第1章　はじめに

水惑星実験で見られる海洋大循環の主な特徴は, 岸の存在する場合の海洋大循環と比較して, 以下の点が挙げられる.

- 順圧的な東西ジェット
- 弱い南北方向の輸送
- 浅い温度主躍層
- hogehoge

本ノートでは 1,2 番目の特徴についての理解を深めるために, 全球的に岸の存在しないな海洋において, 海面応力によって駆動される循環の問題を定式化し, その近似解の導出を行う. 解析的な近似解は, 海洋大循環の特徴を力学的に考察するための助けとなるだろう.

第2章　水惑星における風成循環

本章では, 水惑星における風成循環の問題を定式化し, その近似解を導く. 水惑星における風成循環の主な特徴は,

- 内部領域における順圧的な東西流
- 弱い南北方向の輸送

である. これらを完全に記述するためためには, 三次元静力学ブジネスク方程式を用いる必要がある. しかし, その基本的な特徴はより簡単な系を使って記述することができる. 本章では, 最初に, 密度一様で軸対称な循環をもつ系において, 水惑星の風成循環を定式化し, その力学の考察を行う. その後に, 密度成層の効果を取り入れることにする.

2.1　密度一様・軸対称設定における風成循環の近似解の導出

2.1.1　モデルの定式化

本節では,

- 密度一様
- 軸対称 (経度微分ゼロ)
- 循環のスケールは, 惑星半径 a と同じオーダである.
- 総観規模の渦の効果は, 水平渦粘性によって粗く表現する

であることを仮定する. 1, 2 番目は, 水惑星の海洋風成循環の基本的特徴を, できるだけ簡単に記述するために導入した仮定である. 3 番目の仮定は, 地球でみられるような風成循環において当てはまる仮定である[*1].

循環のスケールが惑星半径と同じオーダーである場合には, その循環を惑星地衡流方程式系[*2] を使って記述するのが適切である. 今, 密度一様と軸対称の仮定を考慮しよう. また, 長さのスケールを惑星半径 a, 速度のスケールを U, 時間スケールを移流時間スケールでとるとき, 無次元化した支配方程式系は,

$$R_o\left(\frac{du}{dt} - uv\tan\theta\right) - \sin\theta v = -\frac{E_H}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{D}[u] + \frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{2.1.1a}$$

$$R_o\left(\frac{dv}{dt} - u^2\tan\theta\right) - \sin\theta u = -\frac{\partial p}{\partial\theta} + \frac{E_H}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{D}[v] + \frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{2.1.1b}$$

$$\mathscr{D}[v] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.1.1c}$$

と書かれる. 今, 各無次元数を次のように定義した.

$$\text{ロスビー数:}\quad R_o = \frac{U}{2\Omega a}, \tag{2.1.2a}$$

$$\text{水平エクマン数:}\quad E_H = \frac{2A_h}{2\Omega a^2}, \tag{2.1.2b}$$

$$\text{鉛直エクマン数:}\quad E_V = \frac{2A_v}{2\Omega D^2}. \tag{2.1.2c}$$

ここで, Ω は自転角速度, D は流体層の厚さ, A_h, A_v はそれぞれ水平・鉛直渦粘性係数である. また, 発散演算子と関係した微分演算子を,

$$\mathscr{D}[(\ )] = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial((\ )\cos\theta)}{\partial\theta} \tag{2.1.3}$$

と定義した. さらに, 今, ラグランジュ微分は,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial\theta} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.1.4}$$

と書かれる.

(2.1.1) に対して, 上下端における境界条件を以下のように課す. 下端境界は剛体壁であり,

$$w = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \tag{2.1.5}$$

[*1]木星大気のように, 東西ジェットが南北に多数存在する場合には, その東西ジェットによって駆動される海洋大循環のスケールは, a よりずっと小さくなるだろう. その場合は, 3 番目の仮定は当てはまらない.

[*2]詳細は, 別ノート「海洋大循環を記述するための方程式系」における, 惑星地衡流方程式系の導出を参考されたい.

を課す. また, 水平速度に対して, 滑り無し条件

$$u, v = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \tag{2.1.6}$$

を課す. 一方, 上端境界は自由表面であり, 海面応力として,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{A_V D \tau_0}{\rho_0 U} \tau_x(y), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \ \ z = 1 \tag{2.1.7}$$

を与える. ここでは, 上端境界において, rigid-lid 近似を適用し,

$$w = 0 \quad \text{at} \quad z = 1 \tag{2.1.8}$$

を課す.

2.1.2 ポテンシャル渦度方程式の導出

始めに, 各無次元変数をロスビー数によって展開する. つまり,

$$u = u_{(0)} + R_o u_{(1)} + \ldots \tag{2.1.9}$$

のように展開する. このとき, 水平・鉛直渦粘性項の係数は, それぞれ,

$$E_H = R_o \frac{2}{R_e}, \ \ E_V = R_o(\sqrt{E_V} r) \tag{2.1.10}$$

と書き直す. ここで, $R_e (= LU/A_h))$ は水平レイノルズ数である. また, $r = \sqrt{E_V}/R_o$ はエクマンパンピングの時間スケールと移流時間スケールの比を表す. 海洋大循環において, 多くの場合, R_e^{-1} や r は 1 より十分小さいため, ここではそのような場合を考える.

O(1) のバランス:

(2.1.1) において, O(1) の項だけ取り出すと,

$$-\sin\theta \, v_{(0)} = 0, \tag{2.1.11a}$$

$$-\sin\theta \, u_{(0)} = -\frac{\partial p_{(0)}}{\partial \theta}, \tag{2.1.11b}$$

$$\frac{\partial p_{(0)}}{\partial z} = 0, \tag{2.1.11c}$$

$$\mathscr{D}[v_{(0)}] + \frac{\partial w_{(0)}}{\partial z} = 0 \tag{2.1.11d}$$

を得る. したがって, ロスビー数の最低次に対する速度場は,

$$v_{(0)} = 0, \quad -\sin\theta\, u_{(0)} = -\frac{\partial p_{(0)}}{\partial \theta}, \ \ w_{(0)} = 0 \tag{2.1.12}$$

と決まる. ここで, 上端・下端で鉛直速度はゼロであることを用いた. また,

$$-\sin\theta\, \frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial p_{(0)}}{\partial \theta} = 0$$

より, $u_{(0)}$ は, (エクマン層内を除いて) 鉛直方向に変化しないことに注意されたい.

$\mathrm{O}(R_o)$ のバランス:

(2.1.1) において, $\mathrm{O}(R_o)$ の項だけ取り出すと,

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial t} - \sin\theta v_{(1)} = -\frac{1}{R_e}\mathscr{D}[u_{(0)}], \tag{2.1.13a}$$

$$-u_{(0)}^2 \tan\theta - \sin\theta u_{(1)} = -\frac{\partial p_{(1)}}{\partial \theta}, \tag{2.1.13b}$$

$$\mathscr{D}[v_{(1)}] + \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = 0 \tag{2.1.13c}$$

を得る.

次に, (2.1.13) の一式目に $-\mathscr{D}$ を作用させて, (2.1.13) を用いて $\partial v_1/\partial\theta$ を消去すれば, 渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta_{(0)}}{\partial t} - \cos\theta v_{(1)} = \sin\theta\frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{R_e}\mathscr{L}[\zeta_{(0)}] \tag{2.1.14}$$

を得る. ここで, $\zeta_{(0)} = -\mathscr{D}[u_{(0)}]$ である. また, $\mathscr{L}[\ ] = \mathscr{D}[\frac{\partial}{\partial\theta}[\ ]]$ は水平ラプラシアンである.

さらに, $u_{(0)}, v_{(1)}$ が z に依存しないことに注意して, この両辺を $z=0$ から $z=1$ まで積分すれば,

$$\frac{\partial \zeta_{(0)}}{\partial t} - \cos\theta v_{(1)} = \sin\theta\Big[w_{(1)}\Big]_{z=0}^{z=1} + \frac{1}{R_e}\mathscr{L}[\zeta_{(0)}] \tag{2.1.15}$$

となる. 今, $z=0,1$ における w_1 として, エクマン層の線形理論から導かれるエクマン・パンピング速度

$$w_* = \mathrm{curl}_*\left(\frac{\boldsymbol{\tau}_*}{\rho_0 f_*}\right) \quad \mathrm{at} \ \ z=1,$$
$$w_* = \mathrm{curl}_*\left(\frac{\delta_E(\theta)}{2}\boldsymbol{u}_*\right) \quad \mathrm{at} \ \ z=0$$

を与えることにする．ここで, $\delta_E = (2A_V/f_*)^{1/2}$ は, 緯度に依存するエクマン層の厚さである．このとき, 均質流体対する惑星地衡流ポテンシャル渦度方程式

$$\boxed{\frac{\partial \zeta_{(0)}}{\partial t} - \cos\theta v_{(1)} = \sin\theta \left\{ \frac{\tau_0/\rho_0}{2\Omega U D R_o} \mathscr{D}[\frac{-\tau_x}{\sin\theta}] - \frac{r}{2}\mathscr{D}[\frac{-u_{(0)}}{\sqrt{\sin\theta}}] \right\} + \frac{1}{R_e}\mathscr{L}[\zeta_{(0)}]} \tag{2.1.16}$$

を得る．

定常状態における漸近級数解の導出

(2.1.16) の定常解を, $r_{H,V} \ll 1$ の場合の漸近級数解として得ることを考えよう．

定常状態において, (2.1.13) の一式目は

$$-\sin\theta v_{(1)} = -\frac{1}{R_e}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{D}[u_{(0)}] \tag{2.1.17}$$

であるので, これを用いて, (2.1.16) の v_1 を消去し, 少し変形を行えば, 定常状態において,

$$0 = \left\{ \frac{\tau_0}{\rho_0 2\Omega U D R_o} \mathscr{D}[\frac{-\tau_x}{\sin\theta}] - \frac{r}{2}\mathscr{D}[\frac{-u_{(0)}}{\sqrt{\sin\theta}}] \right\} + r_{H,V}\mathscr{D}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta_{(0)}}{\partial\theta}] \tag{2.1.18}$$

を得る．

今, 速度スケールを,

$$U = \frac{2\tau_0}{\rho_0 2\Omega E_V^{1/2} D} \tag{2.1.19}$$

ととれば, (2.1.18) は,

$$0 = \left\{ \mathscr{D}[\frac{-\tau_x}{\sin\theta}] - \mathscr{D}[\frac{-u_{(0)}}{\sqrt{\sin\theta}}] \right\} + r_{H,V}\mathscr{D}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta_{(0)}}{\partial\theta}] \tag{2.1.20}$$

となる．ここで,

$$r_{H,V} = \frac{E_H}{E_V^{1/2}} \tag{2.1.21}$$

とおいた．最後に, 極において $\tau_x = 0, u_{(0)} = 0$ であるとし, (2.1.20) を極から緯度 θ まで積分すれば, $u_{(0)}$ に対する方程式

$$0 = \frac{\tau_x}{\sin\theta} - \frac{u_{(0)}}{\sqrt{\sin\theta}} + r_{H,V}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathscr{D}[u_{(0)}] \tag{2.1.22}$$

を得る．

次に, $r_{H,V} \ll 1$ の場合を考え, (2.1.22) の漸近級数解を導こう. 今, $u_{(0)}$ を $r_{H,V}$ によって,

$$u_{(0)} = u_{(0,0)} + r_{H,V} u_{(0,1)} + \cdots$$

と展開し, (2.1.22) に代入する. このとき, $r_{H,V}$ の最低次の項を集めれば,

$$u_{(0,0)} = \frac{\tau_x}{\sqrt{\sin\theta}} \tag{2.1.23}$$

を得る. さらに, $(r_{H,V})^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ の項を集めれば,

$$u_{(0,m)} = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}} \frac{\partial}{\partial\theta} \mathscr{D}[u_{(0,m-1)}] \tag{2.1.24}$$

を得る. したがって, 最終的な (2.1.22) の漸近級数解の形式は,

$$\boxed{u_{(0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r_{H,V}}{\sqrt{\sin\theta}} \frac{\partial}{\partial\theta} \mathscr{L} \right)^m \left[\frac{\tau_x(\theta)}{\sqrt{\sin\theta}} \right]} \tag{2.1.25}$$

と導かれる.

$u_{(0)}$ 以外の解は, 上で得た (2.1.25) を用いて, 以下のように表される. $v_{(1)}$ は (2.1.17) から,

$$\boxed{v_{(1)}(\theta) = -E_H \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \mathscr{D}[u_{(0)}(\theta)]} \tag{2.1.26}$$

と書かれる. また, (2.1.13) の三式目から, $w_{(1)}$ は $v_{(1)}$ を使って,

$$\boxed{w_{(1)}(\theta, z) = w_{(1)}|_{z=1}(\theta) + (1 - z)\mathscr{L}[v_{(1)}(\theta)]} \tag{2.1.27}$$

と書かれる.