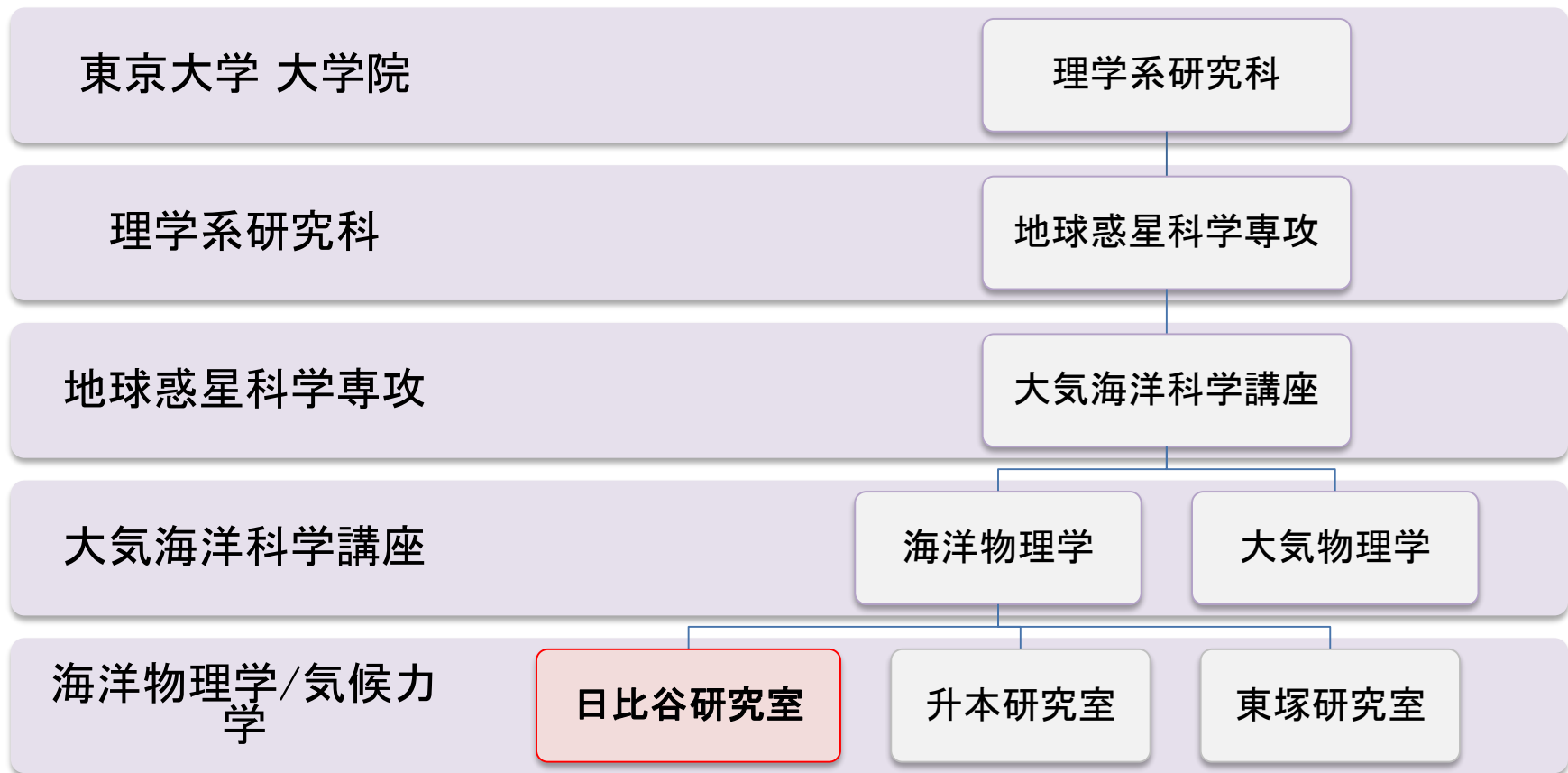


海洋内部波動の統計力学
- 共鳴現象における動力学と運動学 -

東京大学大学院 理学系研究科
地球惑星科学専攻 博士課程三年
大貫 陽平

所属

東京大学大学院理学系研究科 地球惑星科学専攻 大気海洋科学講座
(本郷キャンパス 理学部一号館 8階)



日比谷研究室 研究分野:海洋物理学

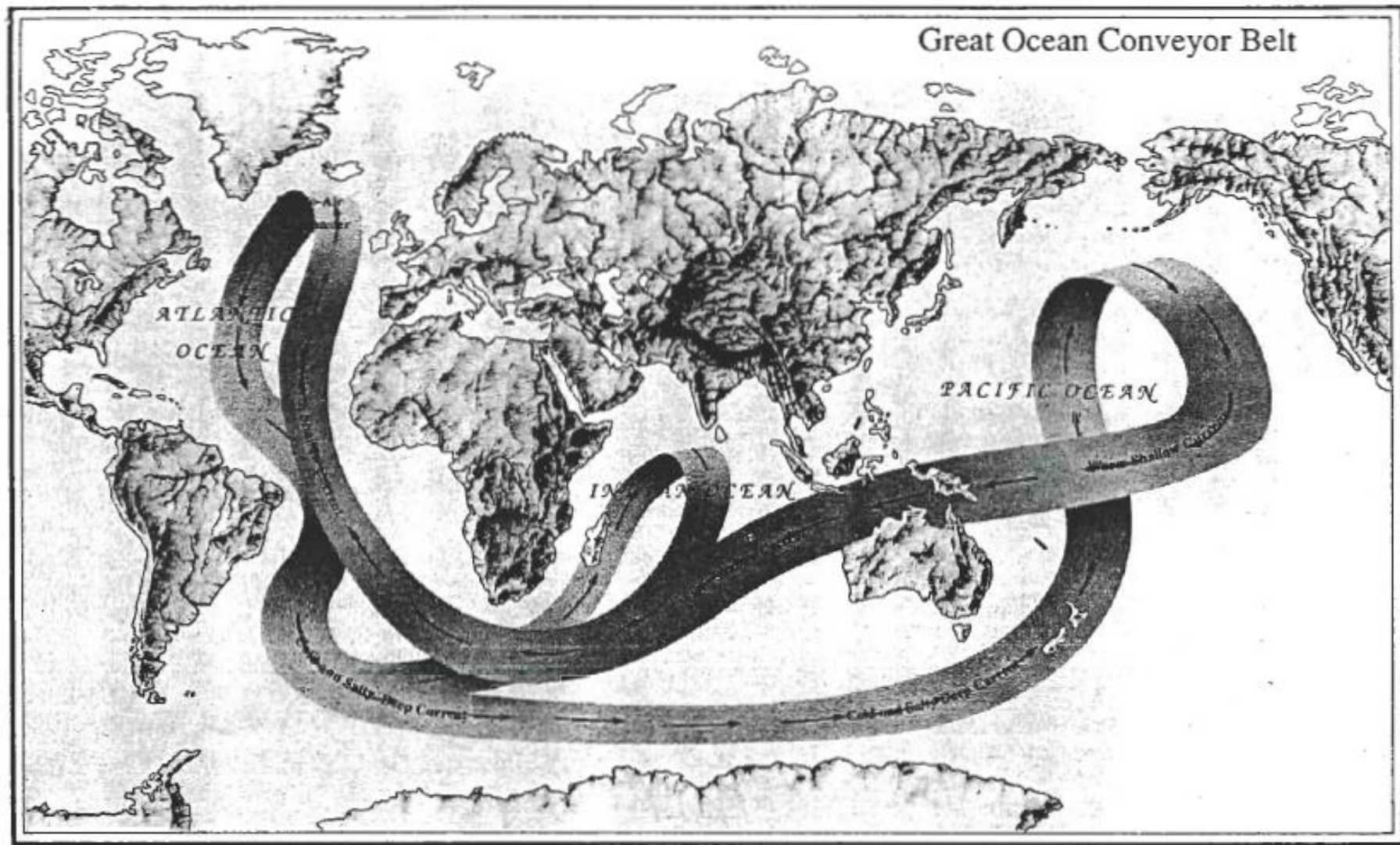


研究室メンバー

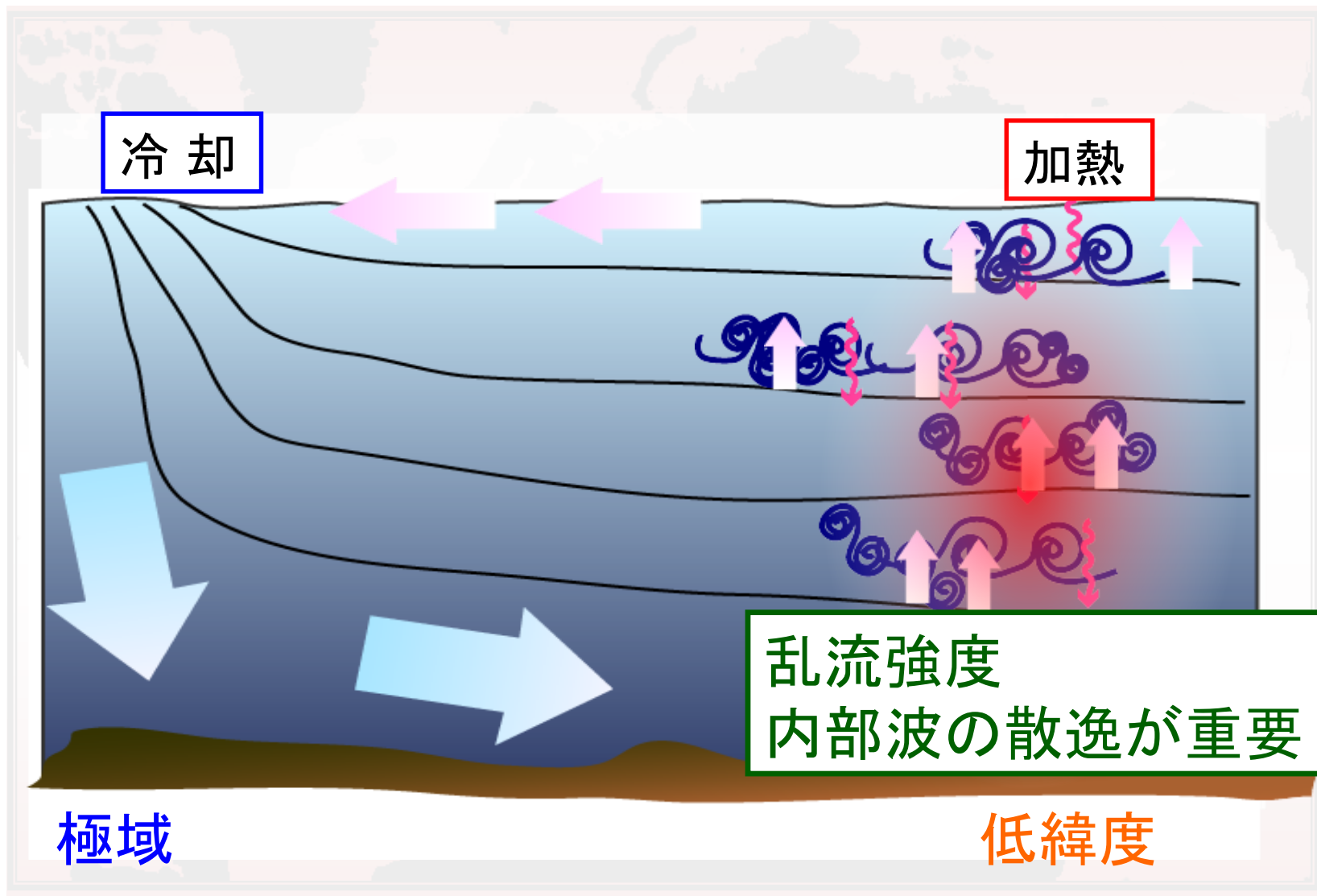


海洋観測風景

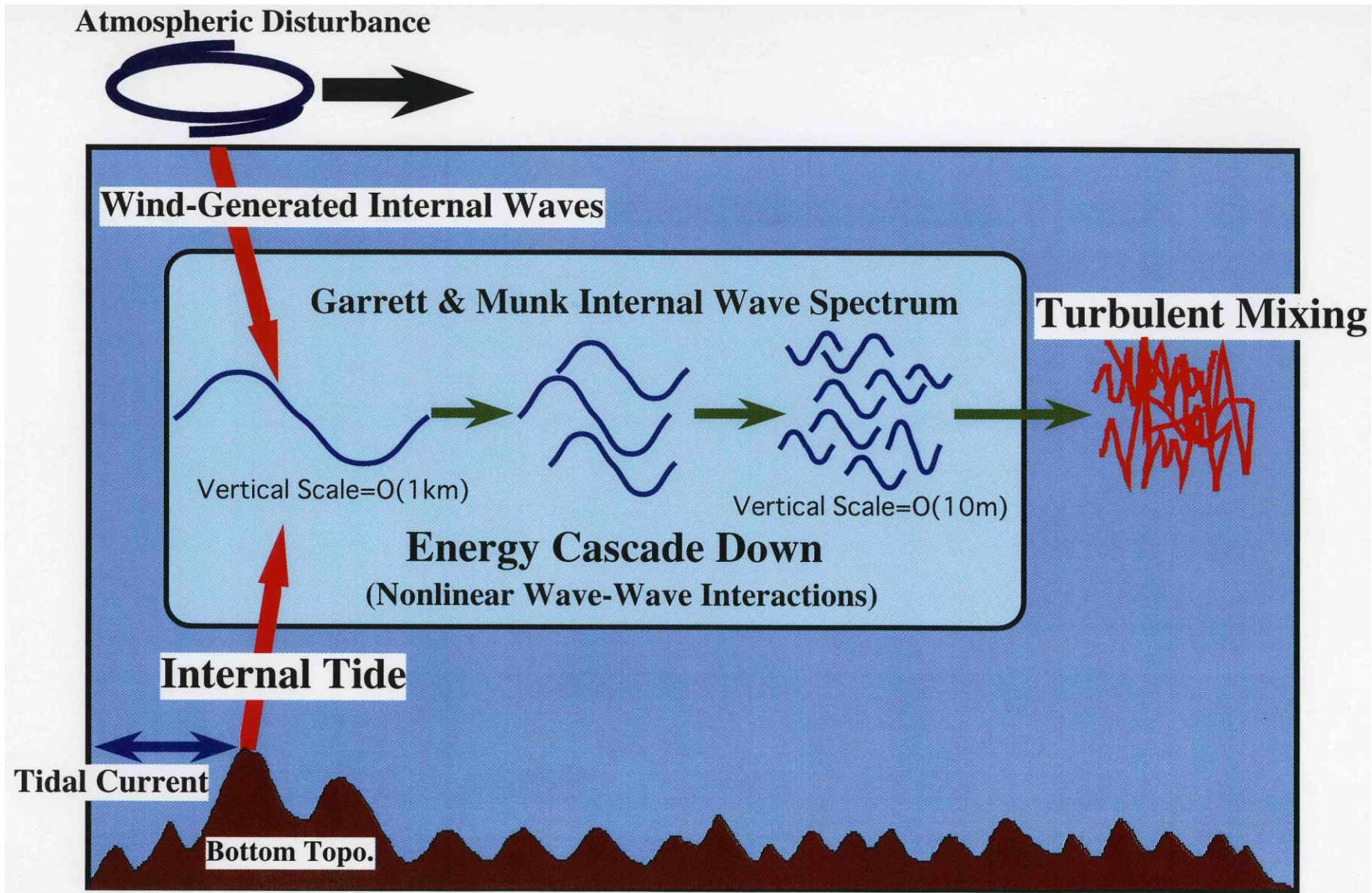
海洋深層循環



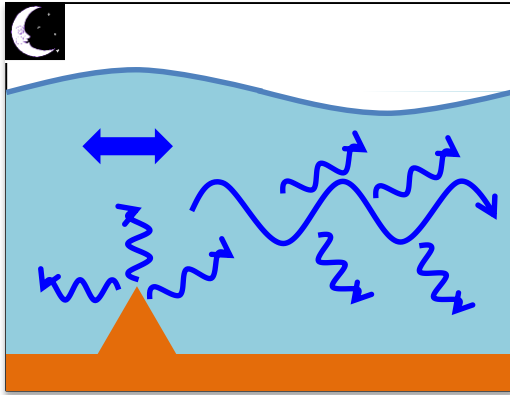
乱流混合が駆動する深層循環



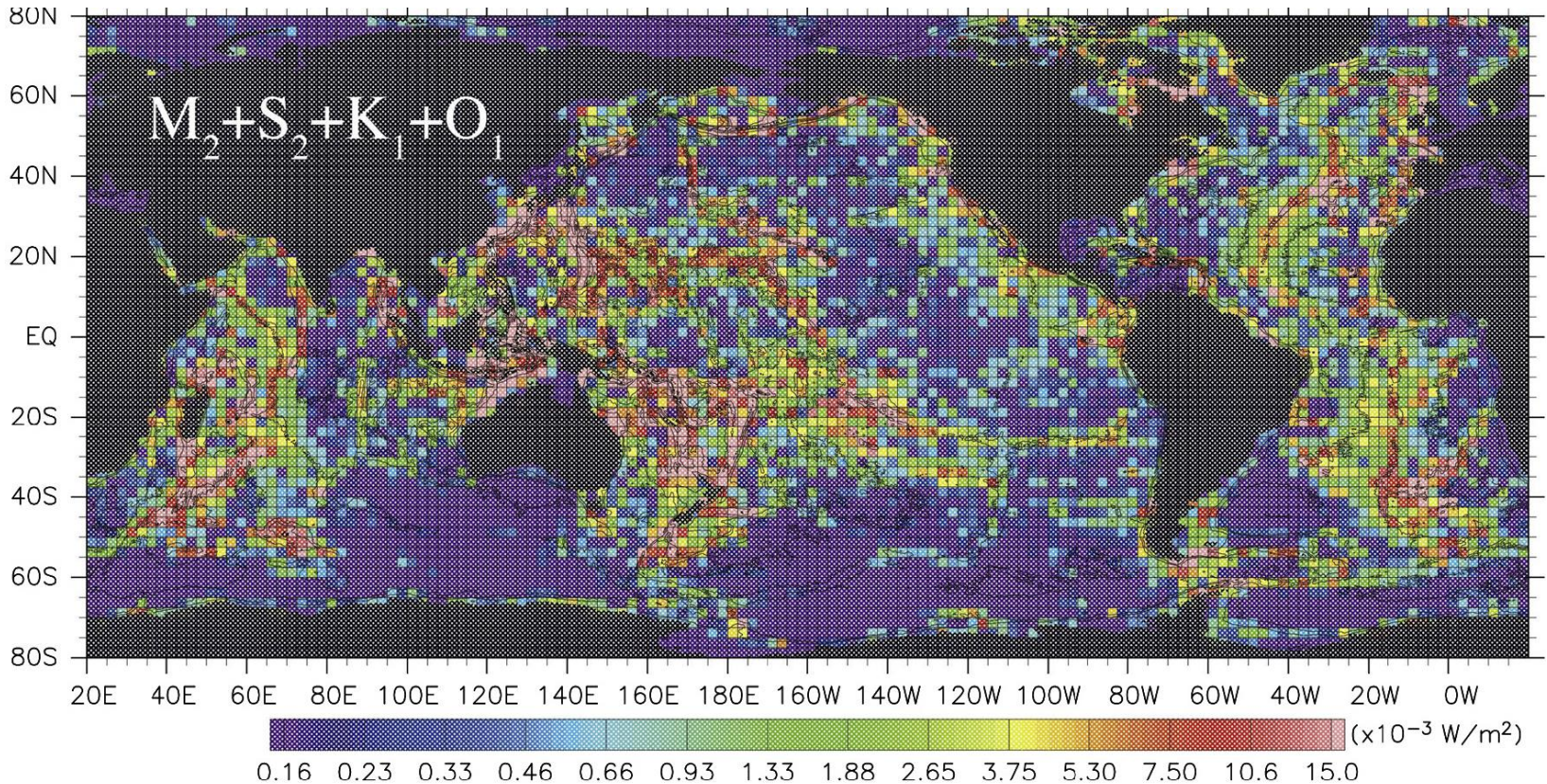
海洋内部波動のエネルギー論



内部潮汐



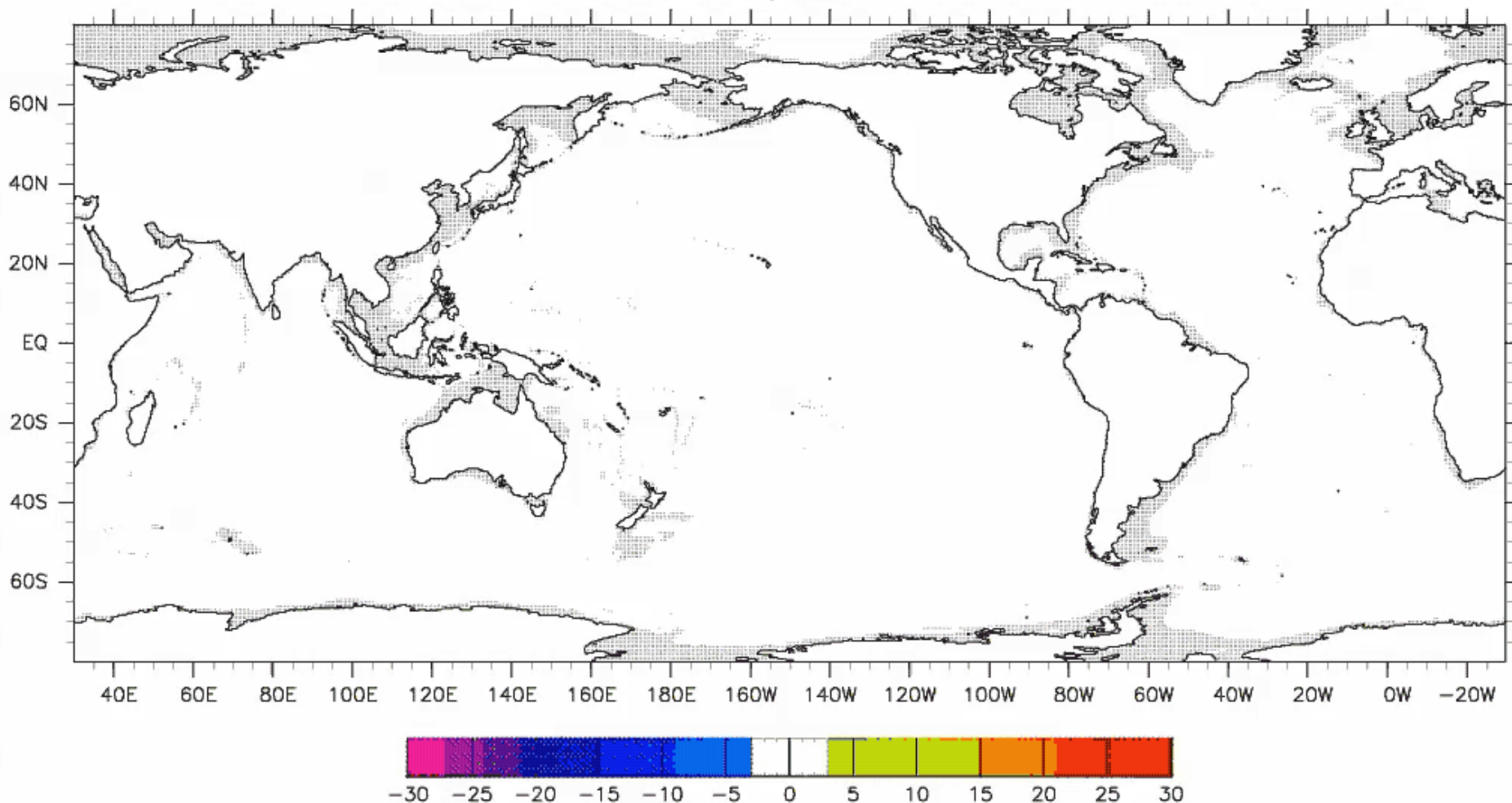
- 内部潮汐：順圧潮流が海底地形上を通過する際に発生
慣性重力波の一種
- 数値実験による見積もりでは全球で1,240GWのエネルギー
励起 (Niwa and Hibiya 2014, 下図)
- 深層循環に必要なエネルギーの半分以上を説明し得る



内部潮汐の全球シミュレーション

TIME(days)= 0.00

(Courtesy of Dr. Niwa)



散逸量分布の推定が海洋物理学上の大きな課題

自身の研究テーマと関心

研究テーマ: 内部潮汐の散逸過程の解明および定量化
特に内部波間の**非線形共鳴現象**に焦点

手法: 理論解析・数値解析

関心: 物理学 (古典/量子)

統計力学 (特に非平衡)

応用数学

地球惑星科学 (海洋物理のほか気候学, 大気物理学)

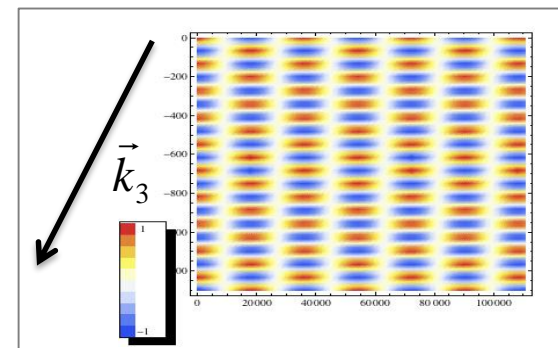
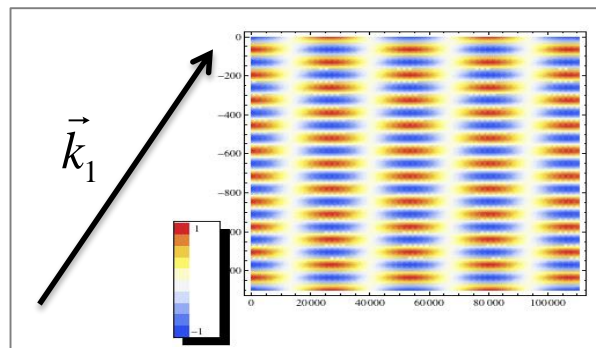
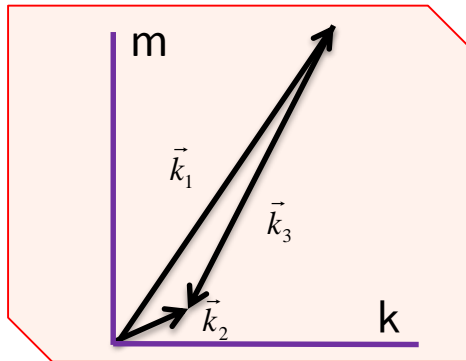
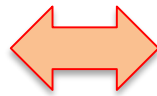
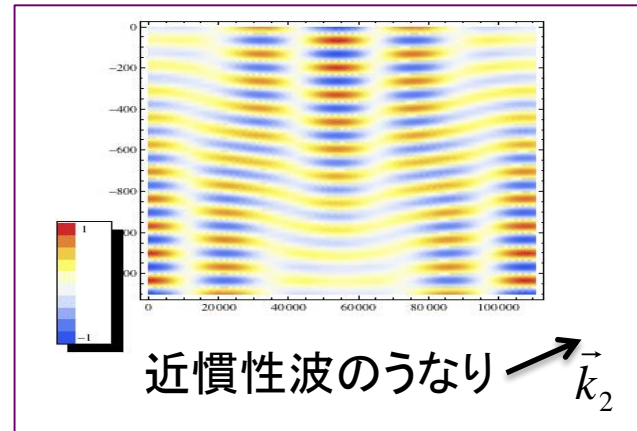
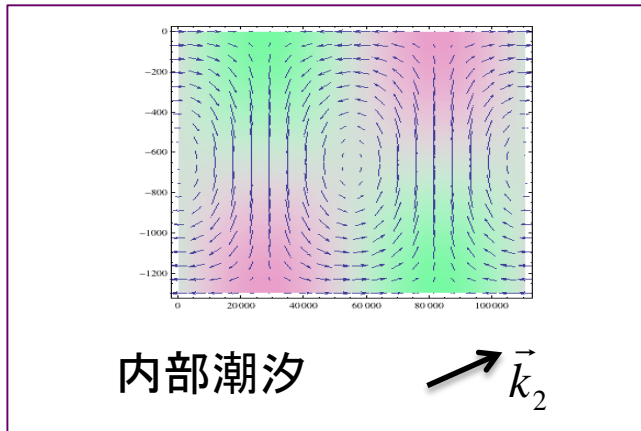
地球流体力学 (波動現象が専門, 渦現象にも興味)

計算機科学

情報科学 (将来的に力を入れていきたい)

内部波間の非線形共鳴現象のメカニズム

Parametric subharmonic instability (PSI)



波動間相互作用の条件

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{k}_0, \quad W_1 + W_2 = W_0$$

潮汐流と近慣性波の位相関係が保たれる条件

非線形共鳴に伴う内部潮汐の散逸過程の定量化

内部潮汐成分が単位時間内に失うエネルギーの割合 (理論的基礎は後述)

$$\nu = \sum_{j_2 j_3} \int \left\{ \frac{\omega_3 |V_{123}|^2}{2S c_3^2 k_3} (k_3 n_2 + k_2 n_3)_{k_3=F(k_2), \omega_2 < \omega_1} + \frac{\omega_2 |V_{213}|^2}{2S c_3^2 k_3} (-k_3 n_2 + k_2 n_3)_{k_3=F(k_2), \omega_2 > \omega_1} \right\} dk_2$$

各変数の表式

$$V_{123} \equiv R_{123} \left(V_{123}^\alpha + V_{123}^\beta + V_{123}^\gamma \right)$$

$$V_{123}^\alpha \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{k_1 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3}{k_2 k_3} \sqrt{\frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1}} + \frac{k_2 \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1}{k_3 k_1} \sqrt{\frac{\omega_3 \omega_1}{\omega_2}} + \frac{k_3 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_3}} \right)$$

$$V_{123}^\beta \equiv \frac{1}{2\sqrt{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{k_1 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3}{k_2 k_3} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{k_2 \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1}{k_3 k_1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{k_3 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{k_1 k_2} \right)$$

$$V_{123}^\gamma \equiv \frac{if \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3^\perp}{2\sqrt{2} k_1 k_2 k_3} \left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2 \omega_3}} (k_2^2 - k_3^2) + \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_3 \omega_1}} (k_1^2 - k_3^2) + \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_1 \omega_2}} (k_2^2 - k_1^2) \right)$$

$$R_{j_1 j_2 j_3} = \int \Phi_{j_1}(z) \Phi_{j_2}(z) \Phi_{j_3}(z) dz$$

$$\omega \equiv (f^2 + c_j^2 k^2)^{1/2} \quad c_j \equiv (g \tilde{D}_j)^{1/2}$$

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{2(k_1^2 k_2^2 + k_2^2 k_3^2 + k_3^2 k_1^2) - k_1^4 - k_2^4 - k_3^4}$$

$$F(k_2) = \left[\{\omega_1 - \omega_2(k_2)\}^2 - f^2 \right]^{1/2} c_3^{-1/2}$$

計算に必要な情報 (観測データから決定)

$n(\mathbf{k}, j)$ 背景波のアクションスペクトル

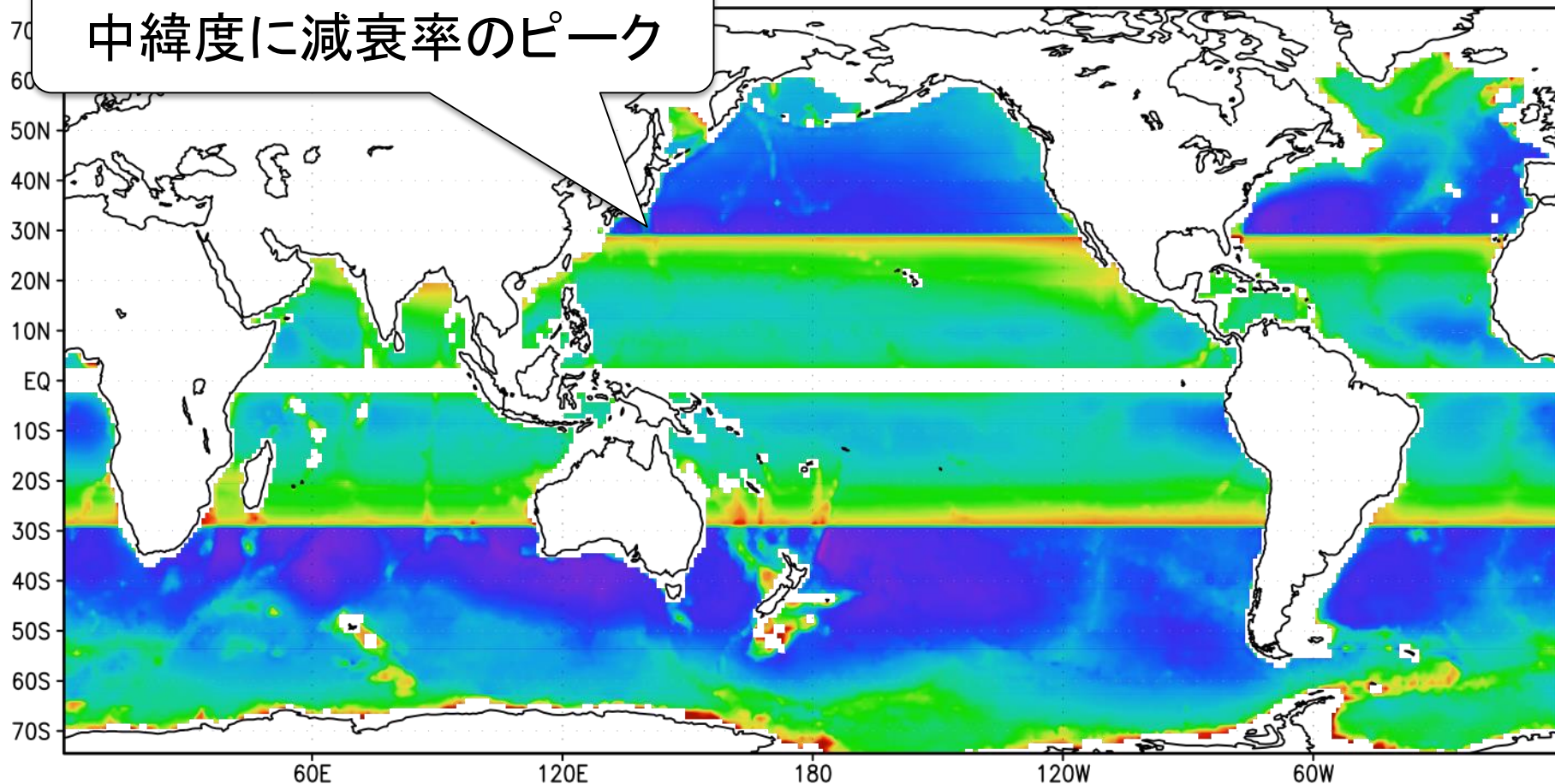
$\Phi_j(z)$ 鉛直構造関数

$\tilde{D}_j(z)$ 等価深度

内部潮汐の減衰率の全球分布

M2分潮・鉛直第一モード波を対象

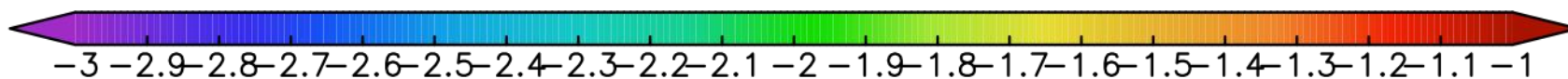
中緯度に減衰率のピーク



1000 days

100 days

10 days



共鳴現象の統計力学的記述

- 前述の計算結果は「弱非線形乱流」の理論を利用
- 共鳴現象の統計力学的な取り扱いが特徴
- 本日は最も基本的な概念を紹介

基本命題

調和振動子の強制振動を考える

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

固有周波数に一致した正弦波で強制

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \sqrt{2} \sin t \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

エネルギーは時間の**2乗**に比例して増大

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2) \\ &= \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t \cos t \sin t + \frac{1}{4}\sin^2 t \end{aligned}$$

強制のパワースペクトル

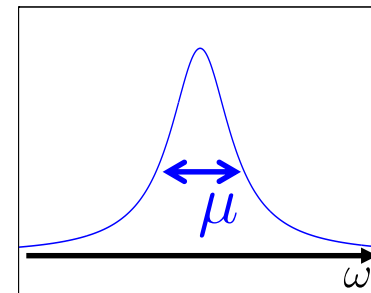
$$S(\omega) = \pi\delta(\omega - 1) + \pi\delta(\omega + 1)$$

ω

$$E \sim Ct^2$$

t

有限のスペクトル幅をもつ強制を与えたらどうなるか？



確率モデルによる記述

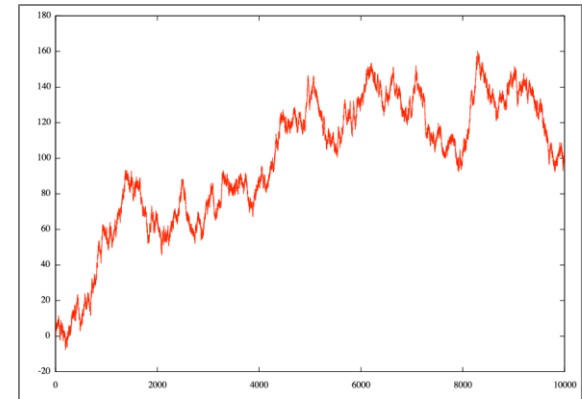
位相変調波による強制
(確率微分方程式)

$$\ddot{x} + x = \epsilon f$$

$$f(t) = \sqrt{2} \cos(\sigma t + \sqrt{2\mu} W_t + \theta)$$

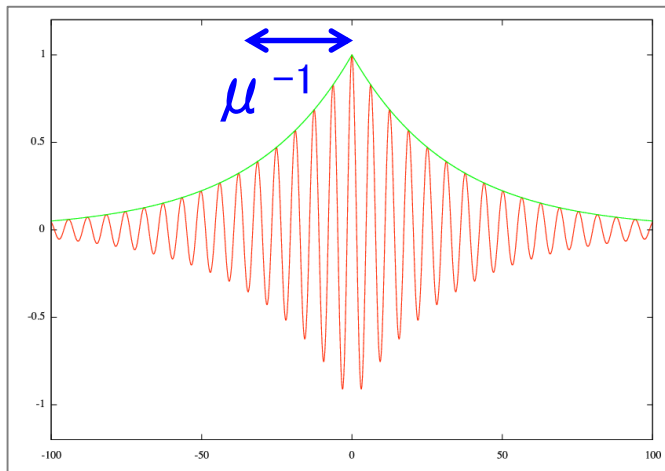
$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad \text{ノイズ (Wiener 過程)}$$

Wiener 過程のサンプルパス



強制の自己相関

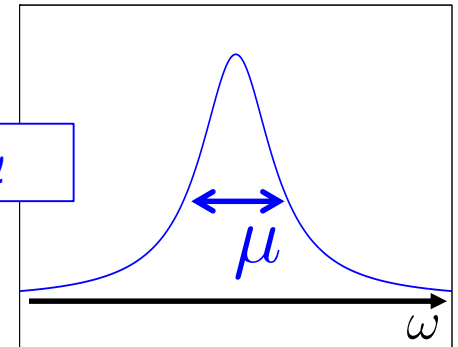
$$\overline{f(t)f(t+\tau)} = \exp(-\mu|\tau|) \cos(\sigma\tau)$$



強制のパワースペクトル

$$S(\omega) = \frac{\mu}{(\omega + 1)^2 + \mu^2} + \frac{\mu}{(\omega - 1)^2 + \mu^2}$$

スペクトル幅 μ



エネルギー期待値の解析解

$$\text{Energy expectation } E = \overline{(x^2 + \dot{x}^2)}$$

$$x = \epsilon \int_0^t \sin(t - t_1) f(t_1) dt_1$$

$$\dot{x} = \epsilon \int_0^t \cos(t - t_1) f(t_1) dt_1$$

グリーン関数

$$\begin{aligned} E(t) &= \epsilon^2 \int_0^t \int_0^t \left\{ \sin(t - t_1) \sin(t - t_2) \overline{f(t_1) f(t_2)} + \cos(t - t_1) \cos(t - t_2) \overline{f(t_1) f(t_2)} \right\} dt_1 dt_2 \\ &= \epsilon^2 \int_0^t \int_0^t \cos(t_1 - t_2) \overline{f(t_1) f(t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= \epsilon^2 \int_0^t \int_0^t \cos(t_1 - t_2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega(t_1 - t_2)) d\omega dt_1 dt_2 \quad (\text{Wiener-Khinchin の定理}) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left[\frac{1 - \cos((\omega + 1)t)}{(\omega + 1)^2} + \frac{1 - \cos((\omega - 1)t)}{(\omega - 1)^2} \right] d\omega \\ &\equiv \frac{\epsilon^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \underline{K(\omega, t)} d\omega \end{aligned}$$

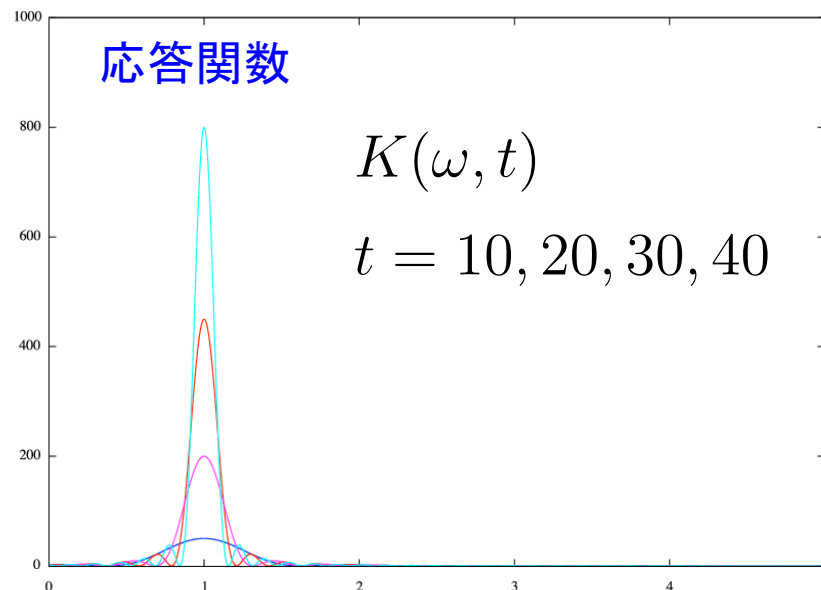
応答関数 (プロパゲータとも呼ばれる)

エネルギー期待値の解析解

$$K(\omega) \equiv \frac{1 - \cos((\omega + 1)t)}{(\omega + 1)^2} + \frac{1 - \cos((\omega - 1)t)}{(\omega - 1)^2}$$

$$S(\omega) = \frac{\mu}{(\omega + 1)^2 + \mu^2} + \frac{\mu}{(\omega - 1)^2 + \mu^2}$$

$\omega = 1$ にピーク $\omega = -1$



近似的に

$$E(t) = \frac{\epsilon^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) K(\omega, t) d\omega$$

$$\approx \epsilon^2 \left(\frac{t}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} (\exp(-\mu t) - 1) \right)$$

$$\equiv \epsilon^2 \Phi(t; \mu)$$

$$\Phi(t; \mu) \sim \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 & \text{for } t \sim 0 \\ \frac{t}{\mu} & \text{for } t \sim \infty \end{cases}$$

2種類の漸近形

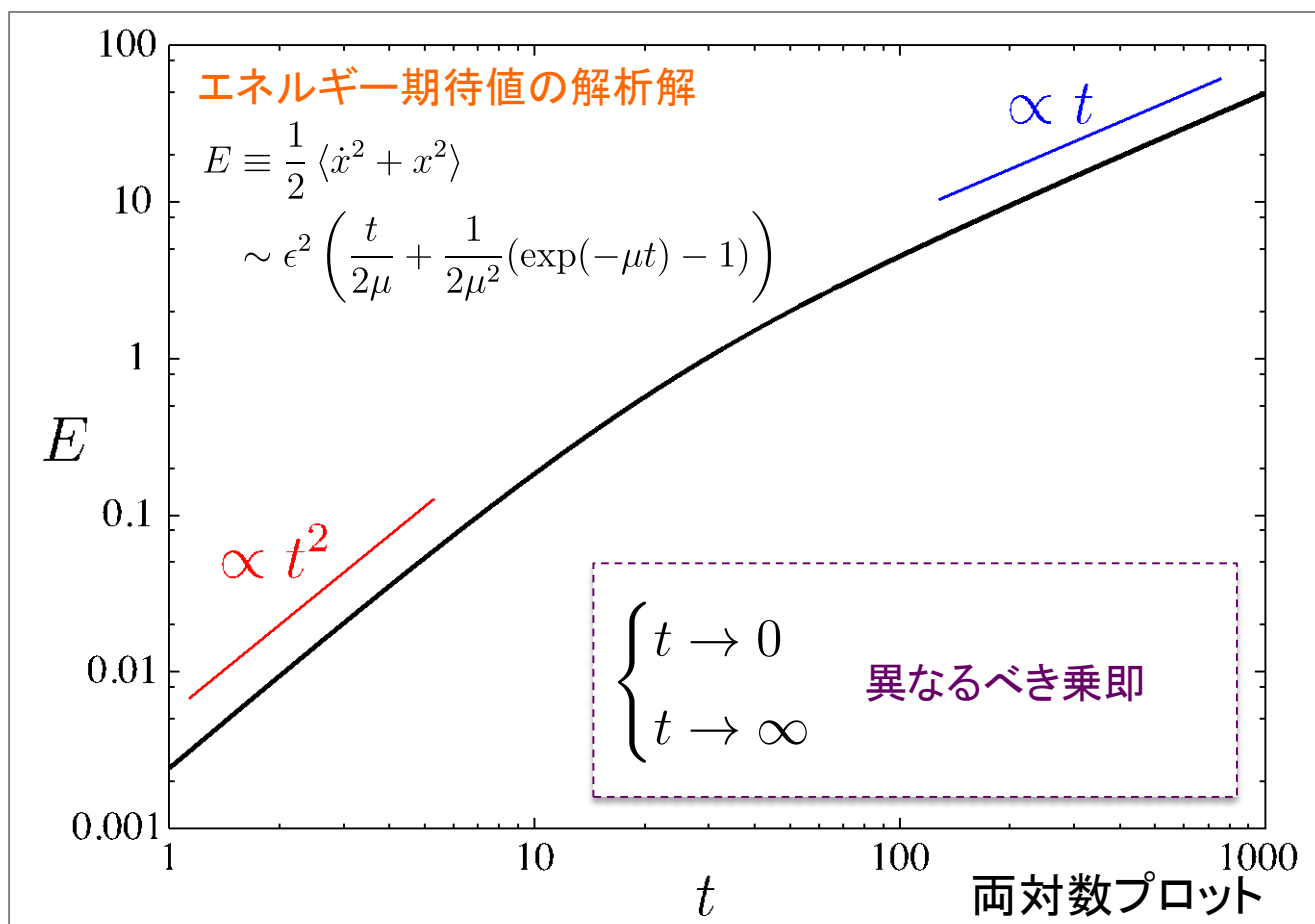
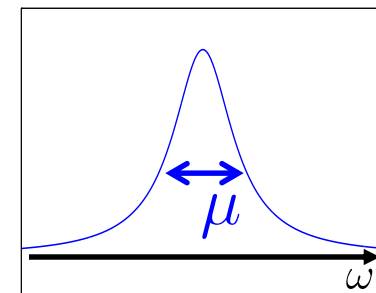
エネルギー期待値の時系列

$$\ddot{x} + x = \epsilon f$$

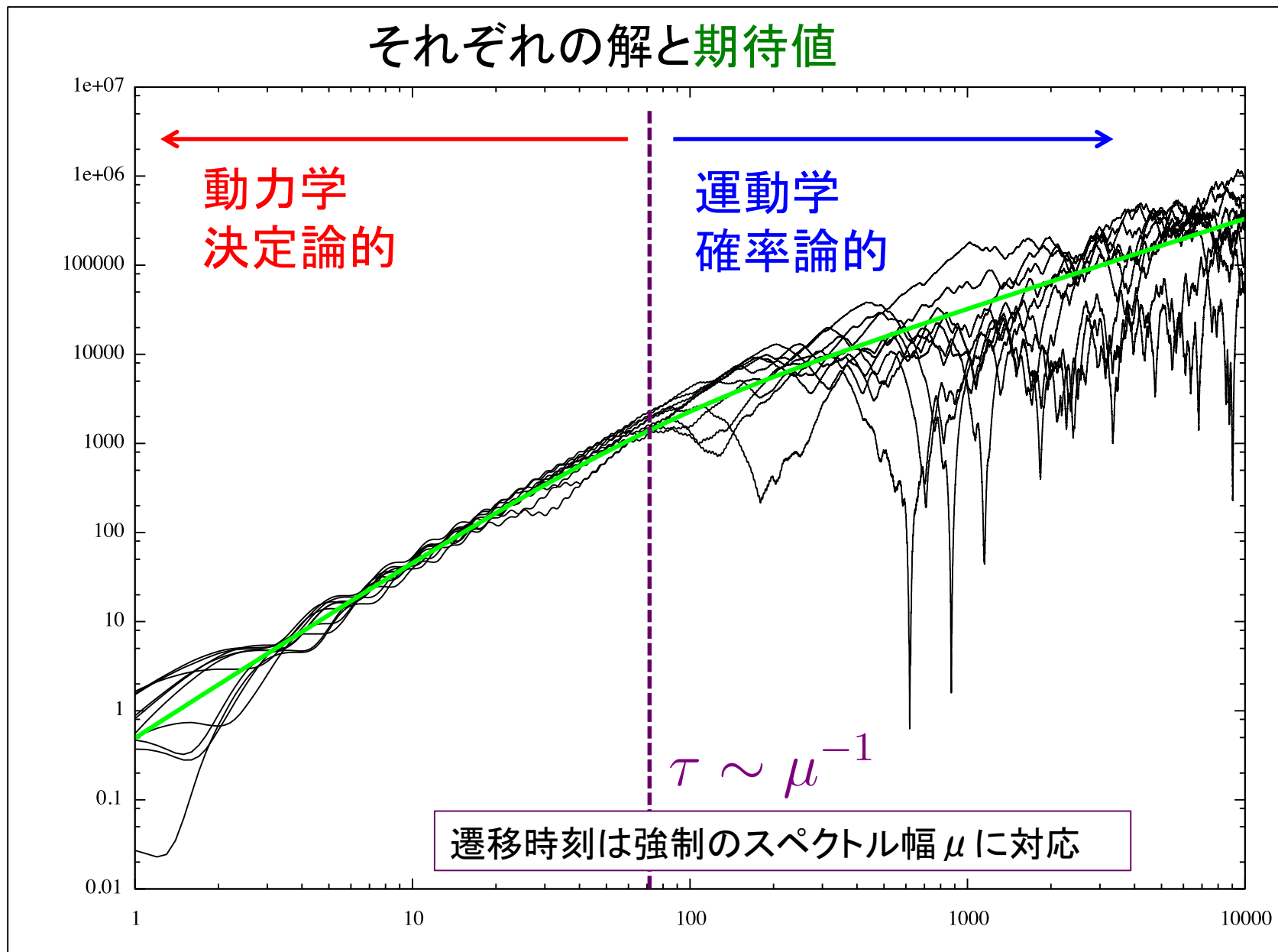
$$f(t) = \sqrt{2} \cos(\sigma t + \sqrt{2\mu} W_t + \theta)$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$S(\omega) = \frac{\mu}{(\omega + 1)^2 + \mu^2} + \frac{\mu}{(\omega - 1)^2 + \mu^2}$$



2種類の時間領域



2種類の漸近評価

強制を単色波に近付ける

$$\mu \rightarrow 0$$

動力学的極限

$$S(\omega) \rightarrow \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1))$$

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\epsilon^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) K(\omega, t) d\omega \\ &\sim \frac{\epsilon^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) K(\omega, t) d\omega \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} t^2 \end{aligned}$$

時刻を無限大に近付ける

$$t \rightarrow \infty$$

運動学的極限

$$K(\omega, t) \rightarrow \pi t (\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1))$$

$$E(t) \sim \frac{\epsilon^2 t}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) (\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) d\omega$$

$\mu^{-1} \ll t$ のときに成立

時刻 t で微分:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\epsilon^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) (\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) d\omega$$

運動学的方程式 (任意の強制スペクトル S に対して定義)

波動間相互作用の統計的記述

運動学的方程式による波動間相互作用の記述

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\nu(\mathbf{k})}{\partial t} = & \sum_{\nu_1, \nu_2 > 0} \int \cdots \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ & \cdot \{T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}}^{\nu_1, \nu_2, -\nu} (n_1 n_2 - n n_1 - n n_2) + 2T_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}}^{\nu_1, -\nu_2, -\nu} (n_1 n_2 + n n_1 + n n_2)\} \\ & + \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3 > 0} \int \cdots \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \{T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, -\mathbf{k}}^{\nu_1, \nu_2, \nu_3, -\nu} (n_1 n_2 n_3 - n n_2 n_3 - n n_1 n_3 - n n_1 n_2) \\ & + 3T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3, -\mathbf{k}}^{\nu_1, \nu_2, -\nu_3, -\nu} (n_1 n_2 n_3 - n n_2 n_3 - n n_1 n_3 + n n_1 n_2) \\ & + 3T_{\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3, -\mathbf{k}}^{\nu_1, -\nu_2, -\nu_3, -\nu} (n_1 n_2 n_3 - n n_2 n_3 + n n_1 n_3 + n n_1 n_2)\} + \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 > 0} \cdots \quad (2.5) \end{aligned}$$

(Hasselmann 1962, 1966)

- 非線形偏微分方程式を摂動展開
- 摂動項からのフィードバックを運動学的極限で評価
- 波動乱流(弱非線形乱流)の基礎方程式

関連分野と最近の進展

- 弱非線形乱流は非平衡統計力学の一分野
- 運動学的方程式は最も粗い近似手法のひとつ
- 強非線形の問題にも適用可能な定式化として、MSR形式、直接相互作用近似と呼ばれる手法がある
- 場の量子論と関連が深い

近年では、動力的な現象と運動学的な現象を同時に扱う方法として、「一般化運動学的方程式」というものが提案されている

(Annenkov and Shrira 2006, 2015)

共鳴に伴う不安定現象(PSI)の理論解析に有用
(海洋学会 2016年度春季大会で報告)