

線型波動の基礎

林 祥介

2014 年 07 月 18 日

目次

1	概説	2
2	位相	5
2.1	位相	5
2.2	振動数, 波数, 周期, 波長	5
2.3	位相速度	6
2.4	分散関係式	7
3	フーリエ積分の鞍点法 (停留点法) による評価	8
3.1	無限領域で定義された定数係数線型偏微分方程式の解き方	8
3.2	初期値問題の評価	11
3.2.1	問題の設定	11
3.2.2	停留点法または鞍部点法の復習	11
3.2.3	空間1次元の場合	13
3.2.4	空間3次元の場合	14
3.2.5	群速度による伝播	15
3.3	定常強制力に対する応答の評価	18
3.3.1	問題の設定	18
3.3.2	評価の実行	18
4	波線理論 (WKBJ 近似)	21
4.1	波らしい解と波線理論での条件	21
4.1.1	線型方程式と波らしい解	21
4.1.2	波らしい解の条件	22
4.1.3	場の緩やかな変化	23
4.2	漸近展開	24
4.2.1	ε -展開	24
4.2.2	$O(\varepsilon^n)$ の式	24
4.2.3	局所的波数, 振動数を用いた表現	25
4.2.4	波数の保存則	26
4.3	$O(\varepsilon^0)$: 局所分散関係	27
4.3.1	波数, 振動数の保存	27
4.4	$O(\varepsilon^1)$: 振幅の方程式	29

4.4.1	保存則の導出	29
4.5	APPENDIX:自己随伴方程式	31
4.5.1	証明	32
5	有用な定理	34
5.1	Hayes の定理 : 保存則と群速度	34
5.1.1	仮定	34
5.1.2	Hayes の定理	35
5.1.3	証明	35
6	平均変分原理	37
6.1	変分法の復習	37
6.2	波らしい解	38
6.3	平均変分原理	38
6.4	一般化分散関係	39
6.5	波の作用とその保存則	39
6.6	エネルギー方程式	40
6.7	運動量の方程式	41
6.8	線型でかつラグランジュ密度が座標, 時間によらない時	41

第1章 概説

伝播する擾乱のことを波動という。流体、弾性体、プラズマ等の挙動を観察すれば伝播する擾乱が存在することは容易に経験される。波動理論は、偏微分方程式系(時間発展方程式)上で伝播する擾乱を追跡する方法を定式化したものである。その基本的な作戦は、方程式系の解の空間構造をなんらかの形であらかじめ設定し、その形が満たすべき条件を導出し、その形状の時間発展を追跡するというものである。あらかじめ伝播する擾乱の存在を想定しておくわけである。波動理論は、さらに、偏微分方程式として記述された系の振舞いを考察するための基本的な道具の一つでもある。系がどのような波動構造を持っているかを掌握しておけば系の時間発展に関するかなりの予想を行なえるようになる。そのような目的において、特に線型波動論は単純であり、かつ、有効でもある。なお、波動理論と対をなす形で構成されている理論体系に振動論、そして、不安定論がある。振動論も波動理論も擾乱の時間発展を追跡する方法を与えるのであるが、振動論は系全体、すなわち、境界等の構造をも含んだ形で固有解を議論するのに対し、波動論は局所理論、すなわち、なんらかの意味に於て境界等の存在は考えなくてもよいような状況を考察するものである。不安定論は、擾乱の伝播よりも成長にその力点を於て解析する際の名称であり、振動論、波動論ともに不安定論を内在している。歴史的には、不安定論、特に線型不安定論は振動論として議論されてきたのであるが、近年では伝播する不安定擾乱の研究も行なわれてきている。

さて、波動理論、特に線型波動理論においてよく用いられる解の空間構造として‘波らしい解’がある。波らしい解とは位相関数が定義されるような解の一群のことである。位相関数とは適当な単調関数

$$\theta = \theta(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

のことである。ただし、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

は着目している時空間領域で符号を変えない。位相関数は波の山谷にラベル付けを行ない関数としたものである。位相関数を導入することにより任意の物理量 ϕ は次のように表現されることになる(図1)。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t)f(\theta(\mathbf{x}, t)). \quad (1.2)$$

f は周期 2π の周期関数であり, A は振幅と呼ばれる. 波らしい解として用いられる構造は周期概ね 2π の周期解であるということになる.

図 1. 波らしい解

線型偏微分方程式系に対して用いられる波らしい解としてはさらに簡略な形

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t) \exp(i\theta(\mathbf{x}, t)) \quad (1.3)$$

がある. 線型であるので複素化した形が利用されていることに注意されたい. 意味があるのは表現のうちの实部だけである. このような解の構造を用いることは, 指数関数という慣れ親しまれた関数を用いることにより解の振舞いをより受け入れやすい形で掌握しようとする精神が現れたものである.

波らしい解の構造関数として指数関数を選ぶことは定数係数線型偏微分方程式の解を考察することにより正当化される. 無限領域で定義された定数係数線型偏微分方程式は厳密に指数関数で与えられる解

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= A e^{i(kx+ly+mz-\omega t)} \\ \omega &= \omega(k, l, m) \end{aligned}$$

を持っている. 解の拡張として, 指数関数解を変調した形で解を想像することは容易である. 実際, 一般解は指数関数解の重ねあわせ, すなわち, フーリエ積分によって与えられるのであるが, フーリエ積分を鞍点法 (停留点法) をもちいて評価することによって波らしい解が得られることを示すことができる. フーリエ積分の鞍点法 (停留点法) による評価を用いれば, 与えられた初期値, あるいは, 強制に対する漸近的な解の振舞いを波らしい解の伝播という言葉を用いて語る事ができる.

与えられた線型偏微分方程式系に対して, 位相関数が定義され, かつ, 波らしい解の空間構造として指数関数が選べる, という事をあらかじめ知っておれば, その構造の時間発展を追跡する方程式系は容易に得られる. 線型偏微分方程式系は定数係数でなくとも構わない. 位相が十分こまかく定義され, 系の時間空間変化に比

波数, 振動数が十分大きいと評価されるとき解の振舞いは漸近展開理論 (WKBJ 法) を用いて局所的に考察することができる. このようにして展開された理論を波線理論という. 以下, 線型偏微分方程式に対するこのような形の解を線型波動 (解) と呼ぶことにしよう. 波線理論は線型波動理論の根幹をなす理論である.

振幅 A を決定するための, 波線理論によって得られる方程式は多くの場合保存則の形態をとっている. これは偶然の帰結ではなく, もともとの偏微分方程式系が物理系を記述するもの, すなわち, ラグランジ関数を通して変分原理からも記述されるようなものであることに起因している. 我々が考察する偏微分方程式系は, 流体, 弾性体, プラズマ等主として連続体として記述される系の時間発展方程式として得られるものであり, 本来変分原理を用いても記述されているはずのものであるからである¹. 変分原理で記述されている系に対して, 位相関数が導入できるような場合を考える際には, 作用積分を位相平均したものが意味を持つようになる. 位相で平均した作用積分を変分することにより, 線型方程式の範囲にとどまらない波動理論の基礎を一般的に与えることができる. この基礎付けのことを平均変分原理という. 平均変分原理によって定式化されるような系では系の対称性に起因する種々の保存則の存在が容易に想像できる.

以下では順をおって,

- 位相関数
- フーリエ積分の鞍点法 (停留点法) による評価
- 波線理論 (WKBJ 法)
- 平均変分原理

について述べることにする.

¹必ずしも真ではない. 近似方程式形が変分原理という見地からもつじつまがあった形で得られるとは限らないからである. 変分原理を意識して近似系を導出することは 1980 年代以降に考察されている問題であり, 現在必ずしもうまく整理されていない.

第2章 位相

2.1 位相

位相とは、波の山谷の位置を表すために時空間に貼られたラベルのことである。位相を用いることにより偏微分方程式系 (時間発展方程式) の解として‘波らしい解’を定義することができる。位相は時空間の関数として扱われる。以下これを位相関数と呼ぶ。位相関数は単調なスカラー関数

$$\theta = \theta(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

として定義される。ただし、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}, \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

は着目している時空間領域で符号を変えない。位相関数は波の山や谷をその関数値に対応させてラベルする。ある山から次の山までの1波長進む間に位相関数の値は 2π 増えるものとする。従って、例えば、 $\theta = 2n\pi$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) は山の位置に対応する、という具合に用いられる。

位相関数を用いることにより、任意の物理量 ϕ の波らしい解としての表現は次のように与えられる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t)f(\theta(\mathbf{x}, t)). \quad (2.2)$$

f は周期 2π の周期関数であり、 A は振幅である。 ϕ は、位相が 2π 変わると同じ形状 f を概ね繰り返すものとして表されていることになる。

2.2 振動数, 波数, 周期, 波長

波数は単位長さあたりの位相の進みとして定義され、振動数は単位時間あたりの位相のおくれとして定義される。それぞれ位相関数の微分により次のように与えられる。

$$k_x \equiv \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.3)$$

$$k_y \equiv \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$k_z \equiv \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (2.5)$$

$$\omega \equiv -\frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (2.6)$$

波長 (λ) 並びに時間軸での周期 (T) は,

$$\lambda_x \equiv 2\pi / \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.7)$$

$$\lambda_y \equiv 2\pi / \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (2.8)$$

$$\lambda_z \equiv 2\pi / \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (2.9)$$

$$T \equiv -2\pi / \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (2.10)$$

のように定義される.

2.3 位相速度

等位相面 $\theta = \text{const}$ が空間上を移動する速度を位相速度という. θ 一定の面に着目すると

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz + \frac{\partial \theta}{\partial t} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

これを用いることにより, x 方向, y 方向, z 方向の位相速度がそれぞれ次のように定義される:

$$c_x \equiv \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta_{yz}} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} / \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\omega}{k_x}, \quad (2.11)$$

$$c_y \equiv \left. \frac{dy}{dt} \right|_{\theta_{zx}} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} / \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\omega}{k_y}, \quad (2.12)$$

$$c_z \equiv \left. \frac{dz}{dt} \right|_{\theta_{xy}} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} / \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\omega}{k_z}. \quad (2.13)$$

2.4 分散関係式

位相関数のもっとも簡単な例は、定数係数線型偏微分方程式の指数関数解

$$e^{i(kx+ly+mz-\omega t)} \quad (2.14)$$

の指数部分

$$\theta = kx + ly + mz - \omega t \quad (2.15)$$

である。例えばスカラー量 ϕ に対する式

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\phi + P_2\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\phi = 0$$

(P_1, P_2 は多項式) に対して

$$\phi = \phi_0 e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$$

は厳密な解である。ただし ω, \mathbf{k} は独立ではなく

$$-i\omega P_1(i\mathbf{k}) + P_2(i\mathbf{k}) = 0 \quad (2.16)$$

を満たさなければならない。

一般に、偏微分方程式系 (時間発展方程式) を満たすために存在する ω と \mathbf{k} との関係式のことを分散関係式という。この名前のゆえんについては後の章を参照されたい。

第3章 フーリエ積分の鞍点法(停留点法)による評価

3.1 無限領域で定義された定数係数線型偏微分方程式の解き方

無限領域で定義された定数係数線型偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\phi(\mathbf{x}, t) + P_2\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

の初期値

$$\phi(\mathbf{x}, t=0) = \phi(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

に対する解をもとめることを考えよう. ここで, 変数 $\phi = (\phi_k)$ は n 次元 ($k = 1, \dots, n$) であるとし, P_1, P_2 は $\{\partial/\partial x_i\}$ からなる定数係数多項式を成分とする $n \times n$ の行列, \mathbf{f} は非斉次項であり, また, $\mathbf{x} = (x_i)$, ($i = 1, 2, 3$) は空間座標, t は時間である.

この方程式に対しては次のようにして形式解を得ることができる. 無限領域定数係数偏微分方程式であるので方程式をフーリエ変換して

$$P_1(i\mathbf{k})\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{k}, t) + P_2(i\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{k}, t). \quad (3.3)$$

ただし

$$\Phi(\mathbf{k}, t) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 \phi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}, t) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.5)$$

あるいは

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 \Phi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 \mathbf{F}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.7)$$

この常微分方程式は形式的には直ちに解けて

$$\Phi(\mathbf{k}, t) = e^{-P(i\mathbf{k})t} \Phi(\mathbf{k}) + e^{-P(i\mathbf{k})t} \int_0^t dt' e^{P(i\mathbf{k})t'} \mathbf{F}(\mathbf{k}, t'). \quad (3.8)$$

P は P_1 が正則であるものとして定義された次のような行列である.

$$P \equiv P_1^{-1} P_2. \quad (3.9)$$

より具体的な表現を得るためには P を対角化して行列の計算を実行する必要がある. 我々が扱う方程式系では, P はその次元と等しい n 次元の固有空間を持っており対角化可能な行列となっている場合がほとんどである. P を対角化するユニタリー変換行列を $U(\mathbf{k})$ としよう:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= U U^\dagger = E \\ U P U^\dagger &= \Delta \end{aligned}$$

Δ は成分を P の固有値とする対角行列, E は n 次元単位行列, \dagger は転置行列の複素共役を表す. P, U, Δ はともに \mathbf{k} の関数であることに注意. 固有値は虚数表示にして $\{i\omega_i(\mathbf{k})\}$ と表すことにしよう.

$$i\omega_i(\mathbf{k}) = \sum_{jk} u_{ij} P_{jk} u_{ik}^* \quad (3.10)$$

ただし u_{ij} は U の成分である.

さて, この Δ を用いると形式解は次のようになる.

$$\Phi(\mathbf{k}, t) = U^\dagger(\mathbf{k}) e^{-\Delta(\mathbf{k})t} U(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}) + U^\dagger(\mathbf{k}) e^{-\Delta(\mathbf{k})t} \int_0^t dt' e^{\Delta(\mathbf{k})t'} U(\mathbf{k}) \mathbf{F}(\mathbf{k}, t').$$

成分で書けば

$$\begin{aligned} \Phi_i(\mathbf{k}, t) &= \sum_{jk} e^{-i\omega_j(\mathbf{k})t} u_{ji}^*(\mathbf{k}) u_{jk}(\mathbf{k}) \Phi_k(\mathbf{k}) \\ &\quad + \sum_{jk} e^{-i\omega_j(\mathbf{k})t} u_{ji}^*(\mathbf{k}) u_{jk}(\mathbf{k}) \int_0^t dt' e^{i\omega_j(\mathbf{k})t'} F_k(\mathbf{k}, t'). \end{aligned} \quad (3.11)$$

フーリエ逆変換をほどこすと

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} U^\dagger(\mathbf{k}) e^{-\Delta(\mathbf{k})t} U(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}) \\ &\quad + \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} U^\dagger(\mathbf{k}) e^{-\Delta(\mathbf{k})t} \int_0^t dt' e^{\Delta(\mathbf{k})t'} U(\mathbf{k}) \mathbf{F}(\mathbf{k}, t'). \end{aligned}$$

成分で書けば

$$\begin{aligned} \phi_i(\mathbf{x}, t) = & \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 \sum_{jk} u_{ji}^*(\mathbf{k}) u_{jk}(\mathbf{k}) \Phi_k(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_j(\mathbf{k})t)} \\ & + \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 \sum_{jk} u_{ji}^*(\mathbf{k}) u_{jk}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_j(\mathbf{k})t)} \int_0^t dt' F_k(\mathbf{k}, t') e^{i\omega_j(\mathbf{k})t'} \end{aligned} \quad (3.12)$$

斉次項のフーリエ成分 (積分の被積分関数) は指数関数

$$e^{-\omega_j(\mathbf{k})t}$$

からなる n 個の項 ($j = 1, \dots, n$) の和に書けている. この各々の項を自由モード, あるいは, $\{\omega_j\}$ で番号をふって第 j 番目の自由モードといい, ω_j を第 j 番目のモードの振動数という. 非斉次項のフーリエ成分も同様に各々 ω_j ($j = 1, \dots, n$) を含む n 個の項の和で書かれている. この各々の項を強制モード, あるいは, $\{\omega_j\}$ で番号をふって第 j 番目の強制応答という. 斉次項, 非斉次項の両項を含めて, $\{\omega_j\}$ で分類して整理された項をモードと呼ぶ. モードの数は独立な変数の数, あるいは, 系の時間微分の数, 従って, 必要な初期値の数である¹. なお, 波数と振動数との関係式

$$\omega = \omega_j(\mathbf{k}) \quad (3.13)$$

を第 j モードの分散関係式という.

以下, 簡単のためにモードが一つしかない場合, すなわち, 1 変数の方程式についてのみ考えることにする. モードに関する添字は全部取り外すことにする. モードが複数存在するときは同じ手続きを行ない足しあわせればよいだけである.

¹例えば, 古典的な 1 成分 1 相の流体系では, モードの数は 5 である. 地球流体でよく知られる用語を使えば, 音波が 2 つ, 内部重力波が 2 つ, ロスビー波が 1 つである. 磁気流体ではさらに MHD モードが 2 つ増える.

3.2 初期値問題の評価

3.2.1 問題の設定

強制力が働いていない状況, $F = 0$, を考察することにしよう. 前節での考察により解は

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 \Phi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (3.14)$$

の形のモード解の重ねあわせで与えられることが知っている. 以下, 簡単のためにモードが1つしかない状況を考察することにする. モードが複数存在するときは, この節で行なわれる評価の結果を各モードについて足しあわせればよいだけである. さて上のフーリエ積分を $t \rightarrow \infty$, $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ で漸近評価することにより波らしい解が得られることを示そう. ただし, 漸近形を求めるに当たって分散関係式

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \quad (3.15)$$

に対し,

$$\det \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right) \neq 0 \quad (3.16)$$

という条件をつけることにする¹.

3.2.2 停留点法または鞍部点法の復習

(3.14) の $t \rightarrow \infty$ での評価は停留点法 (stationary phase method) または鞍部点法 (saddle point method) と呼ばれる方法を用いて求めることができる. 積分が1次元である場合について解説しておこう. 次のような積分を考える:

$$\phi(t) = \int dk \Phi(k) e^{\chi(k)t}. \quad (3.17)$$

(3.17) の被積分関数は $\Phi(k)$ と指数関数との積である. 複素 k 空間で被積分関数の性質を調べ積分への寄与を考察してみる. $t \rightarrow \infty$ の時, $\mathcal{I}_m \partial \chi / \partial k \neq 0$ であれば指数関数は k に関して激しく振動する関数である. k のこのような領域では k の多くの部分においては指数関数の1周期分の積分をすると $\Phi(k)$ はほとんど定数なので積分への寄与はほぼなくなってしまふ. しかし,

$$\mathcal{I}_m \frac{\partial \chi}{\partial k} = 0 \quad (3.18)$$

¹この条件は後に出てくる‘群速度’という言葉を使うと, ‘群速度が一定であるような分散関係式の波を除外する’ということになる.

となる所では k に関する位相の増加が非常に遅いので積分への寄与が存在する. 逆に言うと, (3.17) の $t \rightarrow \infty$ での積分への寄与は (3.18) を満たす点で大きいのである. (3.17) の積分の評価は積分路を複素 k 空間上の (3.18) を満たす点を連ねた積分路に変更して行なうのがもっとも正確に行なえるであろう.

被積分関数に特異点がなければ積分路を k の実軸から新しい積分路に変更しても積分の値は変わらない. この新しい積分路上においては $\mathcal{I}_m \chi$ は値を変えない. 積分は指数関数の実部からの寄与を計算することで評価される. t は非常に大きな数であるので積分は $\mathcal{R}_e \chi$ の最大値の近傍のみで評価すれば十分だからである. 停留点を連ねた積分路上に於て

$$\mathcal{R}_e \frac{\partial \chi}{\partial k} = 0 \tag{3.19}$$

なる点をもとめる. ところがこの条件は (3.18) とあわせると単に

$$\frac{\partial \chi}{\partial k} = 0 \tag{3.20}$$

なる点をもとめることにほかならない. このような点を鞍部点という. 鞍部点を通して $\mathcal{I}_m \chi$ が値を変えないパスは, $\partial^2 \chi / \partial k^2 \neq 0$ ならば 2 つ存在する. その 2 つの方向のうち, ある方向では $\mathcal{R}_e \chi$ の値は極大になっているが, 別の方向では極小になっている¹. (3.17) の積分の評価は $\mathcal{I}_m \partial \chi / \partial k = 0$ なる方向で, $\mathcal{R}_e \chi$ の値が鞍部点で極大になる方向に行なえばよいのである. 積分は局所的にガウス積分となるのでたやすく評価される.

積分が多次元である場合でも作戦は同じである. 次のような積分を考える:

$$\phi(t) = \int dk_1 \int dk_2 \int dk_3 \Phi(\mathbf{k}) e^{\chi(\mathbf{k})t}. \tag{3.21}$$

まず第一に位相が変わらないパスを考え, 次いで, χ の実部が極大になる点を探す. まとめて書けば

$$\frac{\partial \chi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = 0. \tag{3.22}$$

¹このような形状になっていることは鞍部点 ($k = k_0$) の周りで関数を級数展開してみれば直ちに知れる.

$$\begin{aligned} \chi &= \chi(k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial k_0^2} (k - k_0)^2 + \dots \\ &= \chi(k_0) + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 \chi}{\partial k_0^2} \right| |k - k_0|^2 e^{i\alpha + 2i\beta} \end{aligned}$$

ただし, α, β は, それぞれ, $\partial^2 \chi / \partial k^2, k - k_0$ の位相角である. 近傍で関数の虚部が変わらない方向は 2 つあって実部が極大になっている方向 ($\beta = \pi/2 - \alpha/2$) と極小になっている方向 ($\beta = -\pi/2 - \alpha/2$) とがある. これが鞍部点という名前の由来である. ただし $\partial^2 \chi / \partial k_0^2 \neq 0$ とする.

これが多次元積分での鞍部点である. この点の周りで積分を評価すればよい. χ を級数展開すると積分はガウス積分として容易に評価できる.

3.2.3 空間1次元の場合

(3.14) の $t \rightarrow \infty$ での評価は, 空間が1次元, すなわち (x, t) 2次元の場合には前節の解説を用いて直ちに完了する. 空間1次元であるので (3.14) を次のように書き下すことにしよう:

$$\phi(x, t) = \int dk \Phi(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

したがって, $\chi(k) \equiv ikx/t - i\omega(k)$ であることになる.

鞍部点の方法を使って, (3.23) の漸近形を求めてみよう. 積分の値に寄与するのが鞍部点付近のみであることから (3.23) は

$$\phi(x, t) \sim \sum_r \Phi(k^{(r)}) \int_{c^{(r)}} dk e^{ikx - i\omega(k)t} \quad (3.25)$$

と近似できる. ここで $k^{(r)} = k^{(r)}(x, t)$ は鞍部点, すなわち,

$$ix - i \frac{\partial \omega}{\partial k} t = 0 \quad (3.26)$$

の解であり, $c^{(r)}$ は積分路のうちの鞍部点 $k^{(r)}$ 付近の部分を表す. なお, この表現では鞍部点が複数あるものとして添字 (r) を付してある. さて, $k^{(r)}$ での最急降下線は $\partial^2 \omega / \partial k^2(k^{(r)})$ の符号によって決まり,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{k=k^{(r)}} > 0 &\rightarrow k - k^{(r)} = e^{-i\pi/4} s, \\ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{k=k^{(r)}} < 0 &\rightarrow k - k^{(r)} = e^{i\pi/4} s. \end{aligned}$$

ただし, s は実数パラメーターである. まとめて書くと最急降下線は

$$k - k^{(r)} = e^{-i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2(k^{(r)})}\right) s} \quad (3.27)$$

の方向である.

この積分路を用いることにより (3.25) の積分の評価は次のようになる.

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &\sim \sum_r \Phi(k^{(r)}) \int_{c^{(r)}} dk e^{ik^{(r)}x - i\omega(k^{(r)})t - i\frac{1}{2}(k - k^{(r)})^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2(k^{(r)})} t} \\ &\sim \sum_r \Phi(k^{(r)}) e^{ik^{(r)}x - i\omega(k^{(r)})t} \int_{-\delta}^{\delta} ds e^{-i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2(k^{(r)})}\right) s} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2(k^{(r)})} \right| t s^2} \end{aligned}$$

ここで、積分に寄与するのが $k^{(r)}$ 付近のみであることを考えて、積分範囲を、 $(-\delta, +\delta)$ から $(-\infty, +\infty)$ に変えると、

$$\phi(x, t) \sim \sum_r \Phi(k^{(r)}) e^{ik^{(r)}x - i\omega(k^{(r)})t} e^{-i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^{(r)2}}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^{(r)2}} \right| t s^2}.$$

結局、

$$\phi(x, t) = \sum_r \Phi(k^{(r)}) \sqrt{\frac{2\pi}{t \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^{(r)2}} \right|}} e^{ik^{(r)}x - i\omega(k^{(r)})t} e^{-i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^{(r)2}}\right)} \quad (3.28)$$

3.2.4 空間3次元の場合

空間が3次元の場合にも (3.14) $t \rightarrow \infty$ での評価は停留点法/鞍部点法を用いて計算することができる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 \Phi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (3.29)$$

したがって、評価されるべき関数は $\chi(\mathbf{k}) \equiv i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)$ である。

鞍部点の方法を使って、(3.29) の漸近形を求めてみよう。積分の値に寄与するのが鞍部点付近のみであることから (3.29) は

$$\phi(\mathbf{x}, t) \sim \sum_r \Phi(\mathbf{k}^{(r)}) \int \int \int_{c^{(r)}} dk_1 dk_2 dk_3 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} \quad (3.30)$$

と近似できる。ここで $\mathbf{k}^{(r)} = \mathbf{k}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$ は鞍部点、すなわち、

$$i\mathbf{x} - i \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} t = 0 \quad (3.31)$$

の解であり、 $c^{(r)}$ は積分路のうちの鞍部点 $\mathbf{k}^{(r)}$ 付近の部分を表す。ここで添字 (r) は鞍部点が複数ある可能性を示すものである。

さて、 $\mathbf{k}^{(r)}$ の近傍では

$$\chi(\mathbf{k}) \sim \chi(\mathbf{k}^{(r)}) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i^{(r)} \partial k_j^{(r)}} (k_i - k_i^{(r)})(k_j - k_j^{(r)}) \quad (3.32)$$

であるが, 積分の評価は $\partial^2\omega/\partial k_i^{(r)}\partial k_j^{(r)}$ を対角化する軸 $\tilde{\mathbf{k}}$ に座標変換して行なうのが簡略である:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &\sim \sum_r \Phi(\mathbf{k}^{(r)}) e^{i(\mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}^{(r)})t)} \int \int \int_{c^{(r)}} dk_1 dk_2 dk_3 e^{-i\frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2\omega}{\partial k_i^{(r)}\partial k_j^{(r)}} (k_i - k_i^{(r)})(k_j - k_j^{(r)})} \\ &\sim \sum_r \Phi(\mathbf{k}^{(r)}) e^{i(\mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}^{(r)})t)} \prod_i \int_{c^{(r)}} d\tilde{k}_i e^{-i\frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial \tilde{k}_i^{(r)2}} (\tilde{k}_i - \tilde{k}_i^{(r)})^2 t}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

この積分の各項の値は1次元の場合と全く同じなので結果はたやすく得られる.

$$\phi(\mathbf{x}, t) \sim \sum_r \Phi(\mathbf{k}^{(r)}) \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{t^3 |D^{(r)}|}} e^{i\mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k}^{(r)})t} e^{-i\frac{\pi}{4} \sum_i \text{sgn}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial \tilde{k}_i^{(r)2}}\right)}, \quad (3.34)$$

ただし

$$D^{(r)} = \det \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k_i \partial k_j} \right) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^{(r)}}. \quad (3.35)$$

3.2.5 群速度による伝播

(3.34) の漸近形のうち, r 番目の鞍部点 $\mathbf{k}^{(r)}$ の寄与による部分のみを取り出して

$$\phi^{(r)}(\mathbf{x}, t) \sim \Phi(\mathbf{k}^{(r)}) \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{t^3 |D^{(r)}|}} e^{i\mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k}^{(r)})t} e^{-i\frac{\pi}{4} \sum_i \text{sgn}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial \tilde{k}_i^{(r)2}}\right)}, \quad (3.36)$$

と書くことにする. 鞍点を決める式 (3.31) により $\mathbf{k}^{(r)}$ を \mathbf{x}, t の関数と見立てれば

$$\phi^{(r)}(\mathbf{x}, t) \sim A(\mathbf{x}, t) e^{i\theta(\mathbf{x}, t)} \quad (3.37)$$

ただし

$$A(\mathbf{x}, t) \equiv \Phi(\mathbf{k}^{(r)}) \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{t^3 |D^{(r)}|}}, \quad (3.38)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}^{(r)})t - \frac{\pi}{4} \sum_i \text{sgn}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial \tilde{k}_i^{(r)2}}\right). \quad (3.39)$$

かくして振幅 A と位相 θ とで記述される波らしい解が得られたことになる.

位相が定義できたので第2章の議論を用いて局所的な波数, 振動数を定義することが出来る.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \mathbf{k}^{(r)} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{(r)}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}^{(r)}} \frac{\partial \mathbf{k}^{(r)}}{\partial \mathbf{x}} t \right) = \mathbf{k}^{(r)}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}, t) &\equiv -\frac{\partial \theta}{\partial t} \\ &= \omega(\mathbf{k}^{(r)}) - \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{(r)}}{\partial t} \mathbf{x} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}^{(r)}} \frac{\partial \mathbf{k}^{(r)}}{\partial t} t \right) = \omega(\mathbf{k}^{(r)}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

ただし, 鞍点の関係式 (3.31) を用いた. このようにして定義された局所的な波数, 振動数もまた元の分散関係式 (3.15) を満たしていることに注意.

さて, ここで定義された局所的な波数 \mathbf{k} , 振動数 $\omega(\mathbf{k})$ の運動を考えてみよう. 鞍点の関係式 (3.31) を, ‘局所的な波数 \mathbf{k} を持った部分’, 時空のどの場所に存在しているかを示す方程式’ であるとみなす. (3.31) をすこし書きなおしてみると

$$\mathbf{x} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} t. \quad (3.42)$$

その様な部分は速度 $\partial \omega / \partial \mathbf{k}$ で進んでいることがわかる. 波数と振動数とは分散関係で結びつけられているので ‘局所的な波数 \mathbf{k} を持った部分’ を ‘局所的な振動数 $\omega(\mathbf{k})$ を持った部分’ と言い替えることもできる. この様にある決まった波数, 振動数を持つ部分は速度

$$\mathbf{c}_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \quad (3.43)$$

で進む. この \mathbf{c}_g を群速度と呼ぶ. 局所的な波数, 振動数は群速度という速度で伝わっていく, 逆に言うと, 群速度の速さによった座標系から観測すると波数, 振動数は一定に保たれるのである.

群速度は振幅 $A(\mathbf{x}, t)$ の運動にも直観的な意味付けを与える. 次のような積分量

$$Q(t) \equiv \int_{\delta x} A A^* d\mathbf{x} \quad (3.44)$$

を考察しよう. ただし δx は適当な微小領域である. A の表現 (3.38) を代入すれば

$$Q(t) = \int_{\delta x} d\mathbf{x} \Phi(\mathbf{k}^{(r)}) \Phi(\mathbf{k}^{(r)})^* \frac{(2\pi)^3}{t^3 |D^{(r)}|}.$$

(3.31) を使って積分変数を \mathbf{x} から $\mathbf{k}^{(r)} = \mathbf{k}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$ に変換すれば

$$Q(t) = (2\pi)^3 \text{sgn}(D^{(r)}) \int_{\delta \mathbf{k}^{(r)}} d\mathbf{k}^{(r)} \Phi(\mathbf{k}^{(r)}) \Phi(\mathbf{k}^{(r)})^*. \quad (3.45)$$

従って $\mathbf{k}^{(r)}$ 空間での微小領域 $\delta k^{(r)}$ が時間に依らないならば $Q(t)$ は時間に依らない一定値となることがわかる. ところが, 先の考察により, 群速度で移動する座標系にのれば波数は定数となる. 従って, 元の微小領域 δx を, その各点はその点に置ける局所波数に対応した群速度で移動するような領域からなるように選べば, 対応する $\mathbf{k}^{(r)}$ 空間での微小領域 $\delta k^{(r)}$ は時間に依らない. 以上をまとめると次の様になる.

‘構成する点とその点に置ける群速度ののって進むような境界に囲まれた領域で積分された量 AA^* は保存する.’

この意味で, 振幅 A も群速度 c_g で伝播するということができる.

振幅 A の表現 (3.38) に戻ってみれば, その時間に陽に依存する係数

$$\frac{1}{t^3 |D^{(r)}|} \tag{3.46}$$

は波が3次元空間を伝播する際に分散して広がって行くことに対応しているのである. 群速度が場所によって異なるので, その差に比例して群速度で進む境界で囲まれた微小領域の体積は時間の3乗で増大していく. 我々は, $|D^{(r)}| \neq 0$ なる条件, すなわち, (3.16) を課していたのであるが, この条件は解が十分に分散するという他に他ならない. 逆に言えば, 定数係数偏微分方程式では, 解が十分に分散すれば, ほとんど常に波型の解が得られるということになるのである.

もともと (3.15) のような関係式を分散関係式と呼ぶ由縁のものは解に関する以上のような情報, すなわち, 位相と振幅の動き = 波の分散を与えてくれるからなのであった.

3.3 定常強制力に対する応答の評価

3.3.1 問題の設定

定常的に単振動する強制力が働いている状況を考えよう. 前説と同様1つのモードのみを取り出して考えることにする. 強制力のフーリエ成分は

$$F(\mathbf{k}, t) = F_0(\mathbf{k})e^{-i\omega_0 t} \quad (3.47)$$

と表されている. したがって, 解の形式的な表現は, 初期値を 0 とすれば

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} \int_0^t dt' F_0(\mathbf{k}) e^{i(\omega(\mathbf{k}) - \omega_0)t'} \quad (3.48)$$

である. 漸近系をもとめようとする点の座標を $(x_1, 0, 0)$, $(x_1 > 0)$ となるように座標系を再定義することにすれば

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \int \int dk_1 dk_2 dk_3 e^{i(k_1 x_1 - \omega(\mathbf{k})t)} \int_0^t dt' F_0(\mathbf{k}) e^{i(\omega(\mathbf{k}) - \omega_0)t'} \quad (3.49)$$

である. このフーリエ積分を $t \rightarrow \infty$, $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ で漸近評価することにしよう (遠方近似ともいう).

3.3.2 評価の実行

t' に関する積分を実行する.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega_0 t} \int \int dk_2 dk_3 \int dk_1 F_0(\mathbf{k}) e^{ik_1 x_1} \frac{1 - e^{-i(\omega(\mathbf{k}) - \omega_0)t}}{i(\omega(\mathbf{k}) - \omega_0)} \quad (3.50)$$

結局この積分は $t \rightarrow \infty$ においては

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega_0 t} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int dk_2 dk_3 \int dk_1 F_0(\mathbf{k}) e^{ik_1 x_1} \frac{1}{i(\omega(\mathbf{k}) - \omega_0 - i\varepsilon)} \quad (3.51)$$

と同じことになる. このような置き換えを adiabatic switching という (極限操作のトリックはよくわからない).

さて, $x_1 > 0$ であるので k_1 に関する積分路は上半平面にとることにする. k_1 に関する積分の値は k_1 複素平面の上半平面内にある極の留数によって与えられる. 極のうち $\varepsilon \rightarrow 0$ に於て $\mathcal{I}_m k_1 \neq 0$ であるものは, 十分大きい x_1 に対してその寄与が無視できる. 積分の値に寄与するものは $\varepsilon \rightarrow 0$ に於て $\mathcal{I}_m k_1 = 0$, もともと k_1 平面の実軸上にあったものであることになる. すなわち,

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_1} > 0 \quad (3.53)$$

なる極の寄与のみを考えればよいことになる。群速度の意味付けを知っていればこのことは理解しやすい。 $\partial\omega/\partial k_1$ は x_1 方向の群速度に対応するのであるが、それが正ということは $+x_1$ 方向に進む波の寄与を考えることに対応する。群速度によって情報が伝えられるからである。

留数を計算することにより積分の値は次のようになる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) \sim e^{-i\omega_0 t} \int \int_{S^+} dk_2 dk_3 2\pi i \sum_j F_0(k_{1j}, k_2, k_3) e^{ik_{1j}x_1} \frac{1}{i \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_1} \right)_{k_1=k_{1j}}} \quad (3.54)$$

ただし、 j は異なる極を区別する番号である。また、 k_{1j} は

$$\omega(k_1, k_2, k_3) = \omega_0 \quad (3.55)$$

の解であり、従って k_2, k_3 の関数である。 S^+ として表された k_2, k_3 に関する積分領域は、(3.55) を満たす実3次元 \mathbf{k} 空間の曲面の $k_2 - k_3$ 平面への射影のうちの $\partial\omega/\partial k_1 > 0$ となる部分である。

k_2, k_3 に関する積分は k_{1j} を k_2, k_3 の関数とみて停留点の方法を用いることにより評価する。

$$\frac{\partial k_{1j}}{\partial k_2} = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial k_{1j}}{\partial k_3} = 0 \quad (3.57)$$

を満たす点を改めて $\mathbf{k}^{(r)}$ と書くことにしよう。

$$\frac{\partial k_{1j}}{\partial k_2} = -\frac{\partial\omega}{\partial k_2} / \frac{\partial\omega}{\partial k_1} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial k_{1j}}{\partial k_3} = -\frac{\partial\omega}{\partial k_3} / \frac{\partial\omega}{\partial k_1} \quad (3.59)$$

であることを思い出せば、 $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(r)}$ なる点は x_2, x_3 方向の群速度 $\partial\omega/\partial k_2, \partial\omega/\partial k_3$ が0であることを要請していることになる。

積分の評価は次のようになる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) \sim 4\pi^2 \sum_r \frac{F_0(\mathbf{k}^{(r)}) e^{ik_1^{(r)}x_1 - i\omega_0 t + i\frac{\pi}{4}(\text{sgn}K_2 + \text{sgn}K_3)}}{\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_1} \right)_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^{(r)}} x_1 \sqrt{K_2 K_3}}. \quad (3.60)$$

ただし

$$K_2 \equiv \left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial k_2^2} \right)_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^{(r)}} \quad (3.61)$$

$$K_3 \equiv \left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial k_3^2} \right)_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^{(r)}}. \quad (3.62)$$

座標を元に戻せば結局

$$\phi(\mathbf{x}, t) \sim 4\pi^2 \sum_r \frac{F_0(\mathbf{k}^{(r)}) e^{i\mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{x} - i\omega_0 t + i\frac{\pi}{4}(\text{sgn}K_2 + \text{sgn}K_3)}}{\left| \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right|^{(r)} |\mathbf{x}| \sqrt{K_2 K_3}}. \quad (3.63)$$

ω_0 で振動する強制力に対してその応答として点 \mathbf{x} で観測されるものはちょうど振動数 ω_0 を持ち群速度が波源から \mathbf{x} 方向を向いているものの重ね合わせである

第4章 波線理論 (WKBJ 近似)

前章では無限領域で定義されている定数係数線型偏微分方程式に限って、その波動解の存在と振舞いとを議論した。この章では、係数が定数とは限らないより一般的な線型偏微分方程式について、たとえ定義域が有限領域であっても困らないような波動理論、すなわち、波線理論を展開する。波線理論では線型方程式の解に波らしい形ものが存在することをあらかじめ設定し、その振舞いを近似的に求めていく。

4.1 波らしい解と波線理論での条件

4.1.1 線型方程式と波らしい解

ある物理現象を記述する線型方程式が与えられているものとしよう。適当に変数を消去することにより次のような1変数の方程式が得られているものとする：

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\phi = 0, \quad (4.1)$$

ここで関数 P は多項式であり、その係数は定数に限らない。以下では、微分方程式 (4.1) の波らしい解のふるまいを調べることにする。

第1章に述べたように波らしい解とは物理量 ϕ が振幅 A と位相 θ で次のように表現できる解のことである。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}, t)e^{i\theta(\mathbf{x}, t)} \quad (4.2)$$

方程式が線型であるので複素表示を用いている。通常、波らしい解を記述する際には、位相よりもその空間時間微分である局所的波数 \mathbf{k} 、局所的振動数 ω を用いることが多い。局所的波数、振動数の定義は次のように与えられるのであった。

$$\mathbf{k} \equiv \nabla\theta, \quad \omega \equiv -\frac{\partial\theta}{\partial t}. \quad (4.3)$$

4.1.2 波らしい解の条件

解 $\phi(\mathbf{x}, t)$ のうち (4.2) の形に書けるものが全て波らしい解として意味があるわけではないことに注意しておこう. 振幅 A , 波数 \mathbf{k} , 振動数 ω の空間時間変化が θ の空間時間変化よりもゆっくりであるものだけが意味のある波らしい解である. さもなくば‘波’として解を認識することができなくなり, 直感的な解の記述を得るという波動理論の目的にあわなくなってしまうからである. 実際数学的な定式化も, 以下で行なわれるように, 空間時間変化が θ の空間時間変化よりもゆっくりしているということを陽に使うて行くことになる. さて, 振幅 A , 位相 θ , 波数 k_i , 振動数 ω がゆっくり変化するという条件として定式化しておこう. 振幅, 位相, 波数, 振動数は

$$\left| \frac{dA}{A} \right| \ll |d\theta|, \quad (4.4)$$

$$\left| \frac{dk_i}{k_i} \right| \ll |d\theta|, \quad (4.5)$$

$$\left| \frac{d\omega}{\omega} \right| \ll |d\theta|, \quad (4.6)$$

を満たさなければならない.

A, \mathbf{k}, ω の変化のゆっくりさを表現するために, 微小なパラメター ε を用いてゆっくり変化する変数 \mathbf{X}, T を導入する.

$$\mathbf{X} \equiv \varepsilon \mathbf{x}, \quad T \equiv \varepsilon t, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4.7)$$

振幅, 位相について

$$A(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{X}, T), \quad (4.8)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{\Theta(\mathbf{X}, T)}{\varepsilon}, \quad (4.9)$$

と仮定すると, 解 (4.2) は

$$\phi = A(\mathbf{X}, T) e^{i\Theta(\mathbf{X}, T)/\varepsilon}, \quad (4.10)$$

となる. このとき位相の変化 $d\theta$ のオーダーは 1 であり, 振幅, 波数, 振動数の変化のオーダーは $O(\varepsilon)$ となり先の必要条件を満たす. 以下では (4.9) の形の解のみ考える.

4.1.3 場の緩やかな変化

一般に多項式 P は定係数である必要はない. 係数の変化が十分緩やかであれば, 一般的で有用な結果が得られる. 以下ではそのような場合のみを考えて, α_p の変化の程度が $O(\varepsilon)$ であることを要求する. すなわち α_p は \mathbf{X}, T の関数と仮定する.

$$\alpha_p(\mathbf{x}, t) = \alpha_p(\mathbf{X}, T). \quad (4.11)$$

4.2 漸近展開

微小量 ε で ϕ, P を展開し, 近似的に解を求める.

4.2.1 ε - 展開

振幅 A を ε について展開する.

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(\mathbf{X}, T) e^{i\Theta(\mathbf{X}, T)/\varepsilon}. \quad (4.12)$$

多項式も ε で展開する. 多項式 P の中で, ε^0 次のオーダーの量 α_p^0 を係数とする部分を P_0 , ε^1 次のオーダーの量 α_p^1 を係数とする部分を P_1, \dots とわけて

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_n, \quad (4.13)$$

とする.

4.2.2 $O(\varepsilon^n)$ の式

(4.12) の形の ϕ と (4.13) の形の P を (4.1) に代入し, ε の各オーダーでまとめることによって A, Θ に関する方程式を得る.

$O(\varepsilon^0)$ より,

$$P_0 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right) A_0 = 0,$$

$A_0 \neq 0$ として

$$P_0 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right) = 0. \quad (4.14)$$

これが Θ を求める方程式である.

$O(\varepsilon^1)$ より,

$$\begin{aligned} & P_0 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right) A_1 \\ & + \sum_{j=0}^3 \frac{\partial P_0 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right)}{\partial \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right)} \frac{\partial A_0}{\partial X_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sum_{l=0}^3 \frac{\partial^2 P_0 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right)}{\partial \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right) \partial \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial X_l} \right)} \frac{\partial^2 (i\Theta)}{\partial X_j \partial X_l} A_0 \\
& + P_1 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right) A_0 = 0.
\end{aligned}$$

ただし, $X_0 \equiv T$ とした. (4.14) を用いると

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^3 \frac{\partial P_0 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right)}{\partial \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right)} \frac{\partial A_0}{\partial X_j} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sum_{l=0}^3 \frac{\partial^2 P_0 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right)}{\partial \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial X_j} \right) \partial \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial X_l} \right)} \frac{\partial^2 (i\Theta)}{\partial X_j \partial X_l} A_0 \\
& + P_1 \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial T}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, i \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right) A_0 = 0. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

これが A_0 を求める方程式である. さらに高次の展開式を用いて A_1, A_2, \dots を順次求めていくことにより近似を高めることができる. 以下の議論では $O(\varepsilon^1)$ の式までを用いる.

4.2.3 局所的波数, 振動数を用いた表現

局所的波数, 振動数を用いて (4.14), (4.15) を表現する. 局所的波数, 振動数の定義 (4.3) より

$$k_i \equiv \frac{\partial(\theta/\varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial X_i}, \tag{4.16}$$

$$\omega \equiv -\frac{\partial(\theta/\varepsilon)}{\partial t} = -\frac{\partial \Theta}{\partial T}. \tag{4.17}$$

これらを用いて, (4.14), (4.15) を書きかえると,

$$P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) = 0, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^3 \frac{1}{i} \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j} \frac{\partial A_0}{\partial X_j} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sum_{l=0}^3 \frac{1}{i} \frac{\partial^2 P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j \partial k_l} \frac{\partial k_l}{\partial X_j} A_0 \\
& + P_1(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) A_0 = 0. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

4.2.4 波数の保存則

\mathbf{k}, ω は独立な量ではないことに注意しよう. (4.16) を T で微分し, (4.17) を X_i で微分して和をとると,

$$\frac{\partial k_i}{\partial T} + \frac{\partial \omega}{\partial X_i} = 0, \quad (4.20)$$

となる. これは, 波数の保存則を表す式である. (4.18), (4.19), (4.20) が位相関数 Θ 並びに 振幅 A_0 を決定するための方程式の完全な組となる.

4.3 $O(\varepsilon^0)$: 局所分散関係

$O(\varepsilon)$ の展開式 (4.19)

$$P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) = 0,$$

は場所 \mathbf{X} , 時間 T において \mathbf{k} と ω を結びつける式である. これを局所分散関係という¹. 多項式 P_0 の係数は, 一般に場所 \mathbf{X} と時間 T の関数であることに注意しよう.

4.3.1 波数, 振動数の保存

いま, この局所分散関係式 (4.19) が ω について,

$$\omega = \Omega(\mathbf{k}, X, T) \quad (4.21)$$

と, 解けるものと仮定する. (4.21) を (4.20) に代入すると

$$\frac{\partial k_i}{\partial T} + \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial k_j} \frac{\partial k_j}{\partial X_i} = 0,$$

ここで関係式

$$\frac{\partial k_j}{\partial X_i} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial k_i}{\partial X_j}$$

を用いると

$$\frac{\partial k_i}{\partial T} + \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial k_j} \frac{\partial k_i}{\partial X_j} = 0,$$

よって, 波数の変化を表す式は

$$\frac{\partial k_i}{\partial T} + c_{gj} \frac{\partial k_i}{\partial X_j} = -\frac{\partial \Omega}{\partial X_i}, \quad (4.22)$$

ただし

$$\mathbf{c}_g(\mathbf{k}, X, T) \equiv \frac{\partial \Omega(\mathbf{k}, X, T)}{\partial \mathbf{k}}.$$

¹一様な場での分散関係式は, 支配方程式において,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow ik_i$$

の置き換えを行えば得られた. 非一様媒質中においても, 同じ置き換えによって, 局所的な波数と局所的な振動数を結びつける関係式が得られることを (4.19) は示している.

\mathbf{c}_g を群速度という. (4.3.1) によって, 群速度とともに移動する系からみた波数の変化がもとまる.

特に X_i 方向に一様な場合, すなわち係数 α_p^0 が X_i によらない場合には $\frac{\partial \Omega}{\partial X_i} = 0$ であるから

$$\frac{\partial k_i}{\partial T} + \mathbf{c}_g \cdot \nabla k_i = 0. \quad (4.23)$$

このとき X_i 方向の波数が保存する.

同様に, 振動数の変化を表す式を求める. (4.21) の両辺を T で微分して

$$\frac{\partial \omega}{\partial T} = \frac{\partial \Omega}{\partial T} + \frac{\partial \Omega}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial T}.$$

ここで関係式

$$\frac{\partial k_i}{\partial T} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_i \partial T} = -\frac{\partial \omega}{\partial X_i}$$

を用いると

$$\frac{\partial \omega}{\partial T} + \frac{\partial \Omega}{\partial k_i} \frac{\partial \omega}{\partial X_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial T}$$

よって振動数の変化を表す式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial T} + c_{gi} \frac{\partial \omega}{\partial X_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial T} \quad (4.24)$$

(4.24) によって, 群速度とともに移動する系からみた振動数の変化がもとまる.

特に時間的に変化しない場では, $\frac{\partial \Omega}{\partial T} = 0$ であるから

$$\frac{\partial \omega}{\partial T} + c_{gi} \frac{\partial \omega}{\partial X_i} = 0 \quad (4.25)$$

このとき ω は群速度にのった系からみると保存する.

4.4 $O(\varepsilon^1)$: 振幅の方程式

4.4.1 保存則の導出

波数, 振動数の保存則を解き, $O(\varepsilon^1)$ の式 (4.19) に代入することにより, 振幅 A_0 を求めることができる. 特にもとの支配方程式

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\phi = 0$$

が, 自己随伴である時には, (4.19) は保存則の形に書ける. 以下, 支配方程式が自己随伴であると仮定して話を進める.

P が自己随伴であるとき P_0 と P_1 との関係は,

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{\partial P_0\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)} \Bigg|_{\{\alpha_p\}=\left\{\frac{\partial\alpha_p}{\partial X_j}\right\}}, \quad (4.26)$$

となる (Appendix). また, P_0 は偶数次のみ, または奇数次のみを含む. (4.26) の関係式を使うと, (4.19) は,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^3 \frac{1}{i} \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j} \frac{\partial A_0}{\partial X_j} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sum_{l=0}^3 \frac{1}{i} \frac{\partial^2 P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j \partial k_l} \frac{\partial k_l}{\partial X_j} A_0 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{1}{i} \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j} \Bigg|_{\{\alpha_p\}=\left\{\frac{\partial\alpha_p}{\partial X_j}\right\}} A_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

(4.27) の複素共役をとる. $P(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)$ が偶数次または奇数次のみを含むことに注意して,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^3 \frac{1}{i} \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j} \frac{\partial A_0^*}{\partial X_j} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sum_{l=0}^3 \frac{1}{i} \frac{\partial^2 P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j \partial k_l} \frac{\partial k_l}{\partial X_j} A_0^* \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{1}{i} \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j} \Bigg|_{\{\alpha_p\}=\left\{\frac{\partial\alpha_p}{\partial X_j}\right\}} A_0^* = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

(4.27)× A_0^* +(4.28)× A_0 を整理すると,

$$\sum_{j=0}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} \left\{ \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j} A_0 A_0^* \right\} = 0, \quad (4.29)$$

あるいは X_0 を T にもどして

$$\frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial \omega} A_0 A_0^* \right\} - \sum_{j=0}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} \left\{ \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial k_j} A_0 A_0^* \right\} = 0. \quad (4.30)$$

ところで, $P(-i\omega, ik, ik, ik) = 0$ の両辺を k_j で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial k_j} + \frac{\partial P_0}{\partial \omega} \frac{\partial \Omega}{\partial k_j} &= 0, \\ \frac{\partial P_0}{\partial k_j} &= -c_{gj} \frac{\partial P_0}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

これを (4.30) に代入して

$$\frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial \omega} A_0 A_0^* \right\} + \sum_{j=0}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} \left\{ c_{gj} \frac{\partial P_0(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3)}{\partial \omega} A_0 A_0^* \right\} = 0, \quad (4.31)$$

が得られる.

(4.31) で表されるような保存則は多くの物理系に現れる. 後に, ハミルトン関数を持つ物理系の一般的な特色として

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{E}{\omega} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} \left(c_{gj} \frac{E}{\omega} \right) = 0. \quad (4.32)$$

なる保存則が得られることを示す. E/ω を波の作用という. (4.32) は波の作用 $\frac{E}{\omega}$ の保存則といわれる. E は波のエネルギーであり振幅の2次の量である. 波の作用は群速度 \mathbf{c}_g で運ばれ, 場が変化していても, その変化がゆっくりでありさえすれば保存する.

4.5 APPENDIX:自己随伴方程式

$\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ に関する偏微分方程式

$$P[\phi(\{x_i\})] \equiv \sum a_p(\{x_i\}) D^p \phi(\{x_i\}) = 0, \quad (4.33)$$

を考える. ただし

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad D^p = \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$$

である. $P = 0$ に対して,

$$Q[\phi(\{x_i\})] \equiv \sum (-1)^{p_1+p_2+\dots+p_n} D^p \{a_p(\{x_i\}) \phi(\{x_i\})\} = 0, \quad (4.34)$$

となる微分方程式 $Q = 0$ を $P = 0$ に随伴な微分方程式という.

例えば

$$\alpha_1(x, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \alpha_2(x, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \alpha_3(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha_4(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \alpha_5(x, t) \phi = 0, \quad (4.35)$$

に対して随伴な微分方程式は

$$\frac{\partial^2 \alpha_1(x, t) \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2(x, t) \phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \alpha_3(x, t) \phi}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_4(x, t) \phi}{\partial x} + \alpha_5(x, t) \phi = 0, \quad (4.36)$$

である.

随伴な微分方程式が自分自身に等しいとき, その方程式を自己随伴な微分方程式という. ゆっくり変化する変数 $\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{x}, T = \varepsilon t$ で表される実係数 $\alpha_p(\mathbf{X}, T)$ を係数として持つ微分方程式 $P = 0$ が自己随伴であるときには次の事実が成り立つ.

$$P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{\partial P_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)} \Bigg|_{\{\alpha_p\} = \left\{ \frac{\partial \alpha_p}{\partial X_j} \right\}}, \quad (4.37)$$

かつ, P は偶数次のみまたは奇数次のみを含む. ただし, $P = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_n$ である.

4.5.1 証明

ある微分方程式 $P = 0$ に対して, その随伴な微分方程式を $Q = 0$ とする. P の中に含まれる α_p のかかった項が

$$\alpha_p \frac{\partial^{p_0+p_1+p_2+p_3}}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}} \phi$$

の形で入っているとす. このとき多項式 Q は

$$(-1)^{p_0+p_1+p_2+p_3} \frac{\partial^{p_0+p_1+p_2+p_3}}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}} (\alpha_p \phi)$$

という形ではいることになる. ところが, 係数 α はゆっくりとした変数 T, \mathbf{X} で表されるため

$$\frac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} = \varepsilon \frac{\partial \alpha_p}{\partial X_i}$$

となる. したがって Q の各項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{p_0+p_1+p_2+p_3}}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}} (\alpha_p \phi) &= \alpha_p \frac{\partial^{p_0+p_1+p_2+p_3}}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}} \phi \\ &+ \varepsilon \left\{ \frac{\partial \alpha_p}{\partial T} p_0 \frac{\partial^{p_0+p_1+p_2+p_3-1}}{\partial t^{p_0-1} \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}} \phi + \frac{\partial \alpha_p}{\partial X_1} p_1 \frac{\partial^{p_0+p_1+p_2+p_3-1}}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1-1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}} \phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha_p}{\partial X_2} p_2 \frac{\partial^{p_0+p_1+p_2+p_3-1}}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2-1} \partial x_3^{p_3}} \phi + \frac{\partial \alpha_p}{\partial X_3} p_3 \frac{\partial^{p_0+p_1+p_2+p_3-1}}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3-1}} \phi \right\} \\ &+ \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

と書ける.

ここで $P = 0$ が自己随伴な微分方程式であるとする. $P = 0$ と $Q = 0$ が等しいことから $O(\varepsilon^0)$ のオーダーより

$$P_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = C P_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Big|_{\{\alpha_p\} = \{(-1)^{p_1+\dots+p_n} \alpha_p\}}$$

ただし, C は p によらない定数である. これより

$$\begin{aligned} &P \text{ は偶数次のみを含み } C = 1, \\ \text{または} &P \text{ は奇数次のみを含み } C = -1 \end{aligned}$$

となる.

次に, $O(\varepsilon^1)$ のオーダーより

$$P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = C \left[-P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Big|_{\{\alpha_p\}=\{(-1)^{p_1+\dots+p_n}\alpha_p\}} + \sum_{j=0}^3 \frac{\partial P_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)} \Big|_{\{\alpha_p\}=\left\{(-1)^{p_1+\dots+p_n} \frac{\partial \alpha_p}{\partial X_j}\right\}} \right],$$

P_0 が偶数次のみを含むなら, P_1 は奇数次のみを含み

$$P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left[-P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + \sum_{j=0}^3 \frac{\partial P_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)} \Big|_{\{\alpha_p\}=\left\{\frac{\partial \alpha_p}{\partial X_j}\right\}} \right],$$

一方, P_0 が奇数次のみを含むなら, P_1 は偶数次のみを含み

$$P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = - \left[P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) - \sum_{j=0}^3 \frac{\partial P_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)} \Big|_{\{\alpha_p\}=\left\{\frac{\partial \alpha_p}{\partial X_j}\right\}} \right],$$

したがって, いずれにしても

$$P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{\partial P_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)} \Big|_{\{\alpha_p\}=\left\{\frac{\partial \alpha_p}{\partial X_j}\right\}}, \quad (4.38)$$

が成り立つ.

第5章 有用な定理

この章では線型波動理論にまつわる便利な定理をあげておくことにする.

5.1 Hayes の定理 : 保存則と群速度

以下の議論は Hayes (1977) に基づく.

5.1.1 仮定

次の3つの仮定をおく:

1. スカラー量 ε とベクトル量 \mathbf{F} が存在して, 保存則

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (5.1)$$

が成り立っている.

2. ε, \mathbf{F} はそれぞれ2つの場の量 (スカラー量とは限らない) の積として表されている.

$$\begin{array}{ll} \text{例 運動エネルギー} & \varepsilon = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ \text{光のエネルギーフラックス} & \mathbf{F} = \mathbf{H} \times \mathbf{E} \end{array}$$

3. 系は線型であり, ε, \mathbf{F} を構成する場の量は

$$Ae^{i\theta} \quad (5.2)$$

という形でかけている. θ は位相 (実関数) であり, 振動数 $\omega \equiv -\partial\theta/\partial t$ と波数 $\mathbf{k} \equiv \partial\theta/\partial\mathbf{x}$ との間には分散関係

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \quad (5.3)$$

が成り立っている.

5.1.2 Hayes の定理

上の仮定が成り立つとき次のことがいえる。

位相平均を $\tilde{}$ で表すことにすると。

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{c}_g \tilde{\varepsilon} \quad (5.4)$$

あるいは、保存則で書けば

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{c}_g \tilde{\varepsilon} = 0. \quad (5.5)$$

5.1.3 証明

ε を構成する 2 つの量を $ae^{i\theta}$, $be^{i\theta}$ とすると

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}(ae^{i\theta} + a^*e^{-i\theta^*})\frac{1}{2}(be^{i\theta} + b^*e^{-i\theta^*}) \\ &= \frac{1}{4}(abe^{2i\theta} + a^*b^*e^{-2i\theta^*} + (ab^* + a^*b)e^{i\theta-i\theta^*}). \end{aligned}$$

ただし、 $()^*$ は $()$ の複素共役を表す。とりあえず θ は複素数としておいておこう。結局 ε , \mathbf{F} は次のような形をしていることになる。

$$\varepsilon = \alpha e^{2i\theta} + \alpha^* e^{-2i\theta^*} + \tilde{\varepsilon} e^{i\theta-i\theta^*} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F} = \beta e^{2i\theta} + \beta^* e^{-2i\theta^*} + \tilde{\mathbf{F}} e^{i\theta-i\theta^*} \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

最後の項がそれぞれ $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mathbf{F}}$ として表されているのは、位相 θ の実部で平均 ($\mathcal{R}_e \theta = 0 \sim 2\pi$) をしたときに残る項に対応しているからである。

これらの表現を保存則に代入して見ると

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + 2i \frac{\partial \theta}{\partial t} \alpha + \nabla \cdot \beta + 2i \beta \cdot \nabla \theta \right) e^{2i\theta} \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha^*}{\partial t} - 2i \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \alpha^* + \nabla \cdot \beta^* - 2i \beta^* \cdot \nabla \theta^* \right) e^{-2i\theta^*} \\ &+ \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + i \frac{\partial(\theta - \theta^*)}{\partial t} \tilde{\varepsilon} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}} + i \tilde{\mathbf{F}} \cdot \nabla \theta - \theta^* \right) e^{i\theta-i\theta^*} = 0 \end{aligned}$$

波数, 振動数を使って書けば

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} - 2i\omega\alpha + \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} + 2i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k} \right) e^{2i\theta} \\ & + \left(\frac{\partial \alpha^*}{\partial t} + 2i\omega^*\alpha^* + \nabla \cdot \boldsymbol{\beta}^* - 2i\boldsymbol{\beta}^* \cdot \mathbf{k}^* \right) e^{-2i\theta^*} \\ & + \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} - i(\omega - \omega^*)\tilde{\varepsilon} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}} + i\tilde{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}^*) \right) e^{i\theta - i\theta^*} = 0 \end{aligned}$$

ここで, 位相 θ の実部を時空間の座標 (\mathbf{x}, t) とは独立な変数と見立てて平均をする, すなわち, 位相空間という仮想的な空間を持ってきてその空間で平均すると残るのは次の項だけである.

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} - i(\omega - \omega^*)\tilde{\varepsilon} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}} + i\tilde{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}^*) \right) e^{i\theta - i\theta^*} = 0 \quad (5.9)$$

上の操作では位相の微分すなわち振動数, 波数を位相とは独立な関数と見なすことに注意.

位相関数の虚部に注目する. 分散関係を満たす範囲で位相関数をどのように変更しても線型系の解になっていることに注意しよう. そのような操作によって振幅関数が満たすべき関係式がえられる. まず位相関数の虚部の 0 極限をとれば保存則 (5.9) は

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}} = 0 \quad (5.10)$$

を与える. これは位相平均した保存則である. これをもう一度 (5.9) に代入すれば

$$(\omega - \omega^*)\tilde{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}^*) = 0. \quad (5.11)$$

分散関係を使えば, 位相関数の虚部が小さいところでの評価は概ね

$$\begin{aligned} \omega - \omega^* & \sim \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} (\mathbf{k} - \mathbf{k}^*) \\ & = \mathbf{c}_g (\mathbf{k} - \mathbf{k}^*) \end{aligned} \quad (5.12)$$

であるので

$$(\mathbf{c}_g \tilde{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{F}}) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}^*) = 0. \quad (5.13)$$

どのような $\mathbf{k} - \mathbf{k}^*$ をとっても, すなわち, 位相関数をどのように動かしても, 振幅関数がこの関係式を満たさなければならないから

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{c}_g \tilde{\varepsilon}. \quad (5.14)$$

でなければならない.

第6章 平均変分原理

変分法を用いればより一般的に波動理論を整理することができる。

6.1 変分法の復習

系を記述する関数 ϕ が変分法によって決定される場合がある。そのような場合の手続きは次のようになっている。まずラグランジアン密度 $L = L(\phi, \phi_t, \phi_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ が与えられていなければならない。関数 ϕ は、このラグランジアン密度に対して作用積分

$$J = \int_R dt d\mathbf{x} L(\phi, \phi_t, \phi_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \quad (6.1)$$

の極値を与える関数として決定される:

$$\delta J = 0. \quad (6.2)$$

ただし、 R は時空間のある領域である。極値を与える関数を決定するために、関数を

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi \quad (6.3)$$

のように変化させて J の値を調べてみる。ただし、以下では、境界 ∂R では $\delta\phi = 0$ であるものとする¹。

$$\begin{aligned} \delta J &= J[\phi + \delta\phi] - J[\phi] \\ &= \int_R \{L(\phi + \delta\phi, \phi_t + \delta\phi_t, \phi_{\mathbf{x}} + \delta\phi_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) - L(\phi, \phi_t, \phi_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)\} \\ &\sim \int_R \{L_{\phi}\delta\phi + L_{\phi_t}\delta\phi_t + L_{\phi_{\mathbf{x}}}\delta\phi_{\mathbf{x}}\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

部分積分を行なえば

$$\delta J \sim \int_R \left\{ L_{\phi} - \frac{\partial}{\partial t} L_{\phi_t} - \nabla \cdot L_{\phi_{\mathbf{x}}} \right\} \delta\phi \quad (6.5)$$

¹実際には問題に応じてその境界条件にあわせなければならない。

任意の $\delta\phi$ に対して $\delta J = 0$ が成り立つためには

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{\phi_t} + \nabla \cdot L_{\phi \mathbf{x}} - L_{\phi} = 0 \quad (6.6)$$

これをオイラーラグランジュ方程式という。 ϕ はこの方程式を解くことにより得られる。系を記述する関数 ϕ が変分法によって決定されると称される場合とは ϕ を決定する方程式がオイラーラグランジュ方程式として与えられる場合のことである。

6.2 波らしい解

さて、 ϕ として波らしい形

$$\phi = A \cos \theta \quad (6.7)$$

を考察する。いつものように、 A, θ ともに \mathbf{x}, t の関数であり

$$\mathbf{k} = \nabla \theta \quad (6.8)$$

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (6.9)$$

により波数、振動数を定義する。例によって A 並びに \mathbf{k}, ω の変化は $1/|\mathbf{k}|, 1/\omega$ の時空間スケールでは十分穏やかであるものとする。

6.3 平均変分原理

ラグランジュ関数の表現を位相と振幅関数を用いて次のように書き換える。

$$L = L(\phi, \phi_t, \phi \mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = L(A, A_t, A \mathbf{x}, \theta, \mathbf{k}, \omega, \mathbf{x}, t) \quad (6.10)$$

変分をとる関数を ϕ から θ, A に変えるわけである。変分原理の主張するところによれば、いかなる関数で変分をとっても J は極値になっているはずであり、従って、それぞれの関数に関してオイラーラグランジュ方程式が成り立つ。

さらに一歩進んだ工夫を行なう。 θ の変化は極めて急なので L を θ で一周平均したとき他の変数 $(A, A_t, A \mathbf{x}, \mathbf{k}, \omega, \mathbf{x}, t)$ は一定であるとみなすことができる。作用積分の変分 δJ を計算するのではなく、その位相平均を変分しても極値を与える性質は変わらないであろう。かくして

$$\mathcal{L}(A, \mathbf{k}, \omega, \mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta L(A, A_t, A \mathbf{x}, \theta, \mathbf{k}, \omega, \mathbf{x}, t) \quad (6.11)$$

をラグランジアンとして変分を行なうことにするのである。ただし、ここで、 $A_t, A \mathbf{x}$ は $\omega A, \mathbf{k} A$ に比べて小さいものとして無視されている。

6.4 一般化分散関係

まず A についての変分を行なう. A に関するオイラーラグランジュ方程式は

$$\mathcal{L}_A = 0 \quad (6.12)$$

である. この式は, ω, \mathbf{k}, A の間の関係式を与える, 非線型まで拡張した意味での分散関係式である. 線型系を与えるラグランジアンは一般に振幅に関する 2 次の式

$$\mathcal{L}(A, \mathbf{k}, \omega, \mathbf{x}, t) = \mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{x}, t)A^2 \quad (6.13)$$

として与えられる. A に関するオイラーラグランジュ方程式は単純に

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{x}, t) = 0. \quad (6.14)$$

これは線型系の分散関係式に他ならない. ちなみに群速度は

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{k}}}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \omega}} \quad (6.15)$$

である.

6.5 波の作用とその保存則

θ に関するオイラーラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\theta t} + \nabla \cdot \mathcal{L}_{\theta \mathbf{x}} = 0. \quad (6.16)$$

波数, 振動数で書き換えると

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \nabla \cdot \mathcal{L}_\mathbf{k} = 0. \quad (6.17)$$

これは振幅関数 A を決定する方程式である. \mathcal{L}_ω を波の作用 (wave action) という. またこの方程式を波の作用の保存則という. 線型ならば

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{G}_\omega A^2) - \nabla \cdot (\mathcal{G}_\mathbf{k} A^2) = 0 \quad (6.18)$$

である. 群速度を使って書けば

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{G}_\omega A^2) + \nabla \cdot (\mathbf{c}_g \mathcal{G}_\omega A^2) = 0. \quad (6.19)$$

位相関数自体は分散関係と波数保存則を使った波線理論によって決定される.

6.6 エネルギー方程式

さて, 一般にエネルギー密度はラグランジュ密度のルジャンドル変換で与えられる. 今の場合には波のエネルギー密度と呼ばれそれは

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\equiv \theta_t \mathcal{L}_{\theta_t} + A_t \mathcal{L}_{A_t} - \mathcal{L} \\ &= \omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}\end{aligned}\tag{6.20}$$

である (ここでは $A_t \mathcal{L}_{A_t}$ を変化が遅いものとして無視していることに注意). 波の作用とエネルギーとの間の関係は

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{\mathcal{H} + \mathcal{L}}{\omega}\tag{6.21}$$

である. 線型の場合には $\mathcal{L} = 0$ であるので

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{\mathcal{H}}{\omega}.\tag{6.22}$$

ラグランジュ関数が時間を陽に含まないときにはエネルギー保存則が得られる. 実際 \mathcal{H} の時間微分を計算すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H} &= \frac{\partial}{\partial t} (\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) \\ &= \omega \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\omega \frac{\partial}{\partial t} \omega - \mathcal{L}_\omega \frac{\partial}{\partial t} \omega - \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{k} - \mathcal{L}_t \\ &= \omega \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{k}\end{aligned}$$

作用の保存則を用いれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H} &= \omega \nabla \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{k}} - \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{k} \\ &= \omega \nabla \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{k}} + \mathcal{L}_{\mathbf{k}} \nabla \omega \\ &= \nabla \cdot \omega \mathcal{L}_{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

従って

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H} - \nabla \cdot \omega \mathcal{L}_{\mathbf{k}} = 0.\tag{6.23}$$

これはエネルギー密度が保存することをいっている方程式である.

ラグランジュ関数が時間を陽に含むときには

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H} - \nabla \cdot \omega \mathcal{L}_{\mathbf{k}} = -\mathcal{L}_t.\tag{6.24}$$

となってエネルギー密度は保存しなくなるが, 作用保存則は成り立っていることに注意.

6.7 運動量の方程式

全く同様にして波の運動量密度がラグランジュ密度のルジャンドル変換で与えられる。今の場合

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &\equiv \theta_{x_i} \mathcal{L}_{\theta_{x_i}} + A_{x_i} \mathcal{L}_{A_{x_i}} - \mathcal{L} \\ &= k_i \mathcal{L}_{k_i} - \mathcal{L} \end{aligned} \quad (6.25)$$

ラグランジュ関数が座標 x_i を陽に含まないときには i 方向の運動量保存則が得られる。ラグランジュ関数が座標を陽に含むときには運動量保存則は得られないが作用保存則はやはり成り立っていることに注意。

6.8 線型でかつラグランジュ密度が座標, 時間によらない時

線型の場合には $\mathcal{L} = 0$ なので波の作用, エネルギー, 運動量は次のような関係で結ばれることになる:

$$\mathcal{P}_i = \frac{\mathcal{H}}{\omega} k_i \quad (6.26)$$

$$= \frac{\mathcal{H}}{c_i} \quad (6.27)$$

$$= \mathcal{L}_\omega k_i. \quad (6.28)$$

作用の保存則は次のように書くこともできる

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathcal{H}}{\omega} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{c}_g \frac{\mathcal{H}}{\omega} \right) = 0, \quad (6.29)$$

または,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathcal{P}}{k_i} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{c}_g \frac{\mathcal{P}}{k_i} \right) = 0. \quad (6.30)$$

文献

- Hayes, W.D., 1970 : Kinematic wave theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A320**, 209-226.
- Hayes, M., 1977 : A note on group velocity. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A354**, 533-535.
- Lighthill, J., 1965 : Group velocity. *J. Inst. Maths Applics.*, **1**, 1-28. [群速度の意味付けあれこれ. フーリエ積分の鞍点法を用いた評価法の解説]
- Lighthill, J., 1978 : *Waves in fluids*. Cambridge Univ. Press, 486pp.
- Whitham, G.B., 1979 : *Linear and nonlinear waves*. John Wiley and Sons, 636pp. [波動理論のきっちりとした教科書. 波線理論, WKBJ 法, 平均変分原理の解説が詳しい.]
- 犬井鉄郎, 1948 : 球関数, 円柱関数, 超幾何関数. 河出書房. [第二章].
- 寺沢寛一 (編), 1960 : 自然科学者のための数学概論 応用編. 岩波書店. [B 第二章].