線形波動論 (簡略版)

林 祥介

2014 年 9 月 18 日

目 次

波動力学は流体運動を記述するための有用な手段である. 系に内在する波動の特性を知っておくことは数値計算を行う際の CFL 条件を設定するためにも必須である. 以下では回転成層流体で代表的な線形波動についてのみ解説を行うことにする. これらは音波, 慣性重力波, ロスビー波である.

1　波動論の定式化

まずは, (線形) 波動論について解説しておく. 偏微分方程式の解としての「なみなみ」している解を記述する伝統的な手法である.
波を表現するために導入する関数が位相 (phase) θ である. 物理量 ϕ の, 位相を使って次のように表現できる解を波動解という:

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) \quad = \quad A(\boldsymbol{x}, t) e^{i\theta(\boldsymbol{x}, t)} \tag{1}$$

ただし, A は振幅と呼ばれ, $\boldsymbol{x}, t$ のゆっくりとした関数でなければならない. ϕ は θ が 2π 増加するごとにおおむねもとの値を繰り返す周期関数として表現されることになっている. $\theta =$ 一定の面は波の山や谷を表現している. たとえば $\theta = \theta_1$ がとある山の位置であるとすれば θ の値を 2π づつづらした面 $\theta = 2n\pi$ (n は整数) も山である. 単位長さ, 単位時間の 2π 倍の長さ, 時間あたりの山の数を局所波数, 局所的振動数といい, 次のように定義する:

$$k_i \equiv \frac{\partial\theta(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_i}, \ (i = 1, 2, 3), \quad \omega \equiv -\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{2}$$

物理量 ϕ が正しく波であるためには, 振幅 A のみならず波数 $\boldsymbol{k}$, 振動数 ω も時間空間に対してゆっくり変化する関数でなければならない. ある時刻に定義した山や谷が次の瞬間に全く変わってしまうようでは実用上波とは呼べないからである.

波の山谷の振舞が位相を用いてどのように語られるかを少し解説しておく．いわゆる波の波長 (wavelength), 周期 (period) は

$$\lambda_i \equiv 2\pi\frac{\partial x_i}{\partial\theta} = \frac{2\pi}{k_i},\ (i=1,2,3),\quad \tau \equiv -2\pi\frac{\partial t}{\partial\theta} = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{3}$$

で定義される．山谷の進む早さを表すのが位相速度 (phase velocity) である．x_i 方向への位相速度は等位相面 ($\theta =$ 一定) の x_i 方向へすすむ早さとして定義され

$$c_i \equiv \frac{\omega}{k_i},\quad (i=1,2,3) \tag{4}$$

である[1]． 振動数と波数との関係を与える式

$$\omega = \omega(k_1,k_2,k_3;\boldsymbol{x},t) \tag{5}$$

を分散関係式 (dispersion relation) と言う．分散関係は力学的考察から得なくてはならない (後述). 関数 ω の引数 $\boldsymbol{x},t$ は媒質が空間に依存することを許容している．分散関係が与えられると波数および振動数の時間空間変化を記述する式, 波線方程式 (ray equation) が得られる[2]:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \sum_j c_{gj}\frac{\partial k_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\omega(k_1,k_2,k_3;\boldsymbol{x},t),\ (i=1,2,3), \tag{6}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_j c_{gj}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t}\omega(k_1,k_2,k_3;\boldsymbol{x},t) \tag{7}$$

$\boldsymbol{c}_g$ は群速度 (group velocity) で

$$c_{gi} = \frac{\partial}{\partial k_i}\omega(k_1,k_2,k_3;\boldsymbol{x},t),\ (i=1,2,3) \tag{8}$$

で定義される．分散関係が時間空間に陽に依存しない (一様な媒質) 場合は, 振動数や波数は群速度で移動する系で保存量となる．逆に, 群速度が波数に依存する波では波数ごとに進む方向や早さが異なるので波は分散していくことになる．

[1]「速度」とは言うが, 任意の方向 $\boldsymbol{n}$ への位相速度の大きさ c は $\sum_i c_i n_i$ ではないことに注意. 位相速度は「面」の進むはやさであって, 面の上の点の進む速度ではないからである．

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i}dx_i = \frac{\partial\theta}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i}n_i d\xi$$

であるから,

$$c \equiv d\xi/dt = -\frac{\frac{\partial\theta}{\partial t}}{\sum_i n_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{n_i}{c_i}}$$

である．ちなみに, 任意の方向 $\boldsymbol{n}$ で見た波数は $\sum_i k_i n_i$ であり, これに対して波長は $1/\sum_i 1/\lambda_i$ である．

[2]例えば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k_i}{\partial t} &= \frac{\partial^2\theta}{\partial t\partial x_i} = -\frac{\partial\omega}{\partial x_i} = -\sum_j \frac{\partial k_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial k_j}\omega(k_1,k_2,k_3;\boldsymbol{x},t) - \frac{\partial}{\partial x_i}\omega(k_1,k_2,k_3;\boldsymbol{x},t) \\
&= -\sum_j \frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j}c_{gj} - \frac{\partial}{\partial x_i}\omega(k_1,k_2,k_3;\boldsymbol{x},t) \\
&= -\sum_j c_{gj}\frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\omega(k_1,k_2,k_3;\boldsymbol{x},t)
\end{aligned}$$

同様に $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ も計算する．

ゆっくりとした関数であることを表現するための数学的技術として WKBJ 法というのがある. 小さいパラメター ε を導入して時間, 空間をストレッチする:

$$\boldsymbol{X} \equiv \varepsilon \boldsymbol{x}, \quad T \equiv \varepsilon t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{9}$$

そして

$$\theta(\boldsymbol{x}, t) \quad = \quad \frac{\Theta(\boldsymbol{X}, T)}{\varepsilon}. \tag{10}$$

とおく. $\boldsymbol{X}, T$ で記述できる量をゆっくり変わる量という. 山谷の数自体は $\boldsymbol{x}, t$ で記述する, つまり, 山谷の数は十分たくさんある, が, 波全体の形の変化は $\boldsymbol{X}, T$ で記述できるゆっくり変わる量とするのである. 波数, 振動数は $k_i = \dfrac{\partial \Theta}{\partial X_i}, \omega = -\dfrac{\partial \Theta}{\partial T}$ となることに注意.
ϕ を記述する方程式が

$$P(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial t}; \boldsymbol{x}, t)\phi = 0 \tag{11}$$

であったとしよう. P は微分 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t}$ の多項式である. P および ϕ は ε でもって次にように (形式的に[3]) 振幅展開する.

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_n, \quad \phi(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(\boldsymbol{X}, T) e^{i\Theta(\boldsymbol{X}, T)/\varepsilon} \tag{12}$$

以下線形系の場合に限定する. 分散関係は $O(\varepsilon^0)$ の式から得られる. $O(\varepsilon^0)$ の式は波数, 振動数を代入してかけば

$$P_0(ik_1, ik_2, ik_3, -i\omega; \boldsymbol{X}, T) = 0 \tag{13}$$

となる. これが分散関係式である.
振幅 A_0 の時間発展は $O(\varepsilon^1)$ の式から得られる. $O(\varepsilon^1)$ の式は波数振動数でかけば

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{3} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_j} P_0(ik_1, ik_2, ik_3, -i\omega; \boldsymbol{X}, T) \frac{\partial}{\partial X_j} A_0 \\
&+\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} \frac{1}{i} \frac{\partial^2}{\partial k_j \partial k_l} P_0(ik_1, ik_2, ik_3, -i\omega; \boldsymbol{X}, T) \frac{\partial k_l}{\partial X_j} A_0 \\
&+P_1(ik_1, ik_2, ik_3, -i\omega; \boldsymbol{X}, T) A_0 = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

ただし $X_0 = T$ とした. これが A_0 の時間発展式である. P が自己随伴であるときには P_1 は P_0 の微分で書ける. また, そのとき, 辺々 A_0^* をかけ, その複素共役式とを使ってめんどくさい変形を施せば, 次の保存形式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\partial P_0(ik_1, ik_2, ik_3, -i\omega; \boldsymbol{X}, T)}{\partial \omega} A_0 A_0^* \right] - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\frac{\partial P_0(ik_1, ik_2, ik_3, -i\omega; \boldsymbol{X}, T)}{\partial k_j} A_0 A_0^* \right]$$

分散関係が $P_0 = 0$ であったことを思い出せば, $\dfrac{\partial P_0}{\partial k_j} = -c_{gj} \dfrac{\partial P_0}{\partial \omega}$ であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial T} \mathcal{A} + \nabla \cdot (\boldsymbol{c}_g \mathcal{A}) = 0 \\
&\mathcal{A} \equiv \frac{\partial P_0(ik_1, ik_2, ik_3, -i\omega; \boldsymbol{X}, T)}{\partial \omega} A_0 A_0^*
\end{aligned} \tag{15}$$

[3] 実用的には A_0, P_0 しか使わない.

$\mathcal{A}$ はフラックスが群速度で与えられる保存量となっている. 波の振幅 A_0 の時間発展は, $\mathcal{A}$ として整理することにより, 群速度と結びつけられるこのように単純な形にまとめられる. $\mathcal{A}$ のような波の振幅の自乗の量を波動の強さを表す量と言う意味で一般に波の活動度 (wave activity) という[4].

2 音波

非回転, 重力無しの静止した世界, すなわち, ρ, p, T 一様の世界で存在する線形波動は音波 (acoustic wave) だけである. 実際 (**??**) ～ (**??**) を線形化すると

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \overline{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v}' = 0, \tag{16}$$

$$\overline{\rho}\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} = -\nabla p', \tag{17}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\partial \rho'}{\partial t}. \tag{18}$$

$^{-}$ をつけた量は基準となる静止流体の量, $'$ をつけた量は線形化された擾乱の量を示し, $p = \overline{p} + p'$, $\rho = \overline{\rho} + \rho'$ である. 熱力学の式は $\frac{ds}{dt} = 0$ のかわりに $\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{d\rho}{dt}$ を用いた.
変数を適宜消去すれば音波の式が得られる. たとえば

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 p' = 0. \tag{19}$$

ただし $c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ であり, c_s は音速である[5]. 分散関係は単純明解

$$\omega^2 - c_s^2 \boldsymbol{k}^2 = 0 \tag{20}$$

であり, 群速度は

$$\boldsymbol{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}} = \pm c_s \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{21}$$

となって波数によらない. つまり分散しない. 音波は $\nabla\times\boldsymbol{v} = 0$ で縦波, つまり, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} = 0$ で波数ベクトルと擾乱の速度ベクトルは平行である.
注意すべき点は音波の式は時間に関して 2 階でしかないことである. 流体としてあつかわれる世界は 5 つの変数 ($\boldsymbol{v}$, p, ρ) に関する 5 つの方程式で記述される. 初期値として与えなければならない量は通常 5 つであり, 対応して波動の数 (分散関係の数) は 5 つある. これらをモード (mode) と

[4] ハミルトン力学で記述できる系に位相 θ とゆっくりと変化する時空間座標とを導入できれば,

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \theta}{\partial t}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \theta}{\partial X_j}} = 0$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} + \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j}\left(c_{gj}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right) = 0$$

エネルギーは $\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}$ なので保存量は $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{E}}{\omega}$ となる. $\frac{\mathcal{E}}{\omega}$ を波の作用 (wave action) と言う. 系が並進対称性を持つ場合には k も保存量であり, $\frac{\mathcal{E}}{c}$ が保存量となる. これを波の擬運動量 (pseude momentum) という. これはその波を作るのに必要な運動量であり, 波の伝搬にともなって一緒に伝搬する量である. 気象学では擬運動量 (pseude momentum) のフラックスを特にエリアッセン・パーム (Eliassen-Palm) フラックスといい, 波の伝搬やそれに伴う運動量, また物質輸送の指標として利用されている.

[5] 理想気体なら $c_s^2 = \gamma RT$ である ($\gamma = cp_p/cp_v$).

呼ぶ[6]. 音波の式では流体に任意に与えた擾乱の発展を記述できないのである. 実際, 残りの 3 階は $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ となるモード, すなわち, 渦モードとして取り残されている. 運動方程式の回転を取れば直ちに

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{v}=0. \tag{22}$$

この式は時間に関して 3 階分を含んでいる. 分散関係はもともと ω に関する 5 次式でなければならず, 実際注意深く変形すれば

$$\omega^3(\omega^2-c_s^2\boldsymbol{k}^2)=0 \tag{23}$$

であったのである. 任意の初期値をあたえると, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ の渦モード 3 つと $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ の音波モード 2 つにわかれ, 渦モードは定常でその場に留まり, 音波モードは音波として伝搬するわけである. 以下, 空間に非対称軸 (回転軸と重力軸) を導入するごとに定常だった渦モードの縮退が解ける様を示す.

3 内部重力波, 慣性波

基本場として重力場中に静層して静止している流体をとってみよう. 系は回転していないことにする.
鉛直上向けに z 軸をとる. 静水圧平衡状態にある流体の上に擾乱を重ねて線形化する. (**??**) ~ (**??**) は

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+w'\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}+\overline{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0, \tag{24}$$

$$\overline{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t}=-\nabla p'-\rho' g\boldsymbol{z} \tag{25}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+w'\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}=c_s^2\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}+w'\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}\right). \tag{26}$$

以下具体的に等温で静水圧平衡している大気 (理想気体) で例示していくことにする. $\overline{T}=T_0$, $\overline{p}=p_0e^{-z/H}$, スケールハイトは $H=RT_0/g$, 状態方程式は $p=\rho RT$, 音速は $c_s^2=\gamma RT_0$ である. ちょっと技術的であるが,

$$\hat{\boldsymbol{v}}=e^{-z/2H}\boldsymbol{v}' \quad \hat{\rho}=e^{z/2H}\frac{\rho'}{\rho_0} \quad \hat{p}=e^{z/2H}\frac{p'}{\rho_0},$$

ように変数変換して代入すると方程式は定数係数方程式になる. 分散関係は直ちに得られて

$$\omega\left[\omega^4-c_s^2\left\{\boldsymbol{k}^2+\frac{1}{4H^2}\right\}\omega^2+N^2c_s^2(k_x^2+k_y^2)\right]=0 \tag{27}$$

ただし

$$N^2=-\frac{g}{\rho_0}\left(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}-\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}\right)=\frac{g}{H}-\frac{g^2}{c_s^2}$$

[6]「モード」という単語は, 複数の解があるときその各々をさしていうための一般的な語 (数学よりも物理の人がよく用いる語である) で, 第一モード, 第二モード, ..., あるいは, 中立モード, 不安定モード, ..., という具合にあらゆる状況で使われる.

となることを使った. $c_s \to \infty$ または $N \to 0$ の時に音波の分散関係と一致するものを音波モード, そうでないものを内部重力波 (internal gravity wave)[7]のモードと言う. 平っぺったい構造をした波, すなわち, $k_x^2 + k_y^2 \ll k_z^2$ の時 (つまりルートの中身が 0 に近い) には, 分散関係の根号を近似できて, 内部重力波モードは

$$\omega^2 = \frac{N^2(k_x^2 + k_y^2)}{\boldsymbol{k}^2 + \frac{1}{4H^2}} \tag{28}$$

となる. 残こった一つのモード $\omega = 0$ は z 方向に軸を持つ渦モード (水平渦) である. 運動方程式を見れば明らかなように

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) = 0 \tag{29}$$

に対応している. 軸を鉛直方向にもつ渦を初期に与えたら分散しないまま最後までのこるのである. 音波の除去の話と良く用いられる近似方程式の話をしておこう. 数値計算ならびに理論的な記述を行うために方程式系から音波を除去することが歴史的に行われてきた. 振動数が高い音波があると数値計算上大変なのと, 大気や海洋などの大規模な運動に見られる圧力・密度の不均一の解消には通常音波があまり登場しない (内部重力波が担う) ため, 力学的エッセンスを取り出す理論的な記述のために音波を消しておくのが都合が良かったからである. たとえば, 静水圧近似, すなわち, 運動方程式の鉛直方向の方程式の加速度項 $\frac{\partial w'}{\partial t}$ を無視すると音波モードは失われる. 全球規模の大気現象を計算する際には通常静水圧近似を用いるので自動的に音波は除去されていることになる. 一方, 大気の記述でよく用いられる別の近似に非弾性近似というものがある. これは連続の式において密度の時間変化 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ を無視する近似である. やはり音波をもたらす復元力が絶たれてしまうので音波が現れない. 分散関係式は鉛直構造が多少ずれるので少し形の異なる ω の 3 次式となる. 非弾性近似は大気対流圏の雲対流の計算に用いられてきたが, 最近の小規模天気擾乱の数値計算では音波を除去しないで理想気体をそのまま積分するのが普通になってきている.
ついでにブシネスク (Boussinesq) 近似について述べておこう. このシステムは圧縮性がほとんど無視できるような流体, たとえば水 (海洋), 液体金属 (中心殻), 固体流動 (マントル対流) などで用いられるモデル方程式系である. ブシネスク方程式系は次のようなものである.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{30}$$

$$\rho_0\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + 2\rho_0\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = -\nabla p - \rho\nabla\Phi + \nabla\cdot\sigma + \boldsymbol{F}', \tag{31}$$

$$\rho\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T} \tag{32}$$

連続の式が非発散である (つまり体積変化しない) ことと, それでいて運動方程式において密度変化を浮力にのみ許す, という点が特徴的である. 非発散にしたのでブシネスク系ではもはや音波モードは存在せず, 系のモードの数 (自由に与えられる初期変数の数) は 3 になっている. 密度変化を与えるものは熱力学の式のみであり, その具体的な表現は状況に応じて変わる. 例えば水などの実験室での簡単な対流を記述する系では圧力・体積変化による仕事を無視し, 密度の時間変化のみを熱力学として与える, $\frac{d\rho}{dt} = \frac{Q}{c_p}\alpha$, が用いられる. さて, ブシネスク系を用いた場合の成層場に対する線形擾乱の分散関係は次のようになる.

$$\omega\left[-\boldsymbol{k}^2\omega^2 + N^2(k_x^2 + k_y^2)\right] = 0 \tag{33}$$

[7]「内部」に対する「外部」とは水面のような密度不連続な境界 (流体の堺め) の存在に起因するものを指すときに言う. 浅水方程式系では外部波しか存在しない.

N^2 は実装する熱力学によって多少異なるがいずれにせよ基本場のポテンシャル密度で書けば $-\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}$ である.
内部重力波は浮力を復元力とする波動である. 振動数のもとになっているものは成層安定性の項で議論した浮力振動数 N^2 である. ここではパーセル法で議論したのと全くおなじことを線形近似した式を用いて例示しているに過ぎない. 実際, 内部重力波の振動数 ω がちょうど N になるのは波面が鉛直にたった上下に振動する波 $k_z = 0$ である. 波面が寝てくると振動数は N よりは小さい. 線形化して陽に波を扱うことにより, パーセルでは議論できなかった擾乱の伝搬の様子が波数と振動数の関係 (分散関係) をえることによって描かれる. 内部重力波は音波と違って分散性のある波動であり, 群速度, つまり波の活動度のフラックスの向きは位相速度とは全く異なる向きである. 簡単なので 2 次元ブシネスク流体 ($k_y = 0$) の場合の分散関係 $\omega = Nk_x/k_z$ を用いて例示すれば

$$c_{gx} = \frac{N}{k_z} = c_x, \quad c_{gz} = -\frac{Nk_x}{k_z^2} = -c_z \tag{34}$$

つまり群速度の水平方向成分は水平位相速度と同じであるが, 群速度の鉛直成分は鉛直位相速度の向きと正反対なのである. よって鉛直方向に関しては位相が進む向きと逆向きに波の振幅は伝わる. また群速度と波の波面との関係は $\boldsymbol{c}_g \cdot \boldsymbol{k} = 0$ で波面と群速度が平行である. $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ つまり渦度の波の伝搬はこのように奇妙な (?) 分散性をもつことが多い.
以上, 重力 (成層) を導入することにより 3 つの渦度モードのうち 2 つは内部重力波モードとして切り出されることを示した. 重力ではなく回転を導入することにより同様に 2 つのモードを切り出すことができる. これを慣性波 (inertia wave) という. 簡単のためブシネスク流体 (非圧縮流体) をもちいて示せば次のようになる. 重力がないので浮力が存在しないから完全に非圧縮流体である.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}' = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{36}$$

熱力学の式は運動の式とは切り離されてしまう (これで一つモードが外れる). z 軸に回転軸方向を選べば分散関係は直ちに得られて

$$-\boldsymbol{k}^2\omega^2 + \Omega^2(k_z^2) = 0 \tag{37}$$

である (熱力学が外れてしまったのでモードは二つ, ω の二次式である). 分散関係は内部重力波の場合と非常によく似ており, 復元力をもたらすものが系の回転角速度 Ω であるところ, $\boldsymbol{\Omega}$ 方向に擾乱が構造を持つ ($k_z \neq 0$) 場合に振動するところが異なるだけである. 内部重力波の場合には鉛直方向でなくて水平方向に構造を持つ ($k_x^2 + k_y^2 \neq 0$) 場合に擾乱が振動した. 分散関係の分母にラプラシアンに対応する波数依存性 ($\boldsymbol{k}^2$) が来るところは内部重力波, 慣性波の共通特性で, 渦度波の「慣性」というべき部分である.
重力と回転の両方の影響が入った波動を一般に慣性内部重力波と呼ぶ. その特性は内部重力波のそれと慣性波のそれとを会わせ持ったものであり, 回転軸と鉛直方向との向きのかねあいによって性質が決まる. 大気・海洋の大規模現象でのように回転の鉛直成分のみを考慮する世界では, 方程式上は鉛直方向と回転軸方向とが一致しているとみなしていることに注意しておく. 波動的に言えば伝統的近似を行うこのような系では, 2 つの音波モード, 2 つの慣性内部重力波と, 鉛直軸を渦の軸にする渦モード 1 つからなる. 渦モードは水平スケールが小さいうちは分散しないで定常である. が, 伝統的近似を行うと逆に自転角速度が緯度によって異なるので, スケールの大きい渦は分散を始める. これがロスビー波である.

4 ロスビー波

ロスビー波とはポテンシャル渦度保存則に根を持つ波動の総称名称である. ポテンシャル渦度を q とすれば, 速度場 $\boldsymbol{v}$ と q との間に時間微分を含まない適当な微分関係が (近似的に) 存在するとき, ポテンシャル渦度保存則

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla q = 0 \tag{38}$$

は q の時間に関する 1 階の微分方程式となる. つまり, 音波や内部重力波などその他 4 つのモードが除去されたシステムが得られる. 得られた方程式をロスビー波の式という.
たとえば, ブシネスク系で直観的に例示しよう[8]. 熱力学は最も簡単な $\frac{d\rho}{dt} = 0$ を用いることにする. このようなブシネスク流体のポテンシャル渦度は

$$q = \frac{(\nabla \times \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \rho}{\rho_0} \tag{39}$$

である. 世界がおおむね定常であることを知っていれば流れは地衡風バランス, 成層は静水圧バランスしていなければならない.

$$u = -\frac{1}{2\Omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{2\Omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad w \sim 0, \quad \rho = -\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{40}$$

場の量が p 圧力だけで書けることに注意. よってポテンシャル渦度はおおむね

$$q \sim \frac{2\Omega N^2}{-g} + \frac{N^2}{-g2\Omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4\Omega^2}{N^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{p}{\rho_0} \tag{41}$$

となりやはり圧力 p だけで書けることになる. 圧力場を初期に与えれば速度場と q が計算されるので以下時間発展をおいかけることができる. このように場がおおむね地衡風平衡・静水圧平衡にあるものとし, ポテンシャル渦度の時間変化を介してゆっくりと変化していくような記述方法を準地衡風近似 (quasi-geostrophic approximation) という.
線形化して波動としての振舞を調べて見よう. 静止していて, かつ, Ω や N^2 が定数で空間に依存しなければ, は $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ であり, 時間変化しない. 水平渦 (軸が回転・鉛直軸に平行な渦) は時間変化しない, という内部重力波の項で見た結果に対応する. Ω や N^2 が空間に依存する場合にはロスビー波の式

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla \overline{q} = 0 \tag{42}$$

が得られる. 静止した世界でも渦は分散を始めるのである. 渦の擾乱 q' が流れの擾乱 $\boldsymbol{v}'$ を作り, その流れの擾乱が基本場のポテンシャル渦度の揺らぎを作るので結局 q' 擾乱が伝搬していくわけである. 分散関係は単純で ω の一次式

$$\omega = -\frac{k_x\frac{\partial \overline{q}}{\partial y} - k_y\frac{\partial \overline{q}}{\partial x}}{k_x^2 + k_y^2 + \frac{4\Omega^2}{N^2}k_z^2} \tag{43}$$

である.
$\nabla \overline{q}$ のために渦が分散することを気象学・海洋学では β 効果という. 例えば気象学的伝統近似を施した系から出発すれば Ω は緯度の関数であるから $\nabla \overline{q}$ が含まれていることになる. 大気中の大規

[8] きちんとやりたければロスビー数等を導入して展開することになる.

模波動 (水平スケールが地球半径程度の大きな渦) はそのようなロスビー波としてとらえられ, 惑星波動 (planetary wafve) といわれる.
惑星波動を例示するためのより簡単なシステムを導入しよう. 非発散 2 次元球面系というのがそれである.

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{u}{\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + v\frac{\partial u}{\partial\phi} - \tan\phi uv - 2\tilde{\Omega}\sin\phi v = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{p}{\rho_0}, \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{u}{\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + v\frac{\partial v}{\partial\phi} + \tan\phi u^2 + 2\tilde{\Omega}\sin\phi u = -\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{p}{\rho_0}, \tag{45}$$

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v = 0. \tag{46}$$

ただし, 空間スケールは球殻の半径 a で, 速度は適当なスケール U で, 時間は a/U で無次元化してある. $\tilde{\Omega} \equiv a\Omega/U$ は無次元化された自転角速度である[9].
非発散系を扱っているので流線関数 ψ を導入すれば

$$u \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \quad v \equiv \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \quad \zeta = \nabla_h^2\psi, \quad q = \zeta + 2\Omega\sin\phi$$

ζ は相対渦度, q はポテンシャル渦度, ∇_h^2 は球面上のラプラシアンである. 渦度方程式は簡単に書けて

$$\frac{\partial}{\partial t}q + \frac{1}{\cos\phi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial q}{\partial\phi} - \frac{\partial q}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right) = 0 \tag{47}$$

となる.
世界を軸対称な基本流 $\overline{U} = \overline{U}(\phi) = -\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\phi}$ と擾乱とにわけ, 振幅展開する:

$$\begin{aligned} u &= \overline{U} + u' + u^{(2)} + \cdots, \\ v &= v' + v^{(2)} + \cdots, \\ \psi &= \overline{\Psi} + \psi' + \psi^{(2)} + \cdots. \end{aligned}$$

渦度方程式に代入すれば, 振幅の 1 次の方程式として線形化された式が得られる

$$\frac{\partial\zeta'}{\partial t} + \overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\zeta'}{\partial\lambda} + \frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} = 0 \tag{48}$$

$$\hat{\beta} \equiv \frac{\partial}{\partial\phi}\left[2\Omega\sin\phi - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi\overline{U})\right].$$

である.
振幅の 2 次の方程式は渦度ではなくて角運動量の式で見るほうが御利益が大きい. 東西平均した結果だけかけば[10]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u^{(2)}}\cos\phi) - \overline{v'\zeta'}\cos\phi = 0 \tag{49}$$

[9]先に導いたロスビー波の式において, 鉛直波数が非常に小さい (z 依存性が無視できる, すなわち, $k_x^2 + k_y^2 >> \frac{4\Omega^2}{N^2}k_z^2$) であるときに非発散球面方程式が実際の流体の挙動を表している. この式に従うロスビー波を非発散ロスビー波という.

[10]もとの非線形版の角運動量の式を使えば

$$\frac{\partial}{\partial t}(u\cos\phi) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{u^2+v^2}{2} - vq\cos\phi = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{p}{\rho_0}$$

である. 角運動量流速の収束は

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\overline{(u+\Omega\cos\phi)v}\cos^2\phi) = -\overline{vq}\cos\phi = -\overline{v\zeta}\cos\phi$$

となることに注意. ただし $\overline{} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda$ である.

擾乱の構造が v と ζ' に相関があるようなものであれば角運動量が生成される. 一方, 1 次の渦度方程式に ζ' をかけて東西平均すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}+\cos\phi\overline{v'\zeta'} \quad = \quad 0 \tag{50}$$

擾乱の時間変化が角運動量の収束をもたらす. これと 2 次の角運動量の式とを組み合わせ, $v'\zeta'$ を消去すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\cos\phi\overline{u^{(2)}}+\frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\right] \quad = \quad 0. \tag{51}$$

この式は流れが無いところに擾乱 ζ' をおくためには, 角運動量 $-\frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}$ を加えなくてはならないことを示している. これを擾乱の持つ擬角運動量 (pseude angular momentum) [11]という. この式はまた, 定常な擾乱 $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}=0$ は平均流を加速しないことを示している. これを非加速定理 (nonacceralation theorem), という.

WKB 近似を行ない波束としての解の振舞いを調べる. ε は適当な小さいパラメターであるとして展開する[12]. Θ を位相とすれば, 局所的な波数, 振動数は球面系では次のように定義される.

$$k \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}, \quad l \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}, \quad \omega \equiv -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial t}. \tag{52}$$

波数, 振動数は $O(\varepsilon^{-1})$ であることに注意. 線型化した渦度方程式に代入する. 局所分散関係は $O(\varepsilon^0)$ よりもとまる.

$$\omega=\overline{u}k-\frac{\hat{\beta}k}{k^2+l^2} \tag{53}$$

$\hat{\beta}$ は $O(\varepsilon^{-2})$ と見なしていることに注意[13]. 群速度 $c_{g\lambda}, c_{g\phi}$ は

$$c_{g\lambda}=\overline{u}+\frac{\hat{\beta}(k^2-l^2)}{(k^2+l^2)^2}, \quad c_{g\phi}=\frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2+l^2)^2}. \tag{54}$$

ψ' の振幅 A_0 に関する情報は $O(\varepsilon)$ よりもとまる. ややめんどくさい計算の後結局

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos\phi c_{\phi}\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\}=0. \tag{55}$$

$\dfrac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}$ は波束についての保存量となる. これは先程の擬角運動量に他ならない. 擬角運動量は群速度で運ばれるのである.

[11]音波も内部重力波もそれらを生成するにはしかるべく運動量を供給しなければならららない. 一般的に定式化のところで述べた保存量はこの運動量の輸送にかかわっている. なお, 音波と内部重力波は 2 つづペアになっており (同じ波数に対して ω の正負がある), 与えられた波数に対して正の運動量を持った波と負の運動量を持った波があるが, ロスビー波は $\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}$ で決まる定符号の運動量の波しか存在しない.

[12]ここでは,

$$\psi' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n A_n(\lambda,\phi,t)e^{i\frac{\Theta((\lambda,\phi,t)}{\varepsilon}}$$

である. λ,ϕ,t を遅い変数とみなしていることに注意. 場の, λ,ϕ,t で見た時空間的な変化の割合は, 波数, 振動数に比べて十分ゆっくりしているものとする.

[13]気象学・海洋学ではコリオリパラメタ $2\Omega\sin\phi$ の ϕ 依存性をその 1 次まで残しておく近似を β 面 (β plane) 近似と言う. $\hat{\beta}$ はそれに基本場に流れ $\overline{u}$ がある効果をとりこんだもので, その記号は気象学海洋学の伝統に従ってい β と書いた.