ロスビー波 (2 次元非発散球面)

林 祥介

2024 年 11 月 23 日

目 次

1 支配方程式

1.1 球面 2 次元非発散方程式

支配方程式は次のように書きくだせる (Appendix 参照).

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial u}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi uv}{a} - 2\Omega\sin\phi v = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p + f_\lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial v}{\partial\phi} + \frac{\tan\phi u^2}{a} + 2\Omega\sin\phi u = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}p + f_\phi, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v = 0. \quad (3)$$

ただし,

[0]本編は/参照基礎/地球流体/線型波動/ロスビー波/ に位置するものである.

$(\lambda,\,\phi)$	(経度, 緯度),
$(u,\,v)$	速度 (東向き成分, 北向き成分)
Ω	系 (球殻) の自転角速度
a	球殻の半径
$(f_\lambda,\,f_\phi)$	外力, 粘性散逸項
p	圧力
ρ_0	密度 (定数)

適当な速度スケール U を導入することにより次のような無次元化をおこない, 世界を半径 1 の球面に規格化する:

速度スケール	U
空間スケール	a
時間スケール	$\dfrac{a}{U}$

規格化された方程式系は次のようになる:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t^*}u^* + \frac{u^*}{\cos\phi}\frac{\partial u^*}{\partial\lambda} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial\phi} - \tan\phi u^* v^* - 2\Omega^*\sin\phi v^* &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p^* + f_\lambda^*,\\
\frac{\partial}{\partial t^*}v^* + \frac{u^*}{\cos\phi}\frac{\partial v^*}{\partial\lambda} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial\phi} + \tan\phi u^{*2} + 2\Omega^*\sin\phi u^* &= -\frac{\partial}{\partial\phi}p^* + f_\phi^*,\\
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u^* + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v^* &= 0.
\end{aligned}
$$

ただし

Ω^*	$\equiv \Omega\dfrac{a}{U}$	無次元化された系の自転角速度,
p^*	$\equiv \dfrac{p}{\rho_0 U^2}$	無次元化された圧力,
$f^*_{[\lambda,\phi]}$	$\equiv f_{[\lambda,\phi]}\dfrac{a}{U^2}$	無次元化された外力.

$*$ を省略して書くことにすれば,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u + \left(u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + v\frac{\partial}{\partial\phi}\right)u - \tan\phi uv - 2\Omega\sin\phi v &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p + f_\lambda, \quad (4)\\
\frac{\partial}{\partial t}v + \left(u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + v\frac{\partial}{\partial\phi}\right)v + \tan\phi u^2 + 2\Omega\sin\phi u &= -\frac{\partial}{\partial\phi}p + f_\phi, \quad (5)\\
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v &= 0. \quad (6)
\end{aligned}
$$

粘性散逸項の表現例として, 通常の非発散歪みテンソルの表現を球面 2 次元化し

たものを用いれば

$$
\begin{aligned}
f_\lambda &= \nu\left[(\nabla_h^2+2)u - \frac{2\sin\phi}{\cos^2\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{u}{\cos^2\phi}\right], &(7)\\
f_\phi &= \nu\left[(\nabla_h^2+2)v + \frac{2\sin\phi}{\cos^2\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{v}{\cos^2\phi}\right]. &(8)
\end{aligned}
$$

詳細は Appendix を参照されたい.

1.2 流線関数と渦度方程式

(6) で記されるように非発散系を扱っているので 流線関数 ψ を導入する:

$$
\begin{aligned}
u &\equiv -\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, &(9)\\
v &\equiv \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}. &(10)
\end{aligned}
$$

相対渦度 ζ, 絶対渦度 q はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\zeta &\equiv \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi u)\\
&= \left[\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]\psi\\
&= \nabla_h^2\psi, &(11)\\
q &\equiv \zeta + 2\Omega\sin\phi &(12)
\end{aligned}
$$

となる. ただし, ∇_h^2 は球面上のラプラシアン,

$$
\nabla_h^2 \equiv \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (13)
$$

である.

運動方程式 (4), (5) から渦度方程式を導き, 流線関数を用いて表現すれば,

$$
\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2\psi - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\phi} + 2\Omega\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = f_q. \qquad (14)}
$$

ここで, f_q は外力, 粘性による渦度生成消滅項で

$$
f_q \equiv \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial f_\phi}{\partial\lambda} - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi f_\lambda}{\partial\phi} \qquad (15)
$$

である. 粘性散逸項の表現例として, 運動方程式での例に対応するものをあげておくと

$$f_q = \nu(\nabla_h^2 + 2)\nabla_h^2 \psi. \tag{16}$$

「+2」に注意 (Appendix を参照).

反対称作用素

$$J(X,Y) \equiv \frac{\partial X}{\partial \lambda}\frac{\partial Y}{\partial \phi} - \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\frac{\partial X}{\partial \phi} \tag{17}$$

を用いて記せば

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{1}{\cos\phi}J(\psi,\zeta) + 2\Omega\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = f_q, \tag{18}$$

あるいは,

$$\frac{\partial}{\partial t}q + \frac{1}{\cos\phi}J(\psi,q) = f_q. \tag{19}$$

2 保存則

2.1 角運動量保存則

運動方程式の λ 成分は角運動量保存則に他ならない. 角運動量 $(u+\Omega\cos\phi)\cos\phi$ が陽に現れる形で書き換えると

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+v\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\{(u+\Omega\cos\phi)\cos\phi\} = -\frac{\partial}{\partial\lambda}p+f_\lambda\cos\phi. \quad (20)$$

あるいはフラックス形で書いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(u\cos\phi)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(u^2\cos\phi)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\{v(u+\Omega\cos\phi)\cos^2\phi\}& \\ = -\frac{\partial}{\partial\lambda}p+f_\lambda\cos\phi.& \quad (21)\end{aligned}$$

渦度擾乱 (ロスビー波) による角運動量のやりとりを考えるために, 渦度を用いた表現に変形すれば[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}(u\cos\phi)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{u^2+v^2}{2}-(2\Omega\sin\phi+\zeta)v\cos\phi = -\frac{\partial}{\partial\lambda}p+f_\lambda\cos\phi. \quad (22)$$

東西平均 “$\overline{\quad}$” を

$$\overline{\quad} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\lambda \quad (23)$$

で定義すれば, 東西平均角運動量 (いわゆる角運動量) の保存則は[2]

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u}\cos\phi)-\overline{v\zeta}\cos\phi = \overline{f_\lambda}\cos\phi. \quad (24)}$$

[1]一般には

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(2\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\zeta})\times\boldsymbol{v}+\nabla\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{f}.$$

[2]このことは渦度方程式 (18) の東西平均を計算しても確かめられる. 実際

$$\begin{aligned}\overline{\zeta} &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\overline{u}\cos\phi}{\partial\phi}, \\ \overline{\frac{1}{\cos\phi}J(\psi,\zeta)} &= \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\overline{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\zeta}\right),\end{aligned}$$

角運動量流速の収束は

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\overline{(u+\Omega\cos\phi)v}\cos^2\phi) \quad = \quad -\overline{vq}\cos\phi \quad = \quad -\overline{v\zeta}\cos\phi \qquad (25)$$

であることに注意.

2.2 運動エネルギー保存則

運動エネルギー $(u^2+v^2)/2$ の保存則は運動方程式から直ちに得られる:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+v\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\frac{u^2+v^2}{2} \quad = \quad -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial up}{\partial\lambda}-\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi vp}{\partial\phi}+f_\lambda u+f_\phi v. \qquad (26)$$

あるいはフラックス形で書いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[u\frac{u^2+v^2}{2}\right]+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\cos\phi v\frac{u^2+v^2}{2}\right]& \\ = \quad -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial up}{\partial\lambda}-\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi vp}{\partial\phi}+f_\lambda u+f_\phi v.& \qquad (27)\end{aligned}$$

しかしながらこの形式はあまり用いられない. 通常は圧力 p を消去した形式が用いられる. 渦度方程式 (14) に ψ をかけて変形すれば

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2\right]+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[q\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\psi^2}{2}+\psi\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+\psi f_\phi\right] \\ &\qquad -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\cos\phi\left(q\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\psi^2}{2}-\psi\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+\psi f_\lambda\right)\right] \\ &= \quad -\frac{\partial\psi}{\partial\phi}f_\lambda+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}f_\phi \qquad (28)\end{aligned}$$

$$\overline{f_q} \quad = \quad -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\overline{f_\lambda}\cos\phi}{\partial\phi}$$

であるから, (18) の東西平均は

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\overline{u}\cos\phi}{\partial\phi}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\overline{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\zeta}\right) \quad = \quad -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\overline{f_\lambda}\cos\phi}{\partial\phi}.$$

極での境界条件を使って積分すれば

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u}\cos\phi)+\overline{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\zeta} \quad = \quad -\overline{f_\lambda}\cos\phi$$

これは (24) にほかならない.

2.3 エンストロフィー保存則

絶対エンストロフィー $q^2/2$ の保存則は渦度方程式 (19) に q をかけることにより直ちに得られる:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{q^2}{2} + u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{q^2}{2} + v\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{q^2}{2} \quad = \quad qf_q, \tag{29}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{q^2}{2} - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{q^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right] + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{q^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right] \quad = \quad qf_q. \tag{30}$$

相対渦度に対するエンストロフィー $\zeta^2/2$ で書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2} + u\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\zeta^2}{2} + v\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\zeta^2}{2} + 2\Omega\cos\phi v\zeta \quad = \quad \zeta f_q. \tag{31}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[u\frac{\zeta^2}{2} - 2\Omega\cos\phi\frac{u^2-v^2}{2}\right] + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\cos\phi v\frac{\zeta^2}{2} - 2\Omega\cos^2\phi uv\right] \quad = \quad \zeta f_q. \tag{32}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \Omega\cos\phi\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2 - \left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2\right\}\right] \\ + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{\zeta^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + 2\Omega\cos\phi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right] \quad = \quad \zeta f_q.\end{aligned} \tag{33}$$

2.4 その他の有用な保存則

角運動量保存則 (24) とエンストロフィー保存則 (31) を東西平均したものとを組み合わせ, $\overline{v\zeta}$ を消去すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{u}\cos\phi + \frac{\overline{\zeta^2}}{4\Omega}\right] + \frac{1}{\cos\phi}\overline{J(\psi, \frac{\zeta^2}{4\Omega})} \quad = \quad \frac{\overline{\zeta}}{2\Omega}f_q + \overline{f_\lambda}\cos\phi. \tag{34}$$

これはいわゆる擬角運動量の一種である (にちがいない).

2.5 カシミール

保存則をより一般的に導くためには, カシミール保存量を持ってきて議論するのがよい. ここでは (角) 運動量–カシミールの方法を用いて議論することにしよう.

3 線型, 弱非線形理論

3.1 展開

世界を軸対称な基本流 $\overline{U} = \overline{U}(\phi)$ と擾乱とにわけ, 擾乱を振幅展開する.

$$
\begin{aligned}
u &= \overline{U} + u' + u^{(2)} + \cdots, && (35)\\
v &= v' + v^{(2)} + \cdots, && (36)\\
\zeta &= \overline{Z} + \zeta' + \zeta^{(2)} + \cdots, && (37)\\
\psi &= \overline{\Psi} + \psi' + \psi^{(2)} + \cdots. && (38)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
\overline{U} &= -\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial \phi}, && (39)\\
u' &= -\frac{\partial \psi'}{\partial \phi}, \quad v' = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda}, && (40)\\
u^{(2)} &= -\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \phi}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \lambda}, && (41)\\
\cdots &,
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
\overline{Z} &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi\overline{U}) = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\phi}\right), && (42)\\
\zeta' &= \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v' - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi u') = \nabla_h^2\psi', && (43)\\
\zeta^{(2)} &= \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v^{(2)} - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi u^{(2)}) = \nabla_h^2\psi^{(2)}, && (44)\\
\cdots &
\end{aligned}
$$

である.

3.2 渦度方程式の振幅展開

渦度方程式 (18) の変数に振幅展開した表現を代入し各オーダーでまとめると次のようになる.

- 振幅の 1 次の方程式:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \zeta'}{\partial \lambda} + \frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = f'_q. \qquad (45)$$

ただし,

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &\equiv \frac{\partial}{\partial \phi}(2\Omega\sin\phi + \overline{Z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi}\left[2\Omega\sin\phi - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi\overline{U})\right] \\ &= 2\Omega\cos\phi - \frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi\overline{U})\right]. \qquad (46)\end{aligned}$$

- 振幅の 2 次の方程式:

$$\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial t} + \overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \lambda} + \frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos\phi}J(\psi', \zeta') = f_q^{(2)}. \qquad (47)$$

3.3 角運動量保存則の振幅展開

東西平均した角運動量保存則 (24) の変数に振幅展開した表現を代入し各オーダーでまとめると次のようになる.

- 振幅の 1 次の方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u'}\cos\phi) = \overline{f'_\lambda}\cos\phi. \qquad (48)$$

振幅の 1 次のオーダーでは角運動量は初期値と強制項 $\overline{f'_\lambda}$ の構造によって完全に決まってしまう (「流体力学的」変化をしない).

- 振幅の 2 次の方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u^{(2)}}\cos\phi) - \overline{v'\zeta'}\cos\phi = \overline{f_\lambda^{(2)}}\cos\phi. \qquad (49)$$

この表現をもって, $\cos\phi\overline{u^{(2)}}$ は 1 次の擾乱 ψ' (または ζ') を作るために必要な角運動量である, と解釈される.

もちろんこれらの表現は渦度方程式の振幅展開 (45), (47) の軸対象成分 (東西平均) をとっても直ちに得られる.

3.4 1 次の量に関する 2 次の保存則

1 次の渦度方程式 (45) を変形し, 1 次の量に関する 2 次の保存則を導く. (45) に ζ' をかけて

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta'^2}{2} + \overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\zeta'^2}{2} + \frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\zeta'\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} = \zeta' f'_q. \tag{50}$$

左辺第三項の主要部分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\zeta' &= \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\nabla\cdot_h(\nabla_h\psi) \\ &= \nabla\cdot_h\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\nabla_h\psi\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\nabla_h\psi'\right)^2\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta'^2}{2} + \overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\zeta'^2}{2} + \frac{\hat{\beta}}{\cos\phi}\left[\nabla\cdot_h\left(\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\nabla_h\psi\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\nabla_h\psi'\right)^2\right] = \zeta' f'_q \tag{51}$$

フラックス形式でそろえると

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\zeta'^2}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\right) + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\overline{U}\left(\frac{\zeta'^2}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\right) + \frac{1}{2}\cos\phi\left[\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\phi}\right)^2\right]\right\} \\ &\qquad + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos\phi\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi'}{\partial\phi}\right\} = \zeta' f'_q\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}.\end{aligned} \tag{52}$$

したがって

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\zeta'^2}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}, \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\equiv \left(\overline{U}\mathcal{A} + \frac{1}{2}\cos\phi\left[\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\phi}\right)^2\right], \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi'}{\partial\phi}\right) \\ &= \left(\overline{U}\mathcal{A} + \frac{1}{2}\cos\phi(v'^2 - u'^2), \cos\phi u'v'\right)\end{aligned} \tag{54}$$

を定義すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A} + \nabla\cdot_h\mathcal{F} = \frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\zeta' f'_q \tag{55}$$

である. なお, $\partial\overline{u^{(2)}}/\partial t$ を 2 次の微小量として無視すれば, $\mathcal{A}$ の定義の $\hat{\beta}$ の中にある $\overline{U}$ を東西流速の全量の平均 $\overline{u}$ に置きかえることができる.

3.5 擬角運動量

(50) の東西平均をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}} + \cos\phi\overline{v'\zeta'} = \frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\overline{\zeta' f_q'} \tag{56}$$

2 次の角運動量の式 (49) と組み合わせ, $v'\zeta'$ を消去すれば

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\cos\phi\overline{u^{(2)}} + \frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\right] = \cos\phi\overline{f_\lambda^{(2)}} + \frac{\cos\phi}{\hat{\beta}}\overline{\zeta' f_q'}} \tag{57}$$

これをもって

$$-\overline{\mathcal{A}} = -\frac{\overline{\zeta'^2}}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}} \tag{58}$$

を 1 次の擾乱の持つ擬角運動量という. $-\int\overline{\mathcal{A}}dS$ は擾乱 ζ' を生成せしめるために系に加えなければならない角運動量に他ならない.

なお, 表現 (57) と表現 (34) とは似て非なることに注意されたい. 角運動量に化けるべき量は, (34) では

$$-\frac{\overline{\zeta^2}}{2}\frac{1}{2\Omega} \tag{59}$$

であったが. (57) では

$$-\frac{\overline{\zeta^2}}{2}\frac{1}{2\Omega - \dfrac{1}{\cos\phi}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\dfrac{1}{\cos\phi}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\overline{U}} \tag{60}$$

である. 両者は $\overline{U} = 0$ の時のみ一致する. 両者の違いは基本場が何であるか, によっている. (34) では静止状態が基本場とみなされているわけである.

4 WKB

WKB 近似を行なえば, 線形化されたシステム (45) の, 波束としての解の振舞いを調べることができる. 以下, (45) の自由波動 ($f'_q = 0$ の場合) を考察してみよう.

4.1 展開

例によって次の形の解を求める[1].

$$\psi' = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(\lambda, \phi, t) e^{i\frac{\Theta((\lambda,\phi,t)}{\varepsilon}} \tag{61}$$

ε は適当な小さいパラメターである.

4.2 波数, 振動数

局所的な波数, 振動数は次のように定義される.

$$k \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}, \tag{62}$$

$$l \equiv \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}, \tag{63}$$

$$\omega \equiv -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial t}. \tag{64}$$

波数, 振動数は $O(\varepsilon^{-1})$ であることに注意.

波数, 振動数の定義によりただちに波数保存則と呼ばれる次のような関係が得られる:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda} = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}, \tag{65}$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi} = -\frac{\partial\omega}{\partial\phi}, \tag{66}$$

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial l}{\partial\lambda} = \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi} = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi k). \tag{67}$$

[1] ここでは, λ, ϕ, t をいわゆる遅い変数とみなしていることに注意. 場の, λ, ϕ, t で見た時空間的な変化の割合は, 波数, 振動数に比べて十分ゆっくりしているものとする. 言い替えると, 場の変量 X に対して

$$\left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right| \sim O(1), \quad \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\phi}\right| \sim O(1), \quad \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial t}\right| \sim O(1),$$

あるいは

$$\left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\lambda}\right| \ll k, \quad \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\phi}\right| \ll l, \quad \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial t}\right| \ll \omega$$

4.3 局所分散関係

線型化した渦度方程式 (45) に (61) を代入する.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} &= \left[\frac{i}{\varepsilon}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}A_0 + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda} + \cdots\right]e^{i\frac{\Theta}{\varepsilon}}, \\
\frac{\partial\psi'}{\partial\phi} &= \left[\frac{i}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial\phi} + \cdots\right]e^{i\frac{\Theta}{\varepsilon}}, \\
\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2\psi'}{\partial\lambda^2} &= \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{\cos^2\phi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\right)^2 A_0 + \frac{i}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\lambda^2}A_0 + \frac{2}{\cos^2\phi}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}\right) + \cdots\right]e^{i\frac{\Theta}{\varepsilon}}, \\
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\frac{\partial\psi'}{\partial\phi} &= \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\right)^2 A_0 + \frac{i}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\right)A_0 + 2\frac{\partial\Theta}{\partial\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\phi}\right) + \cdots\right]e^{i\frac{\Theta}{\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

などに注意して ε の各オーダーでまとめる.

局所分散関係は $O(\varepsilon^{-3})$ よりもとまる.

$$
\omega = \overline{U}k - \frac{\hat{\beta}k}{k^2 + l^2} \tag{68}
$$

$\hat{\beta}$ は $O(\varepsilon^{-2})$ と見なしていることに注意.

4.4 波線方程式

局所的波数, 振動数の変化の式は, 波数保存則 (65) $\sim$ (67) に分散関係 (68) を用いることにより得られる. 分散関係式を

$$
\omega = \tilde{\omega}(k\cos\phi, l; \lambda, \phi) \tag{69}
$$

と見なせば,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} &= -\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} \\
&= -\frac{1}{\cos\phi}\left[\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\lambda} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\lambda}\right] \\
&= -\frac{1}{\cos\phi}\left[\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\lambda},\right] \\
\frac{\partial l}{\partial t} &= -\frac{\partial\omega}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left[\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\phi}\right] \\
&= -\left[\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial l}{\partial\lambda} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\phi},\right] \\
\frac{\partial\omega}{\partial t} &= \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} - \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l}\frac{\partial\omega}{\partial\phi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

したがって群速度 $c_{g\lambda}, c_{g\phi}$ を

$$
c_{g\lambda} \equiv \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial k\cos\phi}\cos\phi \tag{70}
$$

$$
c_{g\phi} \equiv \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial l} \tag{71}
$$

で定義すれば,

$$
\frac{\partial k\cos\phi}{\partial t} + c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\lambda} + c_{g\phi}\frac{\partial k\cos\phi}{\partial\phi} = -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\lambda}, \tag{72}
$$

$$
\frac{\partial l}{\partial t} + c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial l}{\partial\lambda} + c_{g\phi}\frac{\partial l}{\partial\phi} = -\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\phi}, \tag{73}
$$

$$
\tag{74}
$$

$$
\frac{\partial\omega}{\partial t} + c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + c_{g\phi}\frac{\partial\omega}{\partial\phi} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}, \tag{75}
$$

となる.

群速度の具体的な表現は

$$
c_{g\lambda} = \overline{U} + \frac{\hat{\beta}(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \tag{76}
$$

$$
c_{g\phi} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2}. \tag{77}
$$

4.5 wave action 保存則

振幅 A_0 に関する情報は ε 展開の $O(\varepsilon^{-2})$ よりもとまる. 線型化した渦度方程式 (45) に (61) を代入した結果の $0(\varepsilon^{-2})$ の式は

$$
[(-i\omega + ik\overline{U})\{-(k^2 + l^2)\} + ik\hat{\beta}]A_1
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial \lambda}\right)\left[(k^2+l^2)A_0\right] \\
&+2(\omega-\overline{U}k)\left(k\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}+l\frac{\partial A_0}{\partial\phi}\right)+(\omega-\overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial\phi}\right)A_0 \\
&+\hat{\beta}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda} \qquad = \quad 0.
\end{aligned}
$$

A_1 の係数は局所的分散関係 (68) より 0 となる. 残りの項は A_0 とその微分についてそれぞれまとめると

$$
\begin{aligned}
&-(k^2+l^2)\frac{\partial A_0}{\partial t} \\
&+\{-(k^2+l^2)\overline{U}+2(\omega-\overline{U}k)k+\hat{\beta}\}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda} \\
&+2(\omega-\overline{U}k)l\frac{\partial A_0}{\partial\phi} \\
&+\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(k^2+l^2)+(\omega-\overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l}{\partial\phi}\right)\right\}A_0=0.
\end{aligned}
\tag{78}
$$

ここで次のように定義される多項式 $P=P(k,l,\omega)$ を導入する.

$$
P\equiv(\omega-\overline{U}k)(k^2+l^2)+\hat{\beta}k. \tag{79}
$$

$P=0$ は分散関係に他ならない.

$O(\varepsilon^{-2}$ の式 (78) を P をつかって簡略に表記する. (78) 式の $\frac{\partial A_0}{\partial t},\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda},\frac{\partial A_0}{\partial\phi}$ の係数に注目するとそれぞれ $-\frac{\partial P}{\partial\omega},\frac{\partial P}{\partial k},\frac{\partial P}{\partial l}$ に対応するので (78) 式は単純に

$$
-\frac{\partial P}{\partial\omega}\frac{\partial A_0}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial P}{\partial l}\frac{\partial A_0}{\partial\phi}+DA_0 \quad = \quad 0. \tag{80}
$$

と記される. ただし D は

$$
D \quad \equiv \quad -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(k^2+l^2)+(\omega-\overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial\phi}\right)
$$

である.

係数は, さらに群速度をもちいて書き直すことができる. 群速度 $\boldsymbol{c}_g$ を P で表わすと,

$$
dP=\frac{\partial P}{\partial k}dk+\frac{\partial P}{\partial l}dl+\frac{\partial P}{\partial\omega}d\omega=0
$$

より,

$$
\begin{aligned}
c_{g\lambda} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_l = -\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^{-1} \\
c_{g\phi} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial l}\right)_K = -\left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

したがって $O(\varepsilon^{-2})$ の式 (80) は結局

$$
-\frac{\partial P}{\partial \omega}\left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial \lambda} + c_{g\phi}\frac{\partial A_0}{\partial \phi}\right) + DA_0 = 0. \tag{81}
$$

さて, D を整理しよう. $\hat{\omega} \equiv \omega - \overline{U}k$ を導入する. $\hat{\omega}$ はシアー流のないときの分散関係から求められる振動数に等しい. また, 流れにのった群速度

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_{g\lambda} &\equiv \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial k} = \frac{\hat{\beta}(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \\
\hat{c}_{g\phi} &\equiv \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial l} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2} = c_{g\phi},
\end{aligned}
$$

を定義しておく. すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial \phi} &= \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}k}\right\} \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} - c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}k^2}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial \cos\phi k}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} - \frac{l}{k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial l}{\partial \lambda} \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} - \frac{1}{k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{l^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
&(\omega - \overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial \phi}\right) \\
&\quad= \hat{\omega}\left[\frac{1}{k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{k^2}{2}\right) + \frac{1}{k}\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} - \frac{1}{k}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{l^2}{2}\right)\right] \\
&\quad= \frac{\hat{\omega}}{k}\left[\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{k^2 - l^2}{2}\right) + \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\}\right] \\
&\quad= -\frac{\hat{\beta}}{k^2+l^2}\left[\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\hat{c}_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\} + \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat{\beta}}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

これらより D は

$$
\begin{aligned}
D &= -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(k^2+l^2)+(\omega-\overline{U}k)\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial k}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial(\cos\phi l)}{\partial\phi}\right)\\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{U}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)(k^2+l^2)\\
&\quad -\frac{\hat\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\hat c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right]\\
&= -\frac{\hat\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\overline{U}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right)\right.\\
&\qquad +\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\hat c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\\
&\qquad \left.+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right]\\
&= -\frac{\hat\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right.\\
&\qquad \left.+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

D の表現をつかって $O(\varepsilon^{-2})$ の式 (81) を書き直せば

$$
\begin{aligned}
&-(k^2+l^2)\left(\frac{\partial A_0}{\partial t}+c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\lambda}+c_{g\phi}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial A_0}{\partial\phi}\right)\\
&-\frac{\hat\beta A_0}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right.\\
&\qquad \left.+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}+\frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right]=0
\end{aligned}
$$

となる.

さらに変形を続けると保存形を導くことができる. 上式に $\dfrac{k^2+l^2}{\hat\beta}A_0\cos\phi$ をかければ

$$
\begin{aligned}
&\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi}{2\hat\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c_{g\lambda}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+c_{g\phi}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)A_0^2\\
&+A_0^2\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi}{2\hat\beta}\right\}\right.\\
&\qquad \left.+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi}{2\hat\beta}\right\}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos^2\phi c_{g\phi}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\hat\beta}\right\}\right]=0
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{c_{g\lambda}\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\cos\phi c_\phi\frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}\right\} = 0. \tag{82}$$

$\dfrac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{2\hat{\beta}}$ は波束についての保存量となる.

(82) は, 実は (55) に他ならない. 実際, WKB 近似の範囲では,

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{A}\rangle &= \frac{\langle\zeta'^2\rangle}{2}\frac{\cos\phi}{\hat{\beta}} \\ &= \frac{(k^2+l^2)^2\cos\phi A_0^2}{4\hat{\beta}} \qquad (83)\\ \langle\mathcal{F}\rangle &= \left(\overline{U}\langle\mathcal{A}\rangle + \frac{1}{2}\cos\phi(\langle v'^2\rangle - \langle u'^2\rangle), \cos\phi\langle u'v'\rangle\right) \\ &= \left(\overline{U}\langle\mathcal{A}\rangle + \hat{c}_{g\lambda}\langle\mathcal{A}\rangle, \hat{c}_{g\phi}\langle\mathcal{A}\rangle\right) \qquad (84) \end{aligned}$$

である. ただし $\langle X\rangle$ は位相平均

$$\langle X\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X d\frac{\Theta}{\varepsilon}$$

であり, したがって, 例えば

$$\begin{aligned} \langle\psi'^2\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{A_0 e^{i\Theta/\varepsilon} + A_0 e^{-i\Theta/\varepsilon}}{2}\right)^2 d\frac{\Theta}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\left(A_0^2 e^{2i\Theta/\varepsilon} + 2A_0^2 + A_0^2 e^{-2i\Theta/\varepsilon}\right) d\frac{\Theta}{\varepsilon} \\ &= \frac{A_0^2}{2} \end{aligned}$$

表現を変えておこう.

$$\frac{k\langle E\rangle}{\hat{\omega}} = \frac{(k^2+l^2)^2 A_0^2}{4\hat{\beta}}$$

であるから (82) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k\cos\phi\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(c_{g\lambda}\frac{k\cos\phi\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi c_{g\phi}\frac{k\cos\phi\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)=0. \tag{85}$$

系が λ に依存せず, 従って, 波数保存則 (72) により $k\cos\phi$ が保存される場合には, $k\cos\phi$ を消去して

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(c_{g\lambda}\frac{\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi c_{g\phi}\frac{\langle E\rangle}{\hat{\omega}}\right)=0. \qquad (86)}$$

これが球面上のロスビー波の wave action (波の作用) 保存則である.

5　WKB 近似で記述される球面伝播

5.1　波数, 振動数の振舞い

基本場 $\overline{U}$ は ϕ にのみ依存するものとしているので, 分散関係は λ, t を陽には含まない. したがって, 波束は $\omega, k\cos\phi, \dfrac{\langle E\rangle}{\hat{\omega}}$ を 保存しながら伝播してゆく. l は分散関係より

$$l^2 = -\frac{\hat{\beta}k}{\hat{\omega}} - k^2 = \frac{\hat{\beta}}{\overline{U}-c} - k^2 \tag{87}$$

を満たしながら変化してゆく.

5.2　臨界緯度 (critical latitude)

$\hat{\omega} \to 0$ となる臨界緯度 ϕ_c に近づくにつれて $l \to \infty$ となる. また群速度 $c_{g\phi}$ は

$$c_{g\phi} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2+l^2)^2} \longrightarrow 0 \tag{88}$$

となる. エネルギー $\displaystyle\int \langle E\rangle dV$ も 0 に近づいてゆく.

ロスビー波の波束が臨界緯度に近付くことは, WKB 近似の範囲では, できない. 実際,

$$\begin{aligned}
\hat{\omega} &\sim -k\overline{U}_\phi(\phi_c)(\phi-\phi_c) \\
l^2 &= -\frac{\hat{\beta}k}{\hat{\omega}} - k^2 \\
&\sim \frac{\hat{\beta}}{\overline{U}_\phi}\frac{1}{\phi-\phi_c} \\
c_{g\phi} &= \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2+l^2)^2} \\
&\sim 2\hat{\beta}k\left(\frac{\hat{\beta}}{\overline{U}_\phi}\frac{1}{\phi-\phi_c}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\propto (\phi_c-\phi)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

であるから, $\phi=\phi_1$ から $\phi=\phi_2$ まで波束が伝搬するのに要する時間 T は

$$T = \int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{d\phi}{c_{g\phi}} \propto \frac{1}{\sqrt{\phi_c-\phi_2}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_c-\phi_1}}$$

$\phi_2 \to \phi_c$ のとき $T \to \infty$ となり波束は臨界緯度に達することができない.

波束の伝播から臨界緯度付近の振舞いを考えたが, ロスビー波の場合はこの議論は正しくない. 臨界緯度付近では, ϕ 方向の波長程度で l が大きく変化するので波束の形 (61) として表せないからである.

波長 $\dfrac{2\pi}{l}$ と波長の変化するスケール $\left(\dfrac{1}{l}\dfrac{dl}{d\phi}\right)^{-1}$ の比は

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{l}\left(\frac{1}{l}\frac{dl}{d\phi}\right)\right| &= \left|\frac{1}{l^2}\frac{dl}{d\phi}\right| = \frac{\hat{\beta}\overline{U}_\phi}{(\overline{U}-c)^2}\cdot\left[\frac{\hat{\beta}}{(\overline{U}-c)}-k^2\right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\hat{\beta}\overline{U}_\phi}{(\overline{U}-c)^{\frac{3}{2}}\{\hat{\beta}-k^2(\overline{U}-c)\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

臨界緯度付近では $\overline{U}-c\to 0$ となり, この比が大きくなってしまう.

5.3　剛体回転している基本場上の伝搬

基本場 $\overline{U}$ が剛体回転している場合,

$$\overline{U} = \tilde{\Omega}\cos\phi, \tag{89}$$

$$\hat{\beta} = 2\Omega\cos\phi + +\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\overline{U} = 2(\Omega+\tilde{\Omega})\cos\phi, \tag{90}$$

にはロスビー波の伝搬特性についてさらに多くのことが語れる.

剛体回転場においては, 波数, 振動数の波に沿っての, すなわち, 群速度で移動する系で見た変化は次のように非常に単純になる:

$$\begin{aligned}\omega &= \text{const.}, \\ k &\propto 1/\cos\phi, \\ \hat{\omega} &= \omega-\overline{U}k = \text{const.}, \\ c &= \frac{\omega}{k} \propto \cos\phi, \\ k^2+l^2 &= \frac{\hat{\beta}}{\overline{U}-c} = \text{const.}\end{aligned}$$

したがって, 群速度の表現 (76), (77) を

$$c_{g\lambda} = \overline{U}+\frac{\hat{\beta}(k^2-l^2)}{(k^2+l^2)^2} = c+\frac{2\hat{\omega}^2}{\hat{\beta}}, \tag{91}$$

$$c_{g\phi} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2+l^2)^2} = \frac{2l\hat{\omega}^2}{k\hat{\beta}} \tag{92}$$

と書きかえれば, 波に沿って群速度の大きさは一定,

$$
\begin{aligned}
(c_{g\lambda}-c)^2+c_{g\phi}^2 &= \left(\frac{2\hat{\omega}^2}{\hat{\beta}}\right)^2\frac{k^2+l^2}{k^2} \\
&= \text{const.} \qquad (93)
\end{aligned}
$$

であることがわかる.

さらに, 東西方向の位相速度 c で運動している系, すなわち, $c/\cos\phi$ で剛体回転している系 (λ',ϕ) で見れば, 波線を求めることができる.

$$
\frac{1}{\cos\phi}\frac{d\phi}{d\lambda'} \equiv \frac{c_{g\phi}}{c_{g\lambda}-c} = \frac{l}{k}.
$$

すでに見たように全波数は波に沿って保存するので, これを, K と書くことにすれば,

$$
K^2 \equiv k^2+l^2 = -\frac{k\hat{\beta}}{\hat{\omega}}. \qquad (94)
$$

したがって, 波線の式は

$$
\frac{1}{\cos\phi}\frac{d\phi}{d\lambda'} = \frac{\sqrt{K^2-k^2}}{k}
$$

赤道 $\phi=0$ 上で波数ベクトル (k,l) の k 方向となす角を α とすれば, 波線に沿っての k の ϕ 依存性は

$$
k = \frac{K\cos\alpha}{\cos\phi}
$$

と書けるから

$$
\frac{1}{\cos\phi}\frac{d\phi}{d\lambda'} = \sqrt{\tan^2\alpha-\tan^2\phi}\cos\phi.
$$

これはたやすく積分できて波線の式は次のように与えられる.

$$
\tan\alpha\sin(\lambda'-\lambda'_{eq}) = \tan\phi. \qquad (95)
$$

λ'_{eq} は $\phi=0$ での経度である. この式は球面上の大円の式に他ならない.

剛体回転する基本場の上を伝搬する球面上のロスビー波の波線は, 東西方向に $c/\cos\phi$ で剛体回転している系 (λ',ϕ) で見れば, 大円を描く

というわけである.

A 球面座標

A.1 座標系と単位ベクトル

座標と対応する単位ベクトルを次のようにとることにする (図 A.1 参照[1]).

$$
\begin{array}{llll}
\lambda & \boldsymbol{e}_\lambda & \text{経度} & (0 \sim 2\pi) \\
\phi & \boldsymbol{e}_\phi & \text{緯度} & (-\pi/2 \sim \pi/2) \\
r & \boldsymbol{e}_r & \text{動系} &
\end{array}
$$

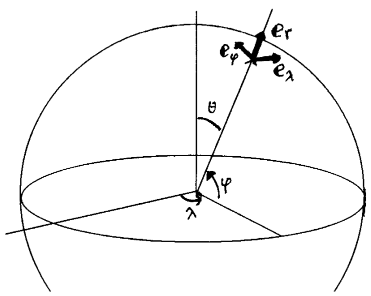

図 A.1 緯度経度球座標系

3 次元ユークリッド空間にうめこまれた状況なので

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_\lambda \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}, \tag{96}
$$

あるいは

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\phi\cos\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi\sin\lambda \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_\lambda \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_r \end{pmatrix}. \tag{97}
$$

[1] 注意. 余緯度 $\theta \equiv \pi/2 - \phi$ と緯度 ϕ との関係は次の通り.

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \cos\phi \\
\frac{\partial}{\partial\theta} &= -\frac{\partial}{\partial\phi} \\
A_\theta &= -A_\phi \\
\boldsymbol{e}_\theta &= -\boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned}
$$

ただし, A_θ, A_ϕ はベクトルの成分である.

A.2 単位ベクトルの微分

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\lambda\\ \boldsymbol{e}_\phi\\ \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi - \cos\phi\boldsymbol{e}_r\\ -\sin\phi\boldsymbol{e}_\lambda\\ \cos\phi\boldsymbol{e}_\lambda\end{pmatrix}, \tag{98}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\lambda\\ \boldsymbol{e}_\phi\\ \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{e}_\phi\end{pmatrix}, \tag{99}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\lambda\\ \boldsymbol{e}_\phi\\ \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} = 0. \tag{100}$$

A.3 微分演算子

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}, \tag{101}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= \left(\boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(v_\lambda\boldsymbol{e}_\lambda + v_\phi\boldsymbol{e}_\phi + v_r\boldsymbol{e}_r)\\ &= \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\lambda + \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r),\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v} &= \left(\boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\times(v_\lambda\boldsymbol{e}_\lambda + v_\phi\boldsymbol{e}_\phi + v_r\boldsymbol{e}_r)\\ &= \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}v_r - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi)\right]\\ &\quad +\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\lambda) - \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_r\right]\\ &\quad +\boldsymbol{e}_r\frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\phi - \frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\lambda)\right],\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \nabla\cdot\nabla f\\ &= \left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]f\\ &= \left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\right]f\\ &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right]f + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}f,\\ &\qquad (\mu = \sin\phi),\end{aligned} \tag{104}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{A} &= \left(\frac{v_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(A_\lambda\boldsymbol{e}_\lambda+A_\phi\boldsymbol{e}_\phi+A_r\boldsymbol{e}_r)\\
&= \boldsymbol{e}_\lambda\left[\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_\lambda-\frac{\tan\phi}{r}v_\lambda A_\phi+\frac{1}{r}v_\lambda A_r\right]\\
&\quad +\boldsymbol{e}_\phi\left[\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_\phi+\frac{\tan\phi}{r}v_\lambda A_\lambda+\frac{1}{r}v_\phi A_r\right]\\
&\quad +\boldsymbol{e}_r\left[\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_r-\frac{1}{r}v_\lambda A_\lambda-\frac{1}{r}v_\phi A_\phi\right], \qquad (105)\\
\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{e}_\lambda\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi v_\lambda}{\partial\phi}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 rv_\lambda}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda}\right)\right]\\
&\quad +\boldsymbol{e}_\phi\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 rv_\phi}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\cos\phi v_\lambda}{\partial\phi}\right]\\
&\quad +\boldsymbol{e}_r\left[-\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\lambda^2}-\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial rv_\lambda}{\partial r}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial rv_\phi}{\partial r}\right)\right] \qquad (106)
\end{aligned}
$$

注意: 球面上の座標を張ることに存在する条件である. スカラー関数が座標上の極 ($\phi=\pm\pi/2$) で特異でない条件をつけることが必要になる場合が多い. 例えば

$$\left.\frac{\partial^n f}{\partial\lambda^n}\right|_{\phi=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (n=1,2,3,\cdots), \qquad (107)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\phi}\int fe^{-im\lambda}\,d\lambda\right|_{\phi=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \qquad (m\neq 1). \qquad (108)$$

後者は波数 1 のもの以外は極において緯度方向 (ϕ 方向) 微分を持ってはいけないということである[2].

A.4 球面上の面積分

面積分:

$$\int dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\phi\int_0^{2\pi}r^2\cos\phi d\lambda = \int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}r^2 d\lambda. \qquad (109)$$

[2] f が C^{-n} 級である, すなわち, ∂_x, ∂_y の作用に関して滑らかであることを要請すればこのような条件が適宜得られる. よく使うのは $\nabla^2 f$ を勘定してみることである.

部分積分. A, B を球面上の滑らかな関数とすれば

$$\int A\nabla^2 B dS \ = \ -\int \nabla A\cdot\nabla B dS \ = \ \int \nabla^2 A\cdot B dS, \tag{110}$$

$$\int A\frac{\partial B}{\partial\lambda}dS \ = \ -\int \frac{\partial A}{\partial\lambda}B dS. \tag{111}$$

A.5 連続の式

連続の式の極座標表示は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\rho v_\lambda+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi\rho v_\phi+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}r^2\rho v_r \ = \ 0. \tag{112}$$

A.6 ナビエストークス方程式

回転系のナビエストークス方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} \ = \ -\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{113}$$

ただし

$$\nabla^2\boldsymbol{v} \ \equiv \ \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}. \tag{114}$$

これを極座標表示すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_\lambda+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_\lambda+\frac{1}{r}(v_r v_\lambda-v_\phi v_\lambda\tan\phi)-2\Omega\sin\phi v_\phi+2\Omega\cos\phi v_r\\
&\qquad = \ -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p\\
&\qquad\quad +\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\phi^2}-\frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_\lambda}{\partial r^2}\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda}-\frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda}-\frac{v_\lambda}{r^2\cos^2\phi}\right],
\end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_\phi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_\phi+\frac{1}{r}(v_r v_\phi+v_\lambda^2\tan\phi)+2\Omega\sin\phi v_\lambda\\
&\qquad = \ -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}p\\
&\qquad\quad +\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2}-\frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_\phi}{\partial r^2}\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}-\frac{v_\phi}{r^2\cos^2\phi}\right],
\end{aligned} \tag{116}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_r+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_r-\frac{1}{r}(v_\lambda^2+v_\phi^2)-2\Omega\cos\phi v_\lambda$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}p \\
&\quad +\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\phi^2}-\frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_r}{\partial r^2}\right. \\
&\quad \left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{2\tan\phi v_\phi}{r^2}-\frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{2v_r}{r^2}\right]. \qquad (117)
\end{aligned}
$$

ただし, 極座標の極は系の回転軸と一致するように選んである.

A.7 参考：歪テンソル

曲線直行座標系では歪みテンソルは

$$
e_{\xi\eta} = \boldsymbol{e}_\xi\cdot(\boldsymbol{e}_\eta\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}_\eta\cdot(\boldsymbol{e}_\xi\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \qquad (118)
$$

で与えられる. ξ,η に λ,ϕ,r を代入して

$$
\begin{aligned}
e_{\lambda\lambda} &= \frac{2}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{2v_\phi\tan\phi}{r}+2\frac{v_r}{r}, &(119)\\
e_{\phi\phi} &= \frac{2}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+2\frac{v_r}{r}, &(120)\\
e_{rr} &= 2\frac{\partial v_r}{\partial r}, &(121)\\
e_{\lambda\phi} &= \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda}+\frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{v_\lambda}{\cos\phi}, &(122)\\
e_{\phi r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}+r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\phi}{r}, &(123)\\
e_{r\lambda} &= r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\lambda}{r}+\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda}. &(124)
\end{aligned}
$$

なお, この歪みテンソルに $\nabla\cdot$ を作用しても先のナビエストークス方程式の粘性項の表現は得られないことに注意. 書き下すと

$$
\left(\boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot\left(e_{\xi\eta}\boldsymbol{e}_\xi\otimes\boldsymbol{e}_\eta\right). \qquad (125)
$$

ただし, 同じ添え字が繰り返し出てきた時には縮約ととる. また

$$
\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{e}_\xi\otimes\boldsymbol{e}_\eta \equiv \boldsymbol{e}_\xi\delta_{\zeta\eta} \qquad (126)
$$

である. この計算を実行すると

$$
\left(\boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(e_{\xi\eta}\boldsymbol{e}_\xi\otimes\boldsymbol{e}_\eta\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{e}_\lambda \left\{ \frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial e_{\lambda\lambda}}{\partial\lambda} - 2\sin\phi e_{\lambda\phi} + 2\cos\phi e_{r\lambda}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial e_{\lambda\phi}}{\partial\phi} + e_{r\lambda}\right] + \frac{\partial e_{r\lambda}}{\partial r}\right\} \\
&\quad +\boldsymbol{e}_\phi \left\{ \frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial e_{\lambda\phi}}{\partial\lambda} - \sin\phi e_{\phi\phi} + \cos\phi e_{\phi r} + \sin\phi e_{\lambda\lambda}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial e_{\phi\phi}}{\partial\phi} + 2e_{\phi r}\right] + \frac{\partial e_{\phi r}}{\partial r}\right\} \\
&\quad +\boldsymbol{e}_r \left\{ \frac{1}{r\cos\phi}\left[\frac{\partial e_{r\lambda}}{\partial\lambda} - \sin\phi e_{\phi r} + \cos\phi e_{rr} - \cos\phi e_{\lambda\lambda}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial e_{\phi r}}{\partial\phi} - e_{\phi\phi} + e_{rr}\right] + \frac{\partial e_{rr}}{\partial r}\right\} \\
&= \boldsymbol{e}_\lambda \left\{ \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_\lambda}{\partial r^2} \right. \\
&\qquad + \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi v_\lambda}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_\lambda}{\partial r}\right] \\
&\qquad \left. + \frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda} - \frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda} - \frac{v_\lambda}{r^2\cos^2\phi}\right\} \\
&\quad +\boldsymbol{e}_\phi \left\{ \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_\phi}{\partial r^2} \right. \\
&\qquad + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi v_\lambda}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_\lambda}{\partial r}\right] \\
&\qquad \left. + \frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\cos^2\phi}\right\} \\
&\quad +\boldsymbol{e}_r \left\{ \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r v_r}{\partial r^2} \right. \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi v_\lambda}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_\lambda}{\partial r}\right] \\
&\qquad \left. - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2\tan\phi v_\phi}{r^2} - \frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{2v_r}{r^2}\right\}.
\end{aligned}
\tag{127}
$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ の時のみ [ ] の項が消えて一致する. そもそも, 通常の表式 (115) ∼ (117) は $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ のもとで導出されているものであるから, その手続きと互換性を保つとすれば, 粘性項の表現は $-\nu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}$ であるべきである.

A.8 渦度方程式

渦度方程式は回転系のナビエストークス方程式の表現

$$
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{v} + \nabla\frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{128}
$$

に $\nabla\times$ を作用して

$$
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) - \nabla(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p - \nu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\omega}. \tag{129}
$$

ただし

$$
\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla\times\boldsymbol{v}. \tag{130}
$$

これを極座標表示すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\omega_{a\lambda} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\omega_{a\lambda} - \boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla v_\lambda + \frac{1}{r}(\omega_{ar}v_\lambda - \omega_{a\lambda}v_r - \omega_{a\phi}v_\lambda\tan\phi + \omega_{a\lambda}v_\phi\tan\phi) \\
&\qquad = \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\phi}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial\phi}\right) \\
&\qquad\quad -\nu\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\cos\phi\,\omega_{a\lambda}}{\partial\phi}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\omega_{a\lambda}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega_{a\phi}}{\partial\lambda}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial\omega_{ar}}{\partial\lambda}\right)\right], \qquad (131)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\omega_{a\phi} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\omega_{a\phi} - \boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla v_\phi + \frac{1}{r}(\omega_{ar}v_\phi - \omega_{a\phi}v_r) \\
&\qquad = \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{r\cos\phi}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial p}{\partial r}\right) \\
&\qquad\quad -\nu\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\omega_{a\phi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2\omega_{a\phi}}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\omega_{ar}}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\cos\phi\,\omega_{a\lambda}}{\partial\phi}\right], \qquad (132)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\omega_{ar} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\omega_{ar} - \boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla v_r \\
&\qquad = \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{r^2\cos\phi}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial p}{\partial\phi} - \frac{\partial\rho}{\partial\phi}\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right) \\
&\qquad\quad -\nu\left[-\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2\omega_{ar}}{\partial\lambda^2} - \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial\omega_{ar}}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial r\omega_{a\lambda}}{\partial r}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial r\omega_{a\phi}}{\partial r}\right)\right] \qquad (133)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_a &\equiv \nabla\times\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \\
&= \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}v_r - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi)\right] \\
&\quad +\boldsymbol{e}_\phi\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\lambda) - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_r + 2\Omega\cos\phi\right] \\
&\quad +\boldsymbol{e}_r\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\phi - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi\, v_\lambda) + 2\Omega\sin\phi\right]. \qquad (134)
\end{aligned}
$$

B　非発散 2 次元球面方程式系の導出

世界は回転系にある非発散ナビエストークス流体として記述されるものとする. 密度は一定 ($\rho = \rho_0$) であり, 運動は球面に拘束されている.

B.1　球面への拘束

球面への拘束条件は次のように与えることにする.

$$
\begin{aligned}
v_r &= 0, && (135)\\
v_\lambda, v_\phi &\propto r. && (136)
\end{aligned}
$$

B.2　連続の式

密度一定, 球面拘束のもとでは, 連続の式 (112) は

$$
\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\lambda + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v_\phi = 0 \qquad (137)
$$

となる.

B.3　ナビエストークスの式

密度一定, 球面拘束のもとでは, ナビエストークスの式 (115) ∼ (117) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_\lambda + \frac{v_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi}{r}v_\lambda v_\phi - 2\Omega\sin\phi v_\phi \\
&\qquad = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p \\
&\qquad\quad +\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} + \frac{2v_\lambda}{r^2}\right. \\
&\qquad\quad \left. -\frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda} - \frac{v_\lambda}{r^2\cos^2\phi}\right], && (138)\\
&\frac{\partial}{\partial t}v_\phi + \frac{v_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\tan\phi}{r}v_\lambda^2 + 2\Omega\sin\phi v_\lambda \\
&\qquad = -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}p \\
&\qquad\quad +\nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2} - \frac{\tan\phi}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2v_\phi}{r^2}\right. \\
&\qquad\quad \left. +\frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{v_\phi}{r^2\cos^2\phi}\right] && (139)\\
& && (140)
\end{aligned}
$$

となる.

B.4　渦度方程式

密度一定, 球面拘束のもとでは, 渦度方程式の動径成分 (133) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\omega_{ar} + \frac{v_\lambda}{r\cos\phi}\frac{\partial \omega_{ar}}{\partial \lambda} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial \omega_{ar}}{\partial \phi} \\
&\qquad = \nu\left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2\omega_{ar}}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial\omega_{ar}}{\partial\phi}\right) + \frac{2\omega_{ar}}{r^2}\right] \qquad (141)
\end{aligned}
$$

となる. 粘性項の最後の項は, 球面拘束の元での渦度が

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_a &= -\boldsymbol{e}_\lambda 2\frac{v_\phi}{r} + \boldsymbol{e}_\phi\left[2\frac{v_\lambda}{r} + 2\Omega\cos\phi\right] \\
&\quad + \boldsymbol{e}_r\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\phi - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\lambda) + 2\Omega\sin\phi\right] \qquad (142)
\end{aligned}
$$

であることを用い, (133) に代入したものである.

B.5　流線関数を用いた表現

球面上で非発散であるので流線関数 ψ が次のように導入できる:

$$
-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \equiv v_\lambda, \qquad (143)
$$

$$
\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \equiv v_\phi. \qquad (144)
$$

渦度の動径成分は

$$
\begin{aligned}
\omega_r &= \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v_\phi - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi v_\lambda) \\
&= \left[\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]\psi \\
&= \frac{1}{r^2}\nabla_h^2\psi. \qquad (145)
\end{aligned}
$$

∇_h^2 は半径 1 の球面上の 2 次元ラプラシアンである.

流線関数を用いれば渦度方程式の動径成分は

$$
\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2\psi - \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\nabla_h^2\psi + 2\Omega\sin\phi}{\partial\psi} = \nu\frac{1}{r^2}(\nabla_h^2 + 2)\nabla_h^2\psi \qquad (146)
$$

となる.

B.6 まとめ

球面系での方程式は, v_λ を u, v_ϕ を v, そして, r を拘束している球の半径 a と書き変えて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial u}{\partial\phi} - \frac{\tan\phi uv}{a} - 2\Omega\sin\phi v &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}p \\ &\quad +\nu\left[\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)u - \frac{2\sin\phi}{a^2\cos^2\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{u}{a^2\cos^2\phi}\right], \qquad (147)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial v}{\partial\phi} + \frac{\tan\phi u^2}{a} + 2\Omega\sin\phi u &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}p \\ &\quad +\nu\left[\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)v + \frac{2\sin\phi}{a^2\cos^2\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{v}{a^2\cos^2\phi}\right], \qquad (148)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}u + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\phi v = 0. \qquad (149)$$

流線関数を用いた渦度方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_h^2\psi - \frac{1}{a^2\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{a^2\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\nabla_h^2\psi}{\partial\psi} + \frac{2\Omega}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \nu\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)\nabla_h^2\psi, \qquad (150)$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{1}{a^2\cos\phi}J(\psi, \zeta + 2\Omega\sin\phi) = \nu\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)\zeta, \qquad (151)$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t}q + \frac{1}{a^2\cos\phi}J(\psi, q) = \nu\frac{1}{a^2}(\nabla_h^2+2)q. \qquad (152)$$

ただし,

$$\begin{aligned}u &\equiv -\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, && (153)\\ v &\equiv \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, && (154)\\ \zeta &\equiv \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda}v - \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi u) \\ &= \left[\frac{1}{a^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]\psi \\ &= \frac{1}{r^2}\nabla_h^2\psi, && (155)\\ q &\equiv \zeta + 2\Omega\sin\phi, && (156)\\ \nabla_h^2 &\equiv \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), && (157)\\ J(X,Y) &\equiv \frac{\partial X}{\partial\lambda}\frac{\partial Y}{\partial\phi} - \frac{\partial Y}{\partial\lambda}\frac{\partial X}{\partial\phi}. && (158)\end{aligned}$$

相対渦度の動経成分 ω_r を ζ, 絶対渦度の動経成分 ω_{ar} を q と書き変えた.