レイリー摩擦, ニュートン冷却を考慮した内部重力波の分散関係式

ブシネスク流体の場合

Vallis(2006) に基づき, レイリー摩擦, ニュートン冷却を考慮した内部重力波の分散関係式を導出する. ここでは簡単の為, 2 次元線形ブシネスク方程式を扱うこととする. 即ち, 水平・鉛直方向の運動量の式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} - \frac{u'}{\tau_D}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + b' - \frac{w'}{\tau_D}, \tag{2}$$

連続の式

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

及び熱力学の式

$$\frac{\partial b'}{\partial t} + w' N^2 = -\frac{b'}{\tau_D} \tag{4}$$

により運動を記述することを考える. ここで b' は浮力の擾乱成分, $\phi' = p'/\rho_0$, ρ_0 は密度の代表値, N^2 は静的安定度, τ_D はレイリー摩擦, ニュートン冷却の時定数である. 簡単の為, N^2, τ_D は定数であるとする. 式 (3) より, 流線関数 ψ を導入して

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{5}$$

$$w' = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{6}$$

と表すことができる. 式 (5), (6) を式 (1), (2), (4) に代入すると,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\tau_D}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + b' - \frac{1}{\tau_D}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial b'}{\partial t} + N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{b'}{\tau_D} \tag{9}$$

となる. 式 (7) を z で微分したものと, 式 (8) を x で微分したものとの差をとると,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = -\frac{\partial b'}{\partial x} + \frac{1}{\tau_D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi,$$

$$\frac{\partial b'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + \frac{1}{\tau_D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi \tag{10}$$

となる. 式 (9) を x で微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial b'}{\partial x}\right) + N^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\tau_D}\frac{\partial b'}{\partial x} \tag{11}$$

となる. 式 (10) を式 (11) に代入すると,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + \frac{1}{\tau_D}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + N^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\\
&= -\frac{1}{\tau_D}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + \frac{1}{\tau_D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi\right],\\
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + \frac{2}{\tau_D}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + N^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau_D^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi\\
&= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

となる. ここで平面波解 $\psi \propto \exp[i(kx+mz-\omega t)]$ を仮定すると,

$$\omega^2(k^2+m^2) + \frac{2}{\tau_D}i(k^2+m^2)\omega - N^2k^2 - \frac{1}{\tau_D^2}(k^2+m^2) = 0 \tag{13}$$

となる. 式 (13) を ω について解くと,

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{k^2+m^2}\left[-\frac{(k^2+m^2)}{\tau_D}i \pm \sqrt{-\frac{(k^2+m^2)^2}{\tau_D^2} + N^2k^2(k^2+m^2) + \frac{(k^2+m^2)^2}{\tau_D^2}}\right]\\
&= -\frac{1}{\tau_D}i \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2+m^2}}
\end{aligned} \tag{14}$$

が得られる. 以上より, 時定数が τ_D であるレイリー摩擦・ニュートン冷却を考慮すると, 内部重力波はその波数に依らない減衰を受けることになる.

非弾性流体の場合

小倉 (1978) に基づき, レイリー摩擦, ニュートン冷却を考慮した内部重力波の分散関係式を導出する. ここでは簡単の為, 2 次元線形非弾性方程式を扱うこととする. 水平・鉛直方向の運動量の式

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{u^*}{\tau_D}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g - \frac{w^*}{\tau_D}, \tag{16}$$

連続の式

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0, \tag{17}$$

熱力学の式

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \frac{N^2}{g} w^* = -\frac{\theta^*}{\tau_D}, \tag{18}$$

及び理想気体の状態方程式

$$\rho' = \frac{1}{c_s^2} p' - \theta^* \tag{19}$$

により運動を記述することを考える. ここで $u^* = \overline{\rho} u'$, $w^* = \overline{\rho} w'$, $\theta^* = (\overline{\rho}/\overline{\theta})\theta'$, $N^2 = g\overline{\theta}^{-1} d\overline{\theta}/dz$ は静的安定度, $c_s = \sqrt{(c_p/c_v)R\overline{T}}$ は音速である. 簡単の為, 基本場は静止状態にあるものとし, 等温であるとする. このとき c_s, N^2 は定数となる[1]. また τ_D は定数であるとする. 式 (17) より, 流線関数 ψ^* を導入して

$$\begin{aligned} u^* &= -\frac{\partial \psi^*}{\partial z}, && (20)\\ w^* &= \frac{\partial \psi^*}{\partial x}, && (21) \end{aligned}$$

と表すことができる. 式 (20), (21) を式 (15), (16), (18) に代入すると,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\tau_D}\frac{\partial \psi^*}{\partial z}, \tag{22}$$

[1] N^2 が定数となることを示す. 基本場の温度を $T = T_0 = const.$ と表すことにすると,

$$\overline{\theta} = T_0 \left(\frac{p_R}{\overline{p}}\right)^{R/c_p},$$
$$\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}} = c_p T_0$$

となる. ここで p_R は標準圧力である. 以上より,

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{\overline{\theta}}\frac{d\overline{\theta}}{dz} \\ &= g\frac{1}{T_0}\left(\frac{\overline{p}}{p_R}\right)^{R/c_p}\left(-\frac{R}{c_p}\right) T_0 \left(\frac{p_R}{\overline{p}}\right)^{R/c_p} \frac{1}{\overline{p}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \\ &= -\frac{gR}{c_p}\frac{1}{\overline{p}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \\ &= \frac{g^2 R}{c_p}\frac{\overline{\rho}}{\overline{p}} \\ &= \frac{g^2}{c_p T_0} \end{aligned}$$

となり, N^2 が定数であることが示された. 但し式変形の途中で静水圧平衡の式を用いた.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g - \frac{1}{\tau_D}\frac{\partial \psi^*}{\partial x}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \frac{N^2}{g}\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = -\frac{\theta^*}{\tau_D} \tag{24}$$

となる. 式 (22) を z で微分したものと, 式 (23) を x で微分したものとの差をとると,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^* = g\frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{1}{\tau_D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^* \tag{25}$$

となる. 式 (25) に式 (19) を代入し, ρ' を消去すると,

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^* = \frac{g}{c_s^2}\frac{\partial p'}{\partial x} - g\frac{\partial \theta^*}{\partial x} + \frac{1}{\tau_D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^* \tag{26}$$

となる. 式 (26) に式 (22) を代入し, p' を消去すると,

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^* \\
&= \frac{g}{c_s^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right) + \frac{1}{\tau_D}\frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right] - g\frac{\partial \theta^*}{\partial x} + \frac{1}{\tau_D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^*, \\
&g\frac{\partial \theta^*}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^* + \frac{g}{c_s^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right) + \frac{1}{\tau_D}\frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right] + \frac{1}{\tau_D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^* \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_D}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{g}{c_s^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi^*
\end{aligned} \tag{27}$$

となる. 式 (24) を x で微分し, 両辺に g を掛けると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\frac{\partial \theta^*}{\partial x}\right) + N^2\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} = -\frac{g}{\tau_D}\frac{\partial \theta^*}{\partial x} \tag{28}$$

となる. 式 (28) に式 (27) を代入し, θ^* を消去すると,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_D}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{g}{c_s^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi^*\right\} + N^2\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \\
&= -\frac{1}{\tau_D}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_D}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{g}{c_s^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi^*\right\}
\end{aligned} \tag{29}$$

となる. ここで

$$\psi^* = e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\hat{\psi} \tag{30}$$

と置くと,

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial z} = -\frac{g}{2c_s^2}e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\hat{\psi} + e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z},$$

$$= e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\left(-\frac{g}{2c_s^2}\hat{\psi}+\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\right), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial z^2} &= \frac{g^2}{4c_s^4}e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\hat{\psi}-\frac{g}{c_s^2}e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}+e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial z^2}\\ &= e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\left(\frac{g^2}{4c_s^4}\hat{\psi}-\frac{g}{c_s^2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}+\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial z^2}\right)\end{aligned} \tag{32}$$

となる. 式 (30), (31), (32) を式 (29) に代入し, ψ^* を消去すると,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_D}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{g^2}{4c_s^4}\right)\hat{\psi}\right\}+N^2\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x^2}\\ &= -\frac{1}{\tau_D}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\tau_D}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{g^2}{4c_s^4}\right)\hat{\psi}\right\}\end{aligned} \tag{33}$$

となる. ここで平面波解 $\hat{\psi}\propto\exp[i(kx+mz-\omega t)]$ を仮定すると,

$$\begin{aligned}&-i\omega\left(-i\omega+\frac{1}{\tau_D}\right)\left(-k^2-m^2-\frac{g^2}{4c_s^4}\right)-N^2k^2\\ &= -\frac{1}{\tau_D}\left(-i\omega+\frac{1}{\tau_D}\right)\left(-k^2-m^2-\frac{g^2}{4c_s^4}\right),\\ &\left(k^2+m^2+\frac{g^2}{4c_s^4}\right)\omega^2+\frac{2i}{\tau_D}\left(k^2+m^2+\frac{g^2}{4c_s^4}\right)\omega-N^2k^2-\frac{1}{\tau_D^2}\left(k^2+m^2+\frac{g^2}{4c_s^4}\right)\\ &= 0\end{aligned} \tag{34}$$

となる. 式 (34) を ω について解くと,

$$\omega = -\frac{1}{\tau_D}i\pm\frac{Nk}{k^2+m^2+\frac{g^2}{4c_s^4}} \tag{35}$$

が得られる. 以上より, 非弾性流体においても, 内部重力波はその波数に依らない減衰を受けることになる.

最後に w', θ' の鉛直構造について考察する. 基本場の温度を T_0 とすると, 静水圧平衡の式より,

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{p}}{dz} &= RT_0\frac{d\overline{\rho}}{dz}=-\overline{\rho}g,\\ \frac{d\overline{\rho}}{dz} &= -\frac{g}{RT_0}\overline{\rho}\end{aligned} \tag{36}$$

となる. 式 (36) より

$$\overline{\rho}=\rho_0e^{-\frac{g}{RT_0}z} \tag{37}$$

となる. ここで ρ_0 は最下層の密度である. 式 (30), (37) より

$$\begin{aligned}
w' &= \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \\
&= \frac{1}{\overline{\rho}} e^{-\frac{g}{2c_s^2}z}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{\rho_0} e^{\left(\frac{g}{RT_0}-\frac{g}{2c_s^2}\right)z}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{\rho_0} e^{\frac{g}{2T_0}\left(\frac{2}{R}-\frac{c_v}{c_pR}\right)z}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{\rho_0} e^{\frac{g}{2T_0}\left(\frac{1}{c_p}+\frac{1}{R}\right)z}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{\rho_0} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{g}+\frac{g}{RT_0}\right)z}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \propto e^{\frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{g}+\frac{g}{RT_0}\right)z} \qquad (38)
\end{aligned}$$

となる. また温位の定義より, $\overline{\theta} \propto \overline{\rho}^{-R/c_p}$ となるので, 式 (24), (37) より,

$$\begin{aligned}
\theta' &= \frac{\overline{\theta}}{\overline{\rho}}\theta^* \\
&\propto \overline{\rho}^{-\frac{R}{c_p}-1} e^{-\frac{g}{2c_s^2}z} \\
&\propto e^{\frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{g}+\frac{g}{RT_0}\right)z} \cdot e^{-\frac{R}{c_p}\cdot\left(-\frac{g}{RT_0}\right)z} \\
&\propto e^{\frac{1}{2}\left(\frac{3N^2}{g}+\frac{g}{RT_0}\right)z} \qquad (39)
\end{aligned}$$

となる. 従って w', θ' は高度とともに増大する (ここでは示さないが, 他の擾乱成分についても同様に増大する). ニュートン冷却, レイリー摩擦が存在する場合, 鉛直方向に伝播した内部重力波が増幅するかどうかは, 位相速度, 減衰の時定数, 静的安定度によって決まる.

例えば, ニュートン冷却, レイリー摩擦が存在する厚さ D の気層を鉛直上向きに位相速度 C_z で伝播する内部重力波を考える. ニュートン冷却, レイリー摩擦が存在する気層の通貨前後での波の振幅の比を A とすれば,

$$A = e^{-\frac{D}{C_z\tau_D}+\frac{1}{2}\left(\frac{3N^2}{g}+\frac{g}{RT_0}\right)D} = e^{-\frac{D}{C_z\tau_D}+\frac{D}{H_A}} \qquad (40)$$

と表される. ここで $H_A = 2(3N^2/g + g/(RT_0))^{-1}$ である. $T_0 = 135$ K, $g = 3.72$ m/s^2, $R = 188.9$ J K^{-1} kg^{-1}, $c_p = 733.9$ J K^{-1} kg^{-1} のとき, $H_A \approx 7.73 \times 10^3$ m となる. スポンジ層の厚さ D が 7000 m, 位相速度 c_z が 0.6 – 1.0 m/s であるとする. $\tau_D = 3000$ sec の場合, $0.045 \lesssim A \lesssim 0.24$, $\tau_D = 30000$ sec の場合, $1.66 \lesssim A \lesssim 1.96$, $\tau_D = \infty$ sec の場合, $A \approx 2.47$ となる. 数値実験の結果を見ると, $\tau_D = 3000$ sec の場合 $A \sim 0.25$, $\tau_D = 30000$ sec の場合, $A \sim 1.5$, $\tau_D = \infty$ sec の場合, $A \sim 2$, であり, 非弾性系の線形理論の結果とおおよそ一致する.