際に必要となる微分操作を以下に示す.

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial x} \right]_{i(u),k} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{\pi_{i+1,k} - \pi_{i,k}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{\pi_{i+2,k} - \pi_{i-1,k}}{\Delta x} \right) \quad (2.18)$$

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{\pi_{i,k+1} - \pi_{i,k}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{\pi_{i,k+2} - \pi_{i,k-1}}{\Delta x} \right) \quad (2.19)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{u_{i(u),k} - u_{i-1(u),k}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{u_{i(u)+1,k} - u_{i-2(u),k}}{\Delta x} \right) \quad (2.20)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i(u),k(w)} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{u_{i(u),k+1} - u_{i(u),k}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{u_{i(u),k+2} - u_{i(u),k-1}}{\Delta x} \right) \quad (2.21)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{i(u),k(w)} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{w_{i+1,k(w)} - w_{i,k(w)}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{w_{i+2,k(w)} - w_{i-1,k(w)}}{\Delta x} \right) \quad (2.22)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{i,k} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{w_{i,k(w)} - w_{i,k-1(w)}}{\Delta z} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{w_{i,k+1(w)} - w_{i,k-2(w)}}{\Delta z} \right) \quad (2.23)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{i,k(w)} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i-1(u),k(w)}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{\phi_{i+1(u),k(w)} - \phi_{i-2(u),k(w)}}{\Delta x} \right) \quad (2.24)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{i(u),k} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i(u),k-1(w)}}{\Delta z} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{\phi_{i(u),k+1(w)} - \phi_{i(u),k-2(w)}}{\Delta z} \right) \quad (2.25)$$

2.3 空間離散化した基礎方程式

2.3.1 静水圧の式

1

$$\left[\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} \right]_{i,k} = -\frac{g}{c_p \bar{\theta}_{i,k}} \quad (2.26)$$

基本場の密度 $\bar{\rho}_{i,k}$ は以下のように計算する.

$$\bar{\rho}_{i,k} = \frac{p_{0,i,k}}{R_d} \frac{\bar{\Pi}_{i,k}^{c_v/R_d}}{\bar{\theta}_{i,k}} \quad (2.27)$$

2.3.2 運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i(u),k}}{\partial t} = & -u_{i(u),k} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i(u),k} - w_{i(u),k} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i(u),k} \\ & - c_p \bar{\theta}_{v,i(u),k} \left[\frac{\partial \pi}{\partial x} \right]_{i(u),k} + [D_u]_{i(u),k} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{i,k(w)}}{\partial t} = & -u_{i,k(w)} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k(w)} - w_{i,k(w)} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \\ & - c_p \bar{\theta}_{v,i,k(w)} \left[\frac{\partial \pi}{\partial z} \right]_{i,k(w)} + g \frac{\theta_{i,k(w)}}{\bar{\theta}_{i,k(w)}} + [D_w]_{i,k(w)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3.3 圧力方程式

$$\frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial t} + \frac{\bar{c}_{i,k}^2}{c_p \bar{\rho}_{i,k} \bar{\theta}_{i,k}^2} \left[\frac{\partial \bar{\rho}_v u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_v w}{\partial z} \right]_{i,k} = 0. \quad (2.30)$$

基本場の音速 \bar{c} は以下のように計算する.

$$\bar{c}_{i,k}^2 = \frac{c_p R_d}{c_v} \bar{\Pi}_{i,k} \bar{\theta}_{i,k}. \quad (2.31)$$

¹ ここには基本場の数値積分方法を記載する.

2.3.4 熱力学の式

$$\frac{\partial \theta_{i,k}}{\partial t} = -u_{i,k} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{i,k} - w_{i,k} \left[\frac{\partial (\theta + \bar{\theta})}{\partial z} \right]_{i,k} + [D_\theta]_{i,k}. \quad (2.32)$$

2.4 境界条件

ここでは離散化した変数に対する境界条件の与え方をまとめる。考慮する境界条件は、周期境界条件、境界ですべりなし条件と応力なし条件である。

2.4.1 周期境界条件の与え方

例として、 x 方向フラックス格子点に配置された変数 $u_{i(u),k}$ を考える。計算領域内の x 方向の添字を $1(u) \sim im(u)$ とし、糊代部分の格子点数を 2 とする (図 1.2 参照)。このとき周期境界条件は以下のように与えられる。

$$u_{0(u),k} = u_{im(u),k} \quad (2.33)$$

$$u_{-1(u),k} = u_{im-1(u),k} \quad (2.34)$$

$$u_{im+1(u),k} = u_{1(u),k} \quad (2.35)$$

$$u_{im+2(u),k} = u_{2(u),k} \quad (2.36)$$

ただし k は任意の整数であり、その範囲は $-1 \leq k \leq km + 2$ である。

z 方向フラックス格子点に配置された変数、スカラー格子点に配置された変数に対しても同様に与えることができる。

2.4.2 すべりなし条件の与え方

境界で速度を 0 とする。この場合、境界をはさんで変数の値が反対称になるように与える。

例として x 方向に境界を与えた場合を考える。 x 方向フラックス格子点に配置された変数に対しては、

$$u_{0(u),k} = u_{im(u),k} = 0 \quad (2.37)$$

$$u_{-1(u),k} = -u_{1(u),k} \quad (2.38)$$

$$u_{im+1(u),k} = -u_{im-1(u),k} \quad (2.39)$$

$$u_{im+2(u),k} = -u_{im-2(u),k} \quad (2.40)$$

とする。境界上に配置されていない変数に対しては、

$$\pi_{0,k} = -\pi_{1,k} \quad (2.41)$$

$$\pi_{-1,k} = -\pi_{1,k} \quad (2.42)$$

$$\pi_{im+1,k} = -\pi_{im-1,k} \quad (2.43)$$

$$\pi_{im+2,k} = -\pi_{im-2,k} \quad (2.44)$$

とする.

2.4.3 応力なし条件の与え方

境界上で法線方向速度を 0, 接線方向速度の法線方向微分を 0 とする. この場合, 境界上で配置された速度成分は境界をはさんで変数の値が反対称になるように与え, 境界上に配置されていない変数に対しては壁をはさんで変数の値が対称になるように与える.

例として x 方向に境界を与えた場合を考える. x 方向フラックス格子点に配置された変数に対しては,

$$u_{0(u),k} = u_{im(u),k} = 0 \quad (2.45)$$

$$u_{-1(u),k} = -u_{1(u),k} \quad (2.46)$$

$$u_{im+1(u),k} = -u_{im-1(u),k} \quad (2.47)$$

$$u_{im+2(u),k} = -u_{im-2(u),k} \quad (2.48)$$

とする. 境界上に配置されていない変数に対しては,

$$\pi_{0,k} = \pi_{1,k} \quad (2.49)$$

$$\pi_{-1,k} = \pi_{1,k} \quad (2.50)$$

$$\pi_{im+1,k} = \pi_{im-1,k} \quad (2.51)$$

$$\pi_{im+2,k} = \pi_{im-2,k} \quad (2.52)$$

とする.

第3章 時間方向の離散化

3.1 運動方程式と圧力方程式

空間離散化された運動方程式 (2.28), (2.29) と圧力方程式 (2.30) を時間方向に離散化する. 音波に関連する項は短いタイムステップ $\Delta\tau$ で離散化し, その他の項は長いタイムステップ Δt で離散化する. 音波に関連する項の離散化には HE-VI 法を採用し, u の式は前進差分, w, π の式は後退差分 (クランク・ニコルソン法) で離散化する. その他の項の離散化にはリープフロッグ法を用いる. 離散化した式の計算はまず u の式から行う. 得られた $\tau + \Delta\tau$ の u を用いて π を計算し, u, π を用いて w を計算する.

解く方程式を以下のように書き直す.

$$\frac{\partial u_{i(u),k}}{\partial t} = - \left[\bar{c}_p \bar{\theta}_v \frac{\partial(\pi - \alpha Div)}{\partial x} \right]_{i(u),k} + F_{u,i(u),k}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial w_{i,k(w)}}{\partial t} = - \left[\bar{c}_p \bar{\theta}_v \frac{\partial(\pi - \alpha Div)}{\partial z} \right]_{i,k(w)} + F_{w,i,k(w)}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial t} + \left[\frac{\bar{c}^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w)}{\partial z} \right]_{i,k} = - \left[\frac{\bar{c}^2}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k}. \quad (3.3)$$

ただし u, w の式には音波減衰項 (Skamarock and Klemp, 1992) を加えてある. ここで F_u, F_w は音波に関連しない項,

$$F_{u,i(u),k}^t = - [Adv_u]_{i(u),k}^t + [D_u]_{i(u),k}^{t-\Delta t} \quad (3.4)$$

$$F_{w,i,k(w)}^t = - [Adv_w]_{i(u),k}^t + g \frac{\theta_{i,k(w)}^t}{\bar{\theta}_{i,k(w)}} + [D_w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t}. \quad (3.5)$$

であり, 時刻 t で評価する.

3.1.1 水平方向の運動方程式

(3.1) を時間方向に離散化すると以下ようになる.

$$u_{i(u),k}^{\tau+\Delta\tau} = u_{i(u),k}^{\tau} - \left[\bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta\tau \left\{ \frac{\partial \pi^{\tau}}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha Div)^{\tau}}{\partial x} \right\} \right]_{i(u),k} + F_{u,i(u),k}^t \Delta\tau \quad (3.6)$$

3.1.2 鉛直方向の運動方程式と圧力方程式

HE-VI 法を用いるので, w と π の式を連立して解く. w の式において音波減衰項は前進差分, 圧力項は後退差分で離散化する. π の式において水平微分項は (3.6) で求めた $u^{\tau+\Delta\tau}$ を用いて離散化し, 鉛直微分項は後退差分で離散化する.

$$w^{\tau+\Delta\tau} = w^{\tau} - \bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta\tau \left\{ \beta \frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} + (1-\beta) \frac{\partial \pi^{\tau}}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^{\tau}}{\partial z} \right\} + F_w^t \Delta\tau. \quad (3.7)$$

$$\pi^{\tau+\Delta\tau} + \beta \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^{\tau+\Delta\tau})}{\partial z} = \pi^{\tau} - (1-\beta) \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^{\tau})}{\partial z} - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x}. \quad (3.8)$$

ここでは簡単のため格子点位置を表す添字は省略した. (3.8) 式に (3.7) を代入して $w^{\tau+\Delta\tau}$ を消去する.

$$\begin{aligned} \pi^{\tau+\Delta\tau} &= \beta^2 \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right) \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right) \right\} \\ &= \pi^{\tau} - (1-\beta) \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^{\tau})}{\partial z} - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \\ &\quad - \beta \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^{\tau} - \bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta\tau \left\{ (1-\beta) \frac{\partial \pi^{\tau}}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^{\tau}}{\partial z} \right\} + F_w^t \Delta\tau \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9) 式右辺を空間方向に離散化し, 格子点位置を表す添字を付けて表すと以下ようになる (計算の詳細は 第 A 章 参照).

$$\begin{aligned} &\left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k(w)} \right\} \pi_{i,k+1}^{\tau+\Delta\tau} \\ &+ \left[1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k(w)} + \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k-1(w)} \right\} \right] \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} \\ &+ \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k-1(w)} \right\} \pi_{i,k-1}^{\tau+\Delta\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi_{i,k}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,k} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_k \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta \tau}}{\partial x} \right)_{i,k} \\
&\quad - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left[\frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)_{i,k(w)} \left\{ w_{i,k(w)}^\tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\bar{c}_p \bar{\theta}_v)_{i,k(w)} \Delta \tau \left\{ (1 - \beta) \frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right\}_{i,k(w)} + (F_w^t)_{i,k(w)} \Delta \tau \right\} \right]_{i,k}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

但し平均場の量は鉛直方向にしか依存しないので z 方向の添字のみ付けてある。

境界条件

上下境界を固定壁とする場合, 境界条件は上部下部境界で,

$$w(i, 0(w)) = 0, \tag{3.11}$$

$$w(i, km(w)) = 0 \tag{3.12}$$

である。

下部境界:

下部境界 ($k(w) = 0(w)$) について考える。この時 (3.7) 式に添字を付けて書き下すと,

$$\begin{aligned}
\beta \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta \tau}}{\partial z} \right)_{i,0(w)} &= \left(\frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right)_{i,0(w)} - (1 - \beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right)_{i,0(w)} + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right)_{i,0(w)} \\
&\equiv E_{i,0(w)}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。したがって (3.10) 式は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&\left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)} \right\} \pi_{i,2}^{\tau+\Delta \tau} + \left\{ 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)} \right\} \pi_{i,1}^{\tau+\Delta \tau} \\
&= \pi_{i,1}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,1} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_1 \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta \tau}}{\partial x} \right)_{i,1} \\
&\quad - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \left[\frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta \tau \left\{ (1 - \beta) \frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right\} + F_w^t \Delta \tau \right\} \right]_{i,1} \\
&\quad - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{i,0(w)} E_{i,0(w)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

上部境界:

上部境界 ($k(w) = km(w)$) について考える. この時 (3.7) 式を添字を付けて書き下すと,

$$\begin{aligned} \beta \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,km(w)} &= \left(\frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right)_{i,km(w)} - (1-\beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right)_{i,km(w)} + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\rho}_v} F_w^t \right)_{i,km(w)} \\ &\equiv E_{i,km(w)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる. したがって (3.10) 式は以下ようになる.

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)} \right\} \pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\ &+ \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)} \right\} \pi_{i,km-1}^{\tau+\Delta\tau} \\ &= \pi_{i,km}^\tau - (1-\beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,km} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_{km} \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right)_{i,km} \\ &- \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \left[\frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta \tau \left\{ (1-\beta) \frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right\} + F_w^t \Delta \tau \right\} \right]_{i,km} \\ &+ \frac{\beta}{\Delta z} \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km(w)} E_{i,km(w)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

圧力方程式の解き方

(3.10), (3.14), (3.16) 式を連立すると, 以下のような行列式の形式で書くことができる.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A_1 & B_2 & & 0 \\ C_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & B_{km} \\ 0 & & C_{km-1} & A_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{2,1} & \cdots & \pi_{im,1} \\ \pi_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \pi_{1,km} & \cdots & \cdots & \pi_{im,km} \end{pmatrix}^{\tau+\Delta\tau} \\ &= \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & \cdots & D_{im,1} \\ D_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{1,km} & \cdots & \cdots & D_{im,km} \end{pmatrix}^\tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

この連立方程式を解くことで $\pi_{i,k}$ を求める. この連立方程式の係数は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
A_k &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)} + (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)} \right\} \\
&\quad (k = 2, 3, \dots, km - 1), \\
A_1 &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)}, \\
A_{km} &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)}, \\
B_k &= -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{k-1} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)}, \\
C_k &= -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{k+1} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)}, \\
D_{i,k} &= \pi_{i,k}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,k} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_k \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta \tau}}{\partial x} \right)_{i,k} - F_{i,k} \\
&\quad (k = 2, 3, \dots, km - 1), \\
D_{i,1} &= \pi_{i,1}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,1} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_1 \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta \tau}}{\partial x} \right)_{i,1} - F_{i,k} \\
&\quad - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{i,0(w)} E_{i,0(w)}, \\
D_{i,km} &= \pi_{i,km}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,km} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_{km} \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta \tau}}{\partial x} \right)_{i,km} - F_{i,k} \\
&\quad + \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km(w)} E_{i,km(w)}.
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
E_{i,k(w)} &\equiv \left(\frac{\partial (\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right)_{i,k(w)} - (1 - \beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right)_{i,k(w)} + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right)_{i,k(w)} \\
F_{i,k} &\equiv -\beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left[\frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)_{i,k(w)} \left\{ w_{i,k(w)}^\tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\bar{c}_p \bar{\theta}_v)_{i,k(w)} \Delta \tau \left\{ (1 - \beta) \frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} - \frac{\partial (\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right\}_{i,k(w)} + (F_w^t)_{i,k(w)} \Delta \tau \right\} \right]_{i,k}.
\end{aligned}$$

である.

3.1.3 運動方程式の外力項

運動方程式の外力項 (3.1), (3.2) 式を離散化する.

$$F_{u,i(u),k}^t = -[\text{Adv}.u]_{i(u),k}^t + [\text{D}_u + \text{Diff}.u]_{i(u),k}^{t-\Delta t}, \quad (3.18)$$

$$F_{w,i,k(w)}^t = -[\text{Adv}.w]_{i,k(w)}^t + [\text{Buoy}]_{i,k(w)}^t + [\text{D}_w + \text{Diff}.w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t}. \quad (3.19)$$

ここで, Adv は移流項, D は粘性拡散項, Buoy は浮力項である. 中心差分でリーブフロッグ法を用いるために, 数値粘性項 Diff を追加してある. それぞれの項を書き下すと,

$$[\text{Adv}_u]_{i(u),k}^t = -u_{i(u),k}^t \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i(u),k}^t - w_{i(u),k}^t \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i(u),k}^t \quad (3.20)$$

$$[\text{Adv}_w]_{i,k(w)}^t = -u_{i,k(w)}^t \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{i,k(w)}^t - w_{i,k(w)}^t \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{i,k(w)}^t \quad (3.21)$$

であり, 浮力項は,

$$[\text{Buoy}]_{i,k(w)}^t = g \left[\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right]_{i,k(w)}^t \quad (3.22)$$

であり, 粘性拡散項は,

$$\begin{aligned} [\text{D}_u]_{i(u),k}^{t-\Delta t} &= 2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (K_m)_{i,k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k} \right\} \right]_{i(u),k}^{t-\Delta t} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (K_m)_{i(u),k(w)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} + (K_m)_{i(u),k(w)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} \right\} \right]_{i(u),k}^{t-\Delta t} \\ &\quad - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial x} \right)_{i(u),k}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} [\text{D}_w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} &= 2 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (K_m)_{i,k} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k} \right\} \right]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (K_m)_{i(u),k(w)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} + (K_m)_{i(u),k(w)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} \right\} \right]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} \\ &\quad - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial z} \right)_{i,k(w)}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (3.24)$$

である. 数値粘性項は,

$$[\text{Diff}.u]_{i(u),k}^{t-\Delta t} = \nu_h \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k} \right\}_{i(u),k}^{t-\Delta t} + \nu_v \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} \right\}_{i(u),k}^{t-\Delta t} \quad (3.25)$$

$$[\text{Diff}.w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} = \nu_h \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} \right\}_{i,k(w)}^{t-\Delta t} + \nu_v \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k} \right\}_{i,k(w)}^{t-\Delta t} \quad (3.26)$$

である. K_m は乱流エネルギーの時間発展方程式から計算し (詳細は後述), ν_h, ν_v は以下のように定める.

$$\nu_h = \frac{\alpha_h \Delta x^2}{\Delta t} \quad (3.27)$$

$$\nu_v = \frac{\alpha_v \Delta z^2}{\Delta t} \quad (3.28)$$

ここで $\Delta x, \Delta z$ は水平・鉛直方向の格子間隔を意味し, α_h, α_v はそれぞれ,

$$\alpha_h \leq \frac{1}{8}, \quad \alpha_v \leq \frac{1}{8} \quad (3.29)$$

とする.

3.2 熱力学の式

熱力学の式を書き下すと以下ようになる.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = F_\theta \quad (3.30)$$

(3.30) 式を時間方向にリープフロッグ法を用いて離散化する.

$$\theta_{i,k}^t = \theta_{i,k}^{t-\Delta t} + 2F_\theta \Delta t \quad (3.31)$$

ここで,

$$F_{\theta,i,k}^t = -[\text{Adv}_\theta]_{i,k}^t - [\text{Src}_\theta]_{i,k}^t + [D_\theta + \text{Diff}_\theta]_{i,k}^{t-\Delta t}. \quad (3.32)$$

である. 移流を中心差分で安定して解くために, 数値粘性項 Diff を追加してある.

(3.32) 式を書き下す. 移流項は,

$$[\text{Adv}_\theta]_{i,k}^t = \left\{ u_{i(u),k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{i(u),k} \right\}_{i,k}^t + \left\{ w_{i,k(w)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,k}^t \quad (3.33)$$

であり, 生成項は,

$$[\text{Src}_\theta]_{i,k}^t = \left\{ w_{i,k(w)} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,k}^t \quad (3.34)$$

であり, 粘性拡散項は,

$$\begin{aligned} [D_\theta]_{i,k}^{t-\Delta t} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (K_h)_{i(u),k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{i(u),k} \right\} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (K_h)_{i,k(w)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

である. 数値粘性項は,

$$[\text{Diff}_\theta]_{i,k}^{t-\Delta t} = \nu_h \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{i(u),k} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} + \nu_v \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} \quad (3.36)$$

である. K_h は乱流エネルギーの時間発展方程式から計算する (詳細は後述). ν_h, ν_v は (3.29) 式を利用する.

3.3 乱流運動エネルギーの式

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原篤志, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで, 乱流エネルギーの時間発展方程式は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_m}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial K_m}{\partial x} + w \frac{\partial K_m}{\partial z} \right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\ &\quad + (C_m^2 l^2) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{K_m}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2l^2} K_m^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

ここで $C_\varepsilon = C_m = 0.2$, 混合距離 $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする.

(3.37) 式を離散化する. CReSS にならい, 移流項を t で, 移流項以外を $t - \Delta t$ で評価する.

$$\frac{\partial K_m}{\partial t} = - \left\{ u_{i(u),k} \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)_{i(u),k} \right\}_{i,u}^t - \left\{ w_{i,k(w)} \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,u}^t$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{3gC_m^2 l^2}{2\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} \\
& + (C_m^2 l^2)_{i,k} \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}_{i(u),k} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} + (C_m^2 l^2)_{i,k} \left[\left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}_{i,k(w)} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \\
& + \left(\frac{C_m^2 l^2}{2} \right)_{i,k} \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} + \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} \right]^2 \\
& - \left(\frac{K_m}{3} \right)_{i,k}^{t-\Delta t} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k}^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k}^{t-\Delta t} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} \right)_{i,k}^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right)_{i,k}^{t-\Delta t} \right\} \\
& + \left[\left\{ \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 \right\}_{i(u),k} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} + \left[\left\{ \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \right\}_{i,k(w)} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \\
& - \frac{1}{2l^2} (K_m^2)_{i,k}^{t-\Delta t}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

3.4 時間フィルター

リーブフロッグ法を用いたことによって生じる計算モードの増幅を抑制するため, Asselin (1972) の時間フィルターを長い時間刻みで 1 ステップ計算する毎に (実際には短い時間刻みの計算を $N_\tau \equiv 2\Delta t/\Delta\tau$ ステップ計算する毎に) 適用する.

たとえば (3.6) を用いて $u_{i(u),k}^{t+\Delta t}$ を計算する場合, 以下のように時間フィルターを適用する.

$$\begin{aligned}
 u_{i(u),k}^* &= u_{i(u),k}^{\tau+(N_\tau-1)\Delta\tau} - \left[\bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta\tau \left\{ \frac{\partial \pi^{\tau+(N_\tau-1)\Delta\tau}}{\partial x} - \frac{\partial (\alpha Div)^{\tau+(N_\tau-1)\Delta\tau}}{\partial x} \right\} \right]_{i(u),k} \\
 &\quad + F_{u,i(u),k}^t \Delta\tau, \\
 u_{i(u),k}^{t+\Delta t} &= (1 - 2\gamma) u_{i(u),k}^t + \gamma (u_{i(u),k}^* + u_{i(u),k}^{t-\Delta t})
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

ここで γ はフィルターの係数であり, その値は 0.05 を用いる. (3.7), (3.8) の計算に対しても同様に時間フィルターを適用する.

第 4 章 参考文献

- Asselin, R. A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.
- Klemp J. B. and R. B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070–1096.
- Skamarock, W. C., and J. B. Klemp, 1992: The stability of time-split numerical methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equations, *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109–2127.
- 坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版.
http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html

付 録 A 圧力方程式 (3.9) の左辺の空間微分の書き下し

(3.9) 左辺の変形を行う.

$$\begin{aligned}
 (3.9) \text{ 左辺} &= \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\} \\
 &\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k-1(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,k-1(w)} \right\} \\
 &= \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k(w)} \left(\frac{\pi_{i,k+1}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta z} \right) \right\} \\
 &\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k-1(w)} \left(\frac{\pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,k-1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta z} \right) \right\} \\
 &= \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k(w)} \right\} \pi_{i,k+1}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad + \left[1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k(w)} + \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k-1(w)} \right\} \right] \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad + \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{k-1(w)} \right\} \pi_{i,k-1}^{\tau+\Delta\tau}. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

A.1 下部境界

下部境界 ($k(w) = 0(w)$) について考える. この時 (3.7) 式は,

$$\begin{aligned}
 \beta \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,0(w)} &= \left[\left(\frac{\partial (\alpha \text{Div})^\tau}{\partial z} \right) - (1 - \beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right) \right]_{i,0(w)} \\
 &\equiv E_{i,0(w)} \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

となるので, (3.9) 式の左辺は, $k = 1$ の場合には,

$$\begin{aligned}
(3.9) \text{ 左辺} &= \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{1(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,1(w)} \right\} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{0(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,0(w)} \right\} \\
&= \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{1(w)} \left(\frac{\pi_{i,2}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta z} \right) \right\} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{0(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,0(w)} \right\} \\
&= \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{1(w)} \right\} \pi_{i,2}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad + \left\{ 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{1(w)} \right\} \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad + \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{0(w)} E_{i,0(w)}
\end{aligned}$$

A.2 上部境界

上部境界 ($k(w) = km(w)$) について考える. (3.9) 式の左辺は,

$$\begin{aligned}
\beta \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,km(w)} &= \left[\left(\frac{\partial (\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right) - (1 - \beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right) \right]_{i,km(w)} \\
&\equiv E_{i,km(w)} \tag{A.3}
\end{aligned}$$

となるので, (3.9) 式の左辺は, $k(w) = km(w)$ の場合には,

$$\begin{aligned}
(3.9) \text{ 左辺} &= \pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{km(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,km(w)} \right\} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{km-1(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,km-1(w)} \right\} \\
&= \pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad -\beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{km(w)} E_{i,km(w)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} \left\{ \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{km-1(w)} \left(\frac{\pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,km-1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta z} \right) \right\} \\
= & \left\{ 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{km-1(w)} \right\} \pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
& + \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{km-1(w)} \right\} \pi_{i,km-1}^{\tau+\Delta\tau} \\
& - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} \left(\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2 \right)_{km(w)} E_{i,km(w)}
\end{aligned}$$

付 録 B 音波減衰項について

本モデルで用いている時間方向の離散化方法 (時間分割法) は, Klemp and Wilhelmson (1978) によって最初に提案された方法である. この方法を用いると, 音速および移流に対する CFL 条件をそれぞれ満たしている場合でも計算不安定を起こす場合がある. この影響は短い時間間隔で積分するステップ数 $2\Delta t/\Delta \tau$ を増加させていくにつれ大きくなる (Skamarock and Klemp, 1992, 図 1 を参照). Skamarock and Klemp (1992) はこの計算不安定を回避するため, 音波を選択的に減衰させるフィルターとして運動方程式に音波減衰項を導入することを提案した.

音波減衰項は速度場の発散に対する拡散として作用する. このことは音波減衰項を含む線形化された基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\bar{c}_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial D}{\partial x}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\bar{c}_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial z} + \alpha \frac{\partial D}{\partial z} + g \frac{\theta}{\bar{\theta}_v}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\bar{c}^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \left[\frac{\partial \bar{\rho} \bar{\theta}_v u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\theta}_v w}{\partial z} \right], \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -w \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}, \quad (\text{B.4})$$

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

から発散方程式

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\bar{c}_p \bar{\theta}_v \nabla^2 \pi + g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}_v} \right) + \alpha \nabla^2 D, \quad (\text{B.5})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を求めることで理解することができる.

音波減衰項は速度場の発散に対する拡散なので, 重力波成分も拡散させる可能性が考えられる. しかし Skamarock and Klemp (1992) は線形化された基礎方程式の分散関係を用いて, 音波減衰項の重力波成分への影響は小さいことを示している.

以下では Skamarock and Klemp (1992) における議論の概要を示す. 簡単のため圧力方程式に現れる基本場の量は定数とし, 全ての変数を $u = \hat{u}e^{i(kx+lz-\omega t)}$ のような解を持つと仮定して分散関係を求めると,

$$\omega^4 + i\alpha(k^2 + l^2)\omega^3 - [\bar{c}^2(k^2 + l^2) + N^2]\omega^2 - i\alpha k^2 N^2 \omega + \bar{c}^2 k^2 N^2 = 0, \quad (\text{B.6})$$

となる. ここで $N^2 = \frac{g}{\theta_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}$ である. 純粋な内部重力波の分散関係式

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + l^2},$$

を α を含む項に代入すると α を含む項は互いに打ち消しあうことから, 音波減衰項の重力波成分への影響は小さいであろうと予想される. 実際に, $\epsilon \equiv \alpha \sqrt{k^2 + l^2} / \bar{c}$ が小さいと仮定して ω を ϵ の巾で展開して音波減衰項の影響を評価すると, 音波減衰項は重力波成分を減衰させる方向にはたらく, その減衰率は非常に小さいことがわかる (Skamarock and Klemp, 1992, 図 5 参照).

音波減衰項の係数 α の値を決めるにあたり, 考慮しなければならないことが 2 つある. 1 つは音波減衰項そのものが計算不安定の原因とならないようすることであり, もう 1 つは音波減衰項の重力波成分への影響が大きくならないようすることである. 前者は (B.5) に示したように, 音波減衰項が発散方程式の拡散項となることから要請される. 音波減衰項の時間積分は前進差分を用いて行われるので ((3.6), (3.7) を参照), 計算不安定を起こさないためには拡散項を前進差分で時間積分する場合の安定性条件

$$\frac{\alpha \Delta \tau}{\text{Min}(\Delta x^2, \Delta z^2)} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{B.7})$$

を満たさなければならない. 後者は前段落で紹介した Skamarock and Klemp (1992) の議論で用いた ϵ が小さいという仮定から要請される¹. ϵ の最大値は

$$\begin{aligned} \text{Max}(\epsilon) &= \frac{2\alpha}{\text{Min}(\Delta x, \Delta z)\bar{c}} \\ &= \frac{2\alpha \Delta \tau}{\text{Min}(\Delta x^2, \Delta z^2)} \bigg/ \frac{\bar{c} \Delta \tau}{\text{Min}(\Delta x, \Delta z)} \end{aligned}$$

と与えられるので, $\text{Max}(\epsilon) \leq 1$ とするためには

$$\frac{\alpha \Delta \tau}{\text{Min}(\Delta x^2, \Delta z^2)} \leq \frac{1}{2} \frac{\bar{c} \Delta \tau}{\text{Min}(\Delta x, \Delta z)} \quad (\text{B.8})$$

でなければならない.(B.8) 右辺に現れる音速に対するクーラン数は 1 より小さい値とするので, (B.8) の条件を考慮すれば (B.7) は自動的に満たされることになる.

¹この条件に関する議論は Skamarock and Klemp (1992) ではなされていない

付 録 C 差分式の導出と誤差

ここでは交互格子を用いた場合の空間微分の差分式の導出と、その誤差についてまとめる。具体例としてフラックス格子点の変数 u の、 (i, j) 格子点上における x 方向一階微分

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k}$$

の差分式と、その誤差を考える。

C.1 2 次精度中心差分

フラックス格子点 $(i(u), j)$ 上の u ($u_{i(u),j}$) を x 方向に $-\Delta x/2$ だけずれたスカラー格子点 (i, j) 上の u ($u_{i,j}$) のテーラー展開として表すと、以下ようになる。

$$\begin{aligned} u_{i(u),j} &= u_{i,j} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^4 + \frac{1}{5!} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^5 + \dots \end{aligned} \quad (C.1)$$

同様に、フラックス格子点 $(i-1(u), j)$ 上の u ($u_{i-1(u),j}$) を $u_{i,j}$ のテーラー展開として表すと、以下ようになる。

$$\begin{aligned} u_{i-1(u),j} &= u_{i,j} - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^4 - \frac{1}{5!} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^5 + \dots \end{aligned} \quad (C.2)$$

(C.1) - (C.2) より,

$$\begin{aligned} u_{i(u),j} - u_{i-1(u),j} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \Delta x + \frac{1}{3} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \frac{1}{60} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^5 \\ &\quad + O[(\Delta x)^7] \end{aligned} \quad (C.3)$$

これを变形すると (i, j) 格子点上における u の x 方向一階微分の式が得られる.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \pi}{\partial x} \right]_{i(u),k} &= \frac{\pi_{i+1,j} - \pi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^3 \pi}{\partial x^3} \right]_{i(u),k} (\Delta x)^2 \\ &\quad - \frac{1}{1920} \left[\frac{\partial^5 \pi}{\partial x^5} \right]_{i(u),k} (\Delta x)^4 + O[(\Delta x)^6] \end{aligned} \quad (C.4)$$

上式の $(\Delta x)^2$ 以上の高次項を無視することで, 交互格子を用いた場合の 2 次精度中心差分の式

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i(u),k} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (C.5)$$

が得られる. このときの誤差の大きさは

$$\left| \frac{1}{24} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{i(u),k} (\Delta x)^2 \right| \quad (C.6)$$

となる.

C.2 4 次精度中心差分

2 次精度中心差分の式を求める際に用いた (C.1), (C.2) に加え, (i, j) から x 方向に $\pm \Delta 3x/2$ だけずれたフラックス格子点での u ($u_{i+1(u),j}$, $u_{i-2(u),j}$) の値を $u_{i,j}$ のテーラー展開として求める.

$$\begin{aligned} u_{i+1(u),j} &= u_{i,j} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \frac{3\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^4 + \frac{1}{5!} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^5 + \cdots \end{aligned} \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} u_{i-2(u),j} &= u_{i,j} - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \frac{3\Delta x}{2} + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^4 - \frac{1}{5!} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^5 + \cdots \end{aligned} \quad (C.8)$$

(C.7) - (C.8) より,

$$\begin{aligned} u_{i+1(u),j} - u_{i-2(u),j} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} 3\Delta x + \frac{1}{3} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^3 + \frac{1}{60} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i,k} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^5 \\ &\quad + O[(\Delta x)^7] \end{aligned} \quad (C.9)$$

(C.3)×27−(C.9) を行い $(\Delta x)^3$ の項を消去すると,

$$27(u_{i(u),j} - u_{i-1(u),j}) - (u_{i+1(u),j} - u_{i-2(u),j}) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} 24\Delta x - \frac{216}{60} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i,k} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^5 + O[(\Delta x)^7] \quad (\text{C.10})$$

これを变形して (i, j) 格子点上における u の x 方向一階微分の式が得られる.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} &= \frac{9}{8} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-2,j}}{\Delta x} \right) \\ &\quad + \frac{9}{80} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i,k} (\Delta x)^4 + O[(\Delta x)^6] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

上式の $(\Delta x)^4$ 以上の高次項を無視することで, 交互格子を用いた場合の 4 次精度中心差分式

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} = \frac{9}{8} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-2,j}}{\Delta x} \right) \quad (\text{C.12})$$

が得られる. このときの誤差の大きさは

$$\left| \frac{9}{80} \left[\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right]_{i(u),k} (\Delta x)^4 \right| \quad (\text{C.13})$$

となる.

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

<http://www.gfd-dennou.org/arch/deepconv/>

において公開されているものである. ©高橋 こう子, 杉山 耕一郎, 小高 正嗣, 中島 健介, 林 祥介 (K. Takahashi, K. Sugiyama, M. Odaka, K. Nakajima and Y.-Y. Hayashi) 2003. 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない. なお, 利用する際には今一度自ら内容を確認することを願います (無保証無責任原則).

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形で WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることによって諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

deepconv@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いである.