さまざまな座標系での表現, 資料

林 祥介

2014 年 9 月 18 日

目 次

1　直交曲線座標系

座標変換において特に問題になるのはベクトル場 (変位や速度) やテンソル場 (歪みや応力) の表現である. これらは, スカラー場 (温度や圧力) とは違って成分をもっている量であり, 成分の表示が必要となる. 成分は基底ベクトルによって定義される. 基底ベクトルとは座標を定義する曲線 (座標曲線) の接ベクトルで大きさ 1 のものである. 直交直線座標においては基底ベクトルの向きは着目している空間の位置 (座標) によらない. 座標軸方向の単位ベクトルの向きはどの点でも同じ向きである. したがって, ベクトルやテンソルはスカラーが行儀良く並んでいるだけの量 (例えばベクトルなら 3 つ) と思っておればよい. 一般座標においては基底ベクトルの向きは一般に位置 (座標) の関数である. 球面上の「東向き」は空間 (慣性系) から見れば経度によって異なり, 地球の反対側では反対向きである. 成分が定数からなるベクトルは定ベクトルではない. 「一定な西風」は経度とともに向きを変えるのである.

空間 (慣性系) に固定した直交直線座標系を $O-x_1x_2x_3$ とする. 座標変換の関数形が次のように与えられているとしよう (簡単のため座標変換は時間によらないものとする).

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(x_1,x_2,x_3), \\ \xi_2 &= \xi_2(x_1,x_2,x_3), \\ \xi_3 &= \xi_3(x_1,x_2,x_3). \end{aligned} \tag{1}$$

空間上の点 $\boldsymbol{x}$ は直交直線座標では (x_1,x_2,x_3), 一般座標では (ξ_1,ξ_2,ξ_3) で表現される.

スカラー場 f が直交直線座標で $f=f(x_1,x_2,x_3,t)$ のように座標の関数として与えられているとき, 一般座標 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) での表現 $f=\tilde{f}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)$ は逆変換

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \\ x_2 &= x_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \\ x_3 &= x_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3). \end{aligned} \tag{2}$$

を代入することにより直ちに求まる.

微分計算は合成関数の微分を行うことにより変換される.

$$\left(\frac{\partial\bullet}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,t} = \left(\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_1}\right)_{\xi_2,\xi_3,t}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,t}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_2}\right)_{\xi_3,\xi_1,t}\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,t} \\
&+\left(\frac{\partial\bullet}{\partial\xi_3}\right)_{\xi_1,\xi_2,t}\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,t} \qquad (3)\\
\left(\frac{\partial\bullet}{\partial x_2}\right)_{x_3,x_1,t} &= \cdots \\
\left(\frac{\partial\bullet}{\partial x_3}\right)_{x_1,x_2,t} &= \cdots
\end{aligned}
$$

ここで, 微分を囲む ( ) に付けられた添字は, それらの変数を一定に保って偏微分するという意味である. 以後特に必要のない限りどの変数を一定に保って偏微分するかは明示しない. $\partial/\partial x_1$ は x_2, x_3, t を一定に保った微分を表し, $\partial/\partial\xi_1$ は ξ_2, ξ_3, t を一定に保った微分を表すものとする. また, $\partial/\partial t$ は x_1, x_2, x_3 あるいは ξ_1, ξ_2, ξ_3 を一定とした時の時間変化を表すものとする.

物質とともに移動する点から見た時間微分 (Lagrange 微分) はその定義により

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bullet}{dt} &= \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial\bullet}{\partial x_j} \qquad (4)\\
&= \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \sum_j \dot{\xi}_j \frac{\partial\bullet}{\partial\xi_j} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となりどのような座標系においても表現は不変である.

ベクトル場やテンソル場の座標変換の表現を得るためには着目する点の座標の表現のみならず, その点での基底ベクトルの表現を得なければならない. 基底ベクトルは座標曲線方向の接ベクトルとして定義され, 直交直線座標系では

$$
\boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \boldsymbol{e}_2 = \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (6)
$$

であり, 空間上のどの点でも同じ定ベクトルを用いるのであった. 一般座標系では,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1} \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1} \\ \frac{1}{h_1}\frac{\partial x_3}{\partial\xi_1} \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{e}'_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} \\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} \\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial x_3}{\partial\xi_2} \end{pmatrix}, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{e}'_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_3}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix},
$$

である. $h_i \equiv |\partial \boldsymbol{x}/\partial \xi_i|$ は大きさを 1 にするための規格化因子 である.

基底ベクトルが定義されたので, 任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ やテンソル場 T は次のように表現されることになる.

$$
\boldsymbol{A} = \sum_i A_i \boldsymbol{e}_i = \sum_i A'_i \boldsymbol{e}'_i \tag{8}
$$

$$
T = \sum_{ij} T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \sum_{ij} T'_{ij} \boldsymbol{e}'_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \tag{9}
$$

$\otimes$ は基底ベクトルを並べてテンソルの基底であることを示すための記号である. 変換公式を書き下しておこう. 基底の変換は形式的に書き下せば

$$
\boldsymbol{e}'_k = \sum_i \frac{1}{h_k}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \boldsymbol{e}_i \tag{10}
$$

である. したがって, ベクトルの成分は

$$
\boldsymbol{A} = \sum_i A_i \boldsymbol{e}_i = \sum_k A'_k \boldsymbol{e}'_k = \sum_{ki} A'_k \frac{1}{h_k}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \boldsymbol{e}_i.
$$

最初の式と最後の式とを比べれば

$$
A_i = \sum_k \frac{1}{h_k}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} A'_k. \tag{11}
$$

逆変換は,

$$
\sum_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} = \delta_{kl}
$$

に注意して逆解きすれば

例えば

$$
\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_1}
$$

は ξ_1 曲線 (ξ_2, ξ_3 を固定して指定される曲線) の接ベクトルであり,

$$
\nabla \xi_1
$$

は $\xi_2 - \xi_3$ 曲面 (ξ_1 を固定して指定される曲線) の法線ベクトルである.

$$
\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_j} \cdot \nabla \xi_i = \delta_{ij}
$$

ということ.

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_k h_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \boldsymbol{e}'_k. \tag{12}$$

よって, ベクトルの成分については

$$A'_k = \sum_i h_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} A_i \tag{13}$$

となる.

テンソルに関する変換公式はベクトルのそれに準じて各成分に対して同様の変換を行えばよい.

$$T_{ij} = \sum_{kl} \frac{1}{h_k} \frac{1}{h_l} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_l} T'_{kl}, \quad T'_{kl} = \sum_{ij} h_k h_l \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} T_{ij}. \tag{14}$$

ベクトル場の回転 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ や 発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ やラグランジュ微分, そして, 歪みテンソルなどの具体的な表現は, 以上の成分変換公式と微分の変換公式を用いてあげれば得られる. 具体的な計算を行ってみると次のような係数が登場する.

$$\Gamma^l_{ij} \equiv \sum_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}. \tag{15}$$

これは基底ベクトルの空間変化を表す量で, 実際,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (h_i \boldsymbol{e}'_i) = \sum_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \boldsymbol{e}_k = \sum_{kl} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} h_l \boldsymbol{e}'_l = \sum_l \Gamma^l_{ij} h_l \boldsymbol{e}'_l. \tag{16}$$

である. 曲線座標系でベクトル量, テンソル量などの微分を考える場合には, 成分の空間変化と成分を定義する基底ベクトルの向きの空間変化とを同時に考えてあげてなければならない.

一般的での詳細な表現の記述は以下では用いないので省略することにし, 基底ベクトルが直交する座標系, すなわち, 直交曲線座標系に限定して具体的な表現をもとめることにする. 直交曲線座標系では

$$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij}, \tag{17}$$

また, もともと $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_j} \cdot \nabla \xi_i = \delta_{ij}$ であったから, $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_i}$ と $\nabla \xi_i$ とは平行であることになり, 実際,

$$\nabla \xi_i = \frac{1}{h_i} \boldsymbol{e}'_i \tag{18}$$

である. 成分で具体的に書けば

$$\sum_k \frac{1}{h_i h_j}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} \tag{19}$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \frac{1}{h_i^2}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \tag{20}$$

である. さらに, 上式とその微分を用いることにより, 直交曲線座標系では $\{\Gamma^l_{ij}\}$ は $\{h_i\}$ を使って簡略に書き下せる.

$$\begin{aligned}
\Gamma^l_{ij} &= \sum_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \\
&= \sum_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\frac{1}{h_l^2}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \\
&= \frac{1}{2h_l^2}\left(\frac{\partial h_l^2}{\partial \xi_i}\delta_{jl} + \frac{\partial h_l^2}{\partial \xi_j}\delta_{il} - \frac{\partial h_i^2}{\partial \xi_l}\delta_{ij}\right).
\end{aligned} \tag{21}$$

よって基底ベクトルの向きの変化は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\boldsymbol{e}'_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial \xi_i}\boldsymbol{e}'_j - \delta_{ij}\sum_l \frac{1}{h_l}\frac{\partial h_i}{\partial \xi_l}\boldsymbol{e}'_l \tag{22}$$

直交曲線座標系での表現を並べておこう. 任意のスカラー場 f の勾配 ∇f は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i = \sum_{ikl} h_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial \xi_l}\boldsymbol{e}'_k \\
&= \sum_k \frac{1}{h_k}\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\boldsymbol{e}'_k.
\end{aligned} \tag{23}$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \sum_{ijm}\epsilon_{ijm}\frac{\partial A_m}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i = \sum_{ijmkln}\epsilon_{ijm}h_k\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\boldsymbol{e}'_k\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(\frac{1}{h_n}\frac{\partial x_m}{\partial \xi_n}A'_n\right) \\
&= \sum_{kln}\boldsymbol{e}'_k\epsilon_{kln}\frac{h_n}{h_l}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(\frac{A'_n}{h_n}\right) + \sum_p \Gamma^n_{lp}\left(\frac{A'_p}{h_p}\right)\right] \\
&= \sum_{kln}\boldsymbol{e}'_k\left[\epsilon_{kln}\frac{1}{h_l h_n}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(h_n A'_n\right)\right].
\end{aligned} \tag{24}$$

最後の行の [ ] 内が $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の ξ_k 成分である.

めんどくさい計算をしなくてもストークスの定理

$$\int \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

を知っていれば積分の変数変換を行うことにより結果はたやすく導ける．たとえば, 面積分を行う面として $\xi_2 = \mathrm{const}$, $\xi_3 = \mathrm{const}$ で囲まれた $\xi_1 = \mathrm{const}$ 面上の無限小面をとれば

$$
\begin{aligned}
\int \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_{\xi_2}^{\xi_2+\delta\xi_2}\int_{\xi_3}^{\xi_3+\delta\xi_3}(\nabla\times\boldsymbol{A})_1 h_2h_3 d\xi_2 d\xi_3 \\
&\sim (\nabla\times\boldsymbol{A})_1 h_2h_3\delta\xi_2\delta\xi_3 \\
\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} &= \int_{\xi_3}^{\xi_3+\delta\xi_3} d\xi_3 \left[A'_3h_3\right]_{\xi_2=\xi_2}^{\xi_2=\xi_2+\delta\xi_2} + \int_{\xi_2}^{\xi_2+\delta\xi_2} d\xi_2 \left[A'_2h_2\right]_{\xi_3=\xi_3+\delta\xi_3}^{\xi_3=\xi_3} \\
&\sim \frac{\partial A'_3h_3}{\partial\xi_2}\delta\xi_2\delta\xi_3 - \frac{\partial A'_2h_2}{\partial\xi_3}\delta\xi_2\delta\xi_3.
\end{aligned}
$$

よってただちに

$$
(\nabla\times\boldsymbol{A})_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial A'_3h_3}{\partial\xi_2} - \frac{\partial A'_2h_2}{\partial\xi_3}\right).
$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散は次のようになる.

やはりめんどくさい計算をしなくてもガウスの定理

$$
\int \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV = \int \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}
$$

を知っていれば積分の変数変換を行うことにより結果はたやすく導ける．積分を行う領域として $\xi_1 = \mathrm{const}$, $\xi_2 = \mathrm{const}$, $\xi_3 = \mathrm{const}$ で囲まれた無限小 6 面体をとれば

$$
\begin{aligned}
\int \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV &= \int_{\xi_1}^{\xi_1+\delta\xi_1}\int_{\xi_2}^{\xi_2+\delta\xi_2}\int_{\xi_3}^{\xi_3+\delta\xi_3} \nabla\cdot\boldsymbol{A}h_1h_2h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&\sim \nabla\cdot\boldsymbol{A}h_1h_2h_3\delta\xi_1\delta\xi_2\delta\xi_3 \\
\int \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_{\xi_2}^{\xi_2+\delta\xi_2}\int_{\xi_3}^{\xi_3+\delta\xi_3} d\xi_2 d\xi_3 \left[A'_1h_2h_3\right]_{\xi_1=\xi_1}^{\xi_1=\xi_1+\delta\xi_1} \\
&\quad + \int_{\xi_3}^{\xi_3+\delta\xi_3}\int_{\xi_1}^{\xi_1+\delta\xi_1} d\xi_3 d\xi_1 \left[A'_2h_3h_1\right]_{\xi_2=\xi_2}^{\xi_2=\xi_2+\delta\xi_2} \\
&\quad + \int_{\xi_1}^{\xi_1+\delta\xi_1}\int_{\xi_2}^{\xi_2+\delta\xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \left[A'_3h_1h_2\right]_{\xi_3=\xi_3}^{\xi_3=\xi_3+\delta\xi_3} \\
&\sim \left(\frac{\partial A'_1h_2h_3}{\partial\xi_1} + \frac{\partial A'_2h_3h_1}{\partial\xi_2} + \frac{\partial A'_3h_1h_2}{\partial\xi_3}\right)\delta\xi_1\delta\xi_2\delta\xi_3
\end{aligned}
$$

よってただちに

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial A'_1h_2h_3}{\partial\xi_1} + \frac{\partial A'_2h_3h_1}{\partial\xi_2} + \frac{\partial A'_3h_1h_2}{\partial\xi_3}\right).
$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{ikl} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(\frac{1}{h_k}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}A'_k\right) \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{A'_k}{h_k} + \sum_{kl}\Gamma^l_{kl}\frac{A'_k}{h_k} \\ &= \sum_k \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{h_1h_2h_3A'_k}{h_k} \qquad (25)\end{aligned}$$

任意のスカラー場 f のラプラシアン Δf は次のようになる.

$$\begin{aligned}\Delta f &= \nabla\cdot\nabla f \\ &= \sum_k \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_k^2}\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right) \qquad (26)\end{aligned}$$

歪みテンソルは次のようになる.

$$\begin{aligned}e &= \sum_{ij} e_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = \sum_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{ijmnkl}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_m}\left(\frac{1}{h_n}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_n}u'_n\right)+\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_m}\left(\frac{1}{h_n}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_n}u'_n\right)\right]h_k\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}h_l\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}\boldsymbol{e}'_k\otimes\boldsymbol{e}_l \\ &= \sum_{kln}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{h_l}{h_k}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{u'_l}{h_l}\right)+\Gamma^l_{kn}\frac{u'_n}{h_n}\right)+\frac{h_k}{h_l}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(\frac{u'_k}{h_k}\right)+\Gamma^k_{ln}\frac{u'_n}{h_n}\right)\right\}\right]\boldsymbol{e}'_k\otimes\boldsymbol{e}_l. \\ &= \sum_{kl}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{h_l}{h_k}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{u'_l}{h_l}\right)+\frac{h_k}{h_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(\frac{u'_k}{h_k}\right)\right\}+\sum_n\frac{1}{h_l}\frac{\partial h_l}{\partial \xi_n}\left(\frac{u'_n}{h_n}\right)\delta_{kl}\right]\boldsymbol{e}'_k\otimes\boldsymbol{e}_l. \qquad (27)\end{aligned}$$

最後の行の [ ] 内が歪みテンソルの $\xi_k\xi_l$ 成分である.

速度場は次のようになる.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{x}} = \sum_i \dot{x}_i\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\dot{\xi}_k\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_k h_k\dot{\xi}_k\boldsymbol{e}'_k \qquad (28)\end{aligned}$$

よってラグランジュ微分を速度成分 $v'_k = h_k\dot{\xi}_k$ で書けば

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \sum_k \frac{v'_k}{h_k}\frac{\partial\bullet}{\partial \xi_k} \qquad (29)$$

となる. 任意のベクトル場のラグランジュ微分は

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \sum_j \dot{\xi}_j\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_k A'_k\boldsymbol{e}'_k\right) + \sum_j\dot{\xi}_j\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\sum_k A'_k\boldsymbol{e}'_k\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_k \boldsymbol{e}'_k \left[\frac{\partial A'_k}{\partial t} + \sum_j \dot{\xi}_j h_k \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{A'_k}{h_k} + \sum_{jl} \dot{\xi}_j \Gamma^k_{lj} \frac{h_k}{h_l} A'_l \right] \\
&= \sum_k \boldsymbol{e}'_k \left[\frac{\partial A'_k}{\partial t} + \sum_j \dot{\xi}_j \frac{\partial A'_k}{\partial \xi_j} + \left(-\dot{\xi}_j \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_j}{\partial \xi_k} + \dot{\xi}_k \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_k}{\partial \xi_j} \right) A'_j \right]
\end{aligned}
\tag{30}
$$

であり, 加速度ベクトルは次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= \sum_k \boldsymbol{e}'_k \left[\frac{\partial v'_k}{\partial t} + \sum_j \dot{\xi}_j \frac{\partial v'_k}{\partial \xi_j} + \left(-\dot{\xi}_j \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_j}{\partial \xi_k} + \dot{\xi}_k \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_k}{\partial \xi_j} \right) v'_j \right]
\end{aligned}
\tag{31}
$$

2 回転系

前節では座標変換が時間に依存しないことにしていたが, 地球や惑星の諸現象を扱うには地球や惑星あるいは太陽系ガスとともに回転している座標系で記述したほうが自然である場合が多い. このような系での基礎方程式は, 慣性系に付いてすでにもとめられている基礎方程式に時間に依存する座標変換を行ってあげれば得ることができる. 手法は前節と全く同じである.

座標系として静止している直交直線座標系 $O-x_1x_2x_3$ とそれに対して $\boldsymbol{\Omega}$ で回転している直交直線座標系 $O-x'_1x'_2x'_3$ を用いることにする. $\boldsymbol{\Omega}$ は定ベクトルであるものとする. 回転系で直交曲線座標系を用いたい場合には, まずは回転系の直線直交座標による表現を求めておいてそれをさらに前節の手順によって曲線直交座標に (時間に依存しない) 座標変換を行うという 2 段階の手続きを踏めば良い. 静止している直交直線座標系 $O-x_1x_2x_3$ の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, 回転している直交直線座標系 $O-x'_1x'_2x'_3$ の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ とする.

$$
\dot{\boldsymbol{e}}'_i = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}'_i \tag{32}
$$

である. 今度は基底ベクトルが時々刻々向きを変えていくことに注意すれば良い.

時間に依存する座標変換において問題となるのは結局時間微分を含む項だけである. すなわち, 速度ベクトルや加速度ベクトルである. 質点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ とすれば, それぞれの座標系での成分 (x_i), (x'_i) は

$$
\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i = \sum_i x'_i \boldsymbol{e}'_i \tag{33}
$$

である. 速度ベクトルはその時間微分であったから

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{x}} \\
&= \sum_i \dot{x}_i \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_i \dot{x}'_i \boldsymbol{e}'_i + \sum_i x'_i \dot{\boldsymbol{e}}'_i = \sum_i \dot{x}'_i \boldsymbol{e}'_i + \sum_i x'_i \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}'_i \\
&= \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{34}$$

ここに

$$\boldsymbol{v}' = \sum_i v'_i \boldsymbol{e}'_i \equiv \sum_i \dot{x}'_i \boldsymbol{e}'_i \tag{35}$$

を相対速度あるいは回転系から見た速度という.

加速度ベクトルは速度ベクトルをさらに時間微分したものであったから

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \dot{\boldsymbol{v}} \\
&= \sum_i \ddot{x}_i \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_i \ddot{x}'_i \boldsymbol{e}'_i + \sum_i 2\dot{x}'_i \dot{\boldsymbol{e}}'_i + \sum_i x'_i \ddot{\boldsymbol{e}}'_i \\
&= \sum_i \ddot{x}'_i \boldsymbol{e}'_i + \sum_i 2\dot{x}'_i \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}'_i + \sum_i x'_i \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}'_i \\
&= \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}
\end{aligned} \tag{36}$$

ここに

$$\boldsymbol{a}' = \sum_i a'_i \boldsymbol{e}'_i \equiv \sum_i \ddot{x}'_i \boldsymbol{e}'_i \tag{37}$$

を相対加速度あるいは回転系から見た加速度という. $-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}'$ はコリオリ力, $-\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x}$ は遠心力と呼ばれる.

3　例: 球座標での表現

以下球座標系での具体的表現を与えておく. 座標は

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\
&\xi_2 = \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\
&\xi_3 = \phi = \tan^{-1}(y/x),
\end{aligned} \tag{38}$$

あるいは

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ \ y = r\sin\theta\sin\phi,\ \ z = r\cos\theta, \tag{39}$$

であり,

$$h_1 = 1,\ \ h_2 = r,\ \ h_3 = r\sin\theta, \tag{40}$$

基底ベクトルの $O - xyz$ 系での成分は,

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

Γ^l_{ij} で 0 でない成分は

$$\begin{aligned} &\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r},\ \ \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r},\ \ \Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \\ &\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta\ \ \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta,\ \ \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{42}$$

よって基底ベクトルの向きが位置依存するものは

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta,\ \ \frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\boldsymbol{e}_\phi, \\ &\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_r\ \ \frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\boldsymbol{e}_\phi\ \ \frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi = -\sin\theta\boldsymbol{e}_r - \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{43}$$

である.

速度ベクトルは

$$v_r = \dot{r},\ \ v_\theta = r\dot{\theta},\ \ v_\phi = r\sin\theta\dot{\phi}, \tag{44}$$

ラグランジュ微分は次のようになる.

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + v_r\frac{\partial\bullet}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\bullet}{\partial\theta} + v_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\bullet}{\partial\phi} \tag{45}$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ のラグランジュ微分は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = &\ \boldsymbol{e}_r\left[\frac{\partial A_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial A_r}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + v_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{v_\theta}{r}A_\theta - \frac{v_\phi}{r}A_\phi\right] \\ &+\boldsymbol{e}_\theta\left[\frac{\partial A_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + v_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi} + \frac{v_\theta}{r}A_r - \frac{v_\phi\cot\theta}{r}A_\phi\right] \\ &+\boldsymbol{e}_\phi\left[\frac{\partial A_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial A_\phi}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\theta} + v_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_\phi}{r}A_r + \frac{v_\phi\cot\theta}{r}A_\theta\right] \end{aligned} \tag{46}$$

よって加速度ベクトルは

$$
\begin{aligned}
a_r &= \dot{v_r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}, \\
a_\theta &= \dot{v_\theta} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot\theta}{r}, \qquad (47) \\
a_\phi &= \dot{v_\phi} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + v_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot\theta}{r}
\end{aligned}
$$

である.

任意のスカラー場 f の勾配 ∇f は次のようになる.

$$
\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi. \qquad (48)
$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転は次のようになる.

$$
(\nabla\times\boldsymbol{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_\phi \sin\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right), \qquad (49)
$$

$$
(\nabla\times\boldsymbol{A})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial r A_\phi}{\partial r}, \qquad (50)
$$

$$
(\nabla\times\boldsymbol{A})_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}. \qquad (51)
$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散は次のようになる.

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \qquad (52)
$$

任意のスカラー場 f のラプラシアン Δf は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= \nabla\cdot\nabla f \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \qquad (53)
\end{aligned}
$$

歪みテンソルは次のようになる.

$$
e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad (54)
$$

$$
e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \qquad (55)
$$

$$
e_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r}, \qquad (56)
$$

$$
e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right], \qquad (57)
$$

$$e_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right], \tag{58}$$

$$e_{\phi r} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\phi}{r}\right)\right]. \tag{59}$$

回転系のナビアストークス方程式の表現は次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + v_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r} - 2\Omega_z\sin\theta v_\phi \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial\Phi'}{\partial r} \\
&\quad +\nu\left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{2v_\theta\cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r} - 2\Omega_z\cos\theta v_\phi \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi'}{\partial\theta} \\
&\quad +\nu\left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} + v_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r} + 2\Omega_z\cos\theta v_\theta + 2\Omega_z\sin\theta v_r \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi'}{\partial\phi} \\
&\quad +\nu\left(\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)
\end{aligned} \tag{62}$$

ただし系の回転軸を z 軸としてある. 系の回転角速度ベクトルの $O - r\theta\phi$ 系での成分は $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_z\cos\theta, -\Omega_z\sin\theta, 0)$, 遠心力はポテンシャル力に含めてある, すなわち

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\Omega_z^2 \tag{63}$$

Φ は非回転系で与えられる保存力のポテンシャルである.

等方線形弾性体の運動方程式の表現は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial u_r}{\partial t} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 u_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right) \\
&\quad -\mu\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial r u_\phi}{\partial r}\right)\right]
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\rho\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = (\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 u_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right)$$
$$-\mu\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\theta u_\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\right] \tag{65}$$

$$\rho\frac{\partial u_\phi}{\partial t} = (\lambda+2\mu)\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 u_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}\right)$$
$$-\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial r u_\phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\theta u_\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}\right)\right] \tag{66}$$

3.1　円筒座標での表現

以下円筒座標系での具体的表現を与えておく. 座標は

$$\xi_1 = r = \sqrt{x^2+y^2},\ \ \xi_2 = \phi = \tan^{-1}(y/x),\ \ \xi_3 = z, \tag{67}$$

あるいは

$$x = r\cos\phi,\ \ y = r\sin\phi,\ \ z = z, \tag{68}$$

であり,

$$h_1 = 1,\ \ h_2 = r,\ \ h_3 = 1, \tag{69}$$

基底ベクトルの $O-xyz$ 系での成分は,

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{e}_\phi = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \tag{70}$$

Γ^l_{ij} で 0 でない成分は

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r},\ \ \Gamma^r_{\phi\phi} = -r, \tag{71}$$

よって基底ベクトルの向きが位置依存するものは

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\phi,\ \ \frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_r \tag{72}$$

である.

速度ベクトルは

$$v_r = \dot{r}, \;\; v_\phi = r\dot{\phi}, \;\; v_z = \dot{z}, \tag{73}$$

ラグランジュ微分は次のようになる.

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + v_r \frac{\partial \bullet}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial \bullet}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial \bullet}{\partial z} \tag{74}$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ のラグランジュ微分は次のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} &= \boldsymbol{e}_r \left[\frac{\partial A_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{v_\phi}{r} A_\phi \right] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_\phi \left[\frac{\partial A_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial A_\phi}{\partial z} + \frac{v_\phi}{r} A_r \right] \\ &\quad + \boldsymbol{e}_z \left[\frac{\partial A_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial A_z}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right]\end{aligned} \tag{75}$$

よって加速度ベクトルは

$$\begin{aligned} a_r &= \dot{v_r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r}, \\ a_\phi &= \dot{v_\phi} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r}, \\ a_z &= \dot{v_z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned} \tag{76}$$

である.

任意のスカラー場 f の勾配 ∇f は次のようになる.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{77}$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転は次のようになる.

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \tag{78}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \tag{79}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \phi}. \tag{80}$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散は次のようになる.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{81}$$

任意のスカラー場 f のラプラシアン Δf は次のようになる.

$$\Delta f = \nabla\cdot\nabla f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{82}$$

歪みテンソルは次のようになる.

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \tag{83}$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} + \frac{u_r}{r}, \tag{84}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{85}$$

$$e_{r\phi} = \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{u_\phi}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}\right], \tag{86}$$

$$e_{\phi z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right], \tag{87}$$

$$e_{zr} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right]. \tag{88}$$

回転系のナビアストークス方程式の表現は次のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} &+ v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} - 2\Omega_z v_\phi \\ &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial\phi'}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\phi}{\partial t} &+ v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_\phi v_r}{r} + 2\Omega_z v_r \\ &= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi'}{\partial\phi} + \nu\left(\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_z}{\partial t} &+ v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial\Phi'}{\partial z} + \nu\left(\Delta v_z\right)\end{aligned} \tag{91}$$

ただし系の回転軸を z 軸としてある. 系の回転角速度ベクトルの $O - r\phi z$ 系での成分は $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$, 遠心力はポテンシャル力に含めてある, すなわち

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{2}r^2\Omega_z^2 \tag{92}$$

Φ は非回転系で与えられる保存力のポテンシャルである.

等方線形弾性体の運動方程式の表現は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial u_r}{\partial t} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\
&\quad -\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right] \qquad (93)\\
\rho\frac{\partial u_\phi}{\partial t} &= (\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\
&\quad -\mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi}-\frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_\phi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi}\right)\right] \qquad (94)\\
\rho\frac{\partial u_z}{\partial t} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\
&\quad -\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi}-\frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right)n\right] \qquad (95)
\end{aligned}$$

3.2 球座標での表現 (緯度経度座標)

おなじ球座標系でも気象学などでは緯度経度を使って記述することが多い. 以下くりかえしになるが緯度経度座標系での具体的表現を与えておく.

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \lambda = \tan^{-1}(y/x),\\
\xi_2 &= \phi = \tan^{-1}(z/\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (96)\\
\xi_3 &= r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},
\end{aligned}$$

あるいは

$$x = r\cos\phi\cos\lambda,\ \ y = r\cos\phi\sin\lambda,\ \ z = r\sin\phi, \qquad (97)$$

であり,

$$h_1 = r\cos\phi,\ \ h_2 = r,\ \ h_3 = 1, \qquad (98)$$

基底ベクトルの $O-xyz$ 系での成分は,

$$\boldsymbol{e}_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\lambda \\ -\sin\phi\sin\lambda \\ \cos\phi \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad (99)$$

Γ^l_{ij} で 0 でない成分は

$$\begin{aligned}
&\Gamma^r_{\lambda\lambda} = -r\cos^2\phi,\ \ \Gamma^\phi_{\lambda\lambda} = \cos\phi\sin\phi\ \ \Gamma^\lambda_{\phi\lambda} = \Gamma^\lambda_{\phi\lambda} = -\tan\phi\\
&\Gamma^r_{\phi\phi} = -r,\ \ \Gamma^\lambda_{r\lambda} = \Gamma^\lambda_{\lambda r} = \frac{1}{r},\ \ \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \qquad (100)
\end{aligned}$$

よって基底ベクトルの向きが位置依存するものは

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda}\boldsymbol{e}_\lambda = -\cos\phi\boldsymbol{e}_r + \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi,\ \ \frac{\partial}{\partial\lambda}\boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{e}_\lambda,\ \ \frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_r,\\
&\frac{\partial}{\partial\lambda}\boldsymbol{e}_r = \cos\phi\boldsymbol{e}_\lambda,\ \ \frac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\phi,
\end{aligned}
\tag{101}
$$

である.

速度ベクトルは

$$
v_\lambda = r\cos\phi\dot{\lambda},\ \ v_\phi = r\dot{\phi},\ \ v_r = \dot{r},
\tag{102}
$$

ラグランジュ微分は次のようになる.

$$
\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + v_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial\bullet}{\partial\lambda} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial\bullet}{\partial\phi} + v_r\frac{\partial\bullet}{\partial r}
\tag{103}
$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ のラグランジュ微分は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = &\ \boldsymbol{e}_\lambda\left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial t} + v_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\lambda} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\phi} + v_r\frac{\partial A_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\lambda}{r}A_r - \frac{v_\lambda\tan\phi}{r}A_\phi\right]\\
&+\boldsymbol{e}_\phi\left[\frac{\partial A_\phi}{\partial t} + v_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial A_\phi}{\partial\lambda} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + v_r\frac{\partial A_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}A_r + \frac{v_\lambda\tan\phi}{r}A_\lambda\right]\\
&+\boldsymbol{e}_r\left[\frac{\partial A_r}{\partial t} + v_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial A_r}{\partial\lambda} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + v_r\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}A_\phi - \frac{v_\lambda}{r}A_\lambda\right]
\end{aligned}
\tag{104}
$$

よって加速度ベクトルは

$$
\begin{aligned}
a_\lambda &= \dot{v_\lambda} + v_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} + v_r\frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\lambda v_r}{r} - \frac{v_\phi v_\lambda\tan\phi}{r}\\
a_\phi &= \dot{v_\phi} + v_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\lambda^2\tan\phi}{r},\\
a_r &= \dot{v_r} + v_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2 + v_\lambda^2}{r},
\end{aligned}
\tag{105}
$$

である.

任意のスカラー場 f の勾配 ∇f は次のようになる.

$$
\nabla f = \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial f}{\partial\lambda}\boldsymbol{e}_\lambda + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r.
\tag{106}
$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転は次のようになる.

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\lambda = \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial rA_\phi}{\partial r}, \tag{107}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial rA_\lambda}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial A_r}{\partial\lambda}, \tag{108}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_r = \frac{1}{r\cos\phi}\left(\frac{\partial A_\phi}{\partial\lambda} - \frac{\partial A_\lambda\cos\phi}{\partial\phi}\right). \tag{109}$$

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散は次のようになる.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial A_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial A_\phi\cos\phi}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2A_r}{\partial r}. \tag{110}$$

任意のスカラー場 f のラプラシアン Δf は次のようになる.

$$\begin{aligned}\Delta f &= \nabla\cdot\nabla f \\ &= \frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)\end{aligned} \tag{111}$$

歪みテンソルは次のようになる.

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \tag{112}$$

$$e_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} + \frac{u_r}{r}, \tag{113}$$

$$e_{\lambda\lambda} = \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{u_r}{r} - \frac{u_\phi\tan\phi}{r}, \tag{114}$$

$$e_{r\phi} = \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\phi}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}\right], \tag{115}$$

$$e_{\phi\lambda} = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{u_\lambda}{\cos\phi}\right) + \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial u_\phi}{\partial\lambda}\right], \tag{116}$$

$$e_{\lambda r} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial u_r}{\partial\lambda} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\lambda}{r}\right)\right]. \tag{117}$$

回転系のナビアストークス方程式の表現は次のようになる.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_\lambda\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda} + v_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\phi} + v_r\frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\lambda v_r}{r} - \frac{v_\phi v_\lambda\tan\phi}{r} - 2\Omega_z\sin\phi v_\phi + 2\Omega_z\cos\phi v_r \\ &\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial\Phi'}{\partial\lambda} \\ &\qquad +\nu\left(\Delta v_\lambda - \frac{v_\lambda}{r^2\cos^2\phi} + \frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda} - \frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial\lambda}\right)\end{aligned} \tag{118}$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\lambda^2 \tan\phi}{r} + 2\Omega_z \sin\phi v_\lambda$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi'}{\partial \phi}$$
$$+\nu\left(\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2\cos^2\phi} + \frac{2\sin\phi}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right) \qquad (119)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_\lambda \frac{1}{r\cos\phi}\frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + v_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2 + v_\lambda^2}{r} - 2\Omega_z \cos\phi v_\lambda$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi'}{\partial r}$$
$$+\nu\left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{2v_\phi \tan\phi}{r^2} - \frac{2}{r^2\cos\phi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}\right) \qquad (120)$$

ただし系の回転軸を z 軸としてある. 系の回転角速度ベクトルの $O-\lambda\phi r$ 系での成分は $\boldsymbol{\Omega} = (0, -\Omega_z\cos\phi, \Omega_z\sin\phi)$, 遠心力はポテンシャル力に含めてある, すなわち

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{2}r^2\cos^2\phi\Omega_z^2 \qquad (121)$$

Φ は非回転系で与えられる保存力のポテンシャルである.