

球領域および円盤領域での 1 次元拡散型方程式の解析解

竹広真一

平成 19 年 12 月 31 日

この文章では, チェビシエフ関数展開を利用した球および円盤領域の動径方向 1 次元計算のための SPMODEL ライブラリ (spml) のモジュール au_module のテストのために, 球および円筒領域での動径 1 次元拡散型方程式のさまざまな境界条件に対する解を (できるだけ) 解析的に求めることを行う.

1 球領域の動径 1 次元拡散問題

半径 a の球領域での拡散問題を考える. 支配方程式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right). \quad (1)$$

$r (0 \leq r \leq a)$ は動径座標, κ は拡散率 (正数) である. $\phi(r, t)$ は拡散する物理量であり, 例えば温度, 組成濃度, 磁場などである.

1.1 一般解

時間に関して指数型の解を仮定し,

$$\phi(r, t) = \tilde{\phi}(r) e^{\sigma t} \quad (2)$$

これを支配方程式に代入すると,

$$\sigma \tilde{\phi} = \kappa \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\phi}}{dr} \right). \quad (3)$$

これをを变形すると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\phi}}{dr} \right) + \frac{-\sigma}{\kappa} \tilde{\phi},$$

さらに動径座標を

$$\tilde{r} = \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} r, \quad r = \sqrt{\frac{\kappa}{-\sigma}} \tilde{r}, \quad (4)$$

と变形すると,

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{r}} \right) + \tilde{\phi} = 0.$$

この微分方程式は 0 次の球ベッセルの微分方程式であり, その一般解は 0 次の球ベッセル関数 $\mathcal{J}_0(\tilde{r}), \mathcal{N}_0(\tilde{r})$ の線形結合として表される.

1.2 ディリクレ境界条件の場合

境界条件は, 原点 $r = 0$ で特異性がなく, 外側境界 $r = a$ でディリクレ条件 $\tilde{\phi} = 0$ を考えることにする¹. 原点の境界条件から

$$\tilde{\phi} = A \mathcal{J}_0(\tilde{r}) = A \frac{\sin \tilde{r}}{\tilde{r}} \quad (5)$$

$r = a$ の境界条件から

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} a = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

すなわち,

$$\sigma = -\frac{\kappa}{a^2} n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

よって解は

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathcal{J}_0\left(\frac{n\pi}{a} r\right) \exp\left(-\frac{\kappa}{a^2} n^2 \pi^2 t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a} r\right)}{\frac{n\pi}{a} r} \exp\left(-\frac{\kappa}{a^2} n^2 \pi^2 t\right). \quad (8)$$

係数 A_n は初期条件からさだまる.

¹一般的には, ディリクレ条件だと $\tilde{\phi} = A$, しかしながら, ディリクレ条件の場合は定数部分を $\tilde{\phi} = A + \tilde{\phi}'$ と分離できるので結局値が 0 に対する解を解けば良いことになる. ノイマン条件の場合は...

1.3 ノイマン境界条件の場合

境界条件は, 原点 $r = 0$ で特異性がなく, 外側境界 $r = a$ でノイマン条件 $\frac{d\tilde{\phi}}{dr} = 0$ を考えることにする². 原点の境界条件から

$$\tilde{\phi} = A\mathcal{J}_0(\tilde{r}) = A\frac{\sin \tilde{r}}{\tilde{r}}, \quad (9)$$

$r = a$ の境界条件から

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dr} = A\mathcal{J}'_0(\tilde{r}) = A\frac{\tilde{r} \cos \tilde{r} - \sin \tilde{r}}{\tilde{r}^2} = 0,$$

したがって

$$\tilde{a} \cos \tilde{a} - \sin \tilde{a} = 0. \quad (10)$$

$x \cos x - \sin x = 0$ の解を α_n と求めたとすると,

$$\sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} a = \alpha_n, \quad \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} = \frac{\alpha_n}{a}, \quad \sigma = -\kappa \frac{\alpha_n^2}{a^2},$$

$$\phi = A_n \frac{\sin \frac{\alpha_n r}{a}}{\frac{\alpha_n r}{a}} \exp\left(-\kappa \frac{\alpha_n^2}{a^2} t\right) \quad (11)$$

²一般的なノイマン条件だと $\frac{d\tilde{\phi}}{dr} = A$.