

# 修 士 学 位 論 文

## スペクトル法を用いた 自転軸対称ハドレー循環の数値実験

令和5年2月3日

専攻名 惑星学専攻

学籍番号 210s406s

氏名 岡田 和真

神戸大学大学院理学研究科博士課程前期課程

## 要旨

地球大気には、「ハドレー循環」と呼ばれる、赤道で温められ上昇する流れと亜熱帯で冷やされ下降する流れによって構成される大規模な大気の運動が存在する。この循環の南北幅や東西風の亜熱帯ジェットといった基本的な力学構造は古くから調べられており、しばしば自転軸対称な系が用いられた。

自転軸対称な系でハドレー循環を調べた研究として、Held and Hou (1980) がある。この研究では、定常状態にある非粘性の大気がしたがう非線形の支配方程式からハドレー循環の幅や、角運動量保存する流れが作る亜熱帯ジェット、地表面東西風分布などに関する解析解が得られた。Held and Hou (1980) で考えられたハドレー循環は赤道対称なものであったが、その後、Lindzen and Hou (1988) は赤道非対称なハドレー循環に関する数値実験を行った。その結果、地球大気のハドレー循環のように、冬半球側のハドレー循環が夏半球側のハドレー循環より強くなることが示された。さらに、Fang and Tung (1999) は、季節変化を取り入れた系で得られる循環の構造を調べた。

しかし、Fang and Tung (1999) では、それまでの自転軸対称ハドレー循環を調べた研究で用いられた下端境界条件（摩擦境界条件）とは異なり、粘着条件（下端で風速がゼロ）が用いられた。本研究では、この違いによってモデル下層での循環による南北質量輸送の強さに違いができるのではないかと考えた。そこで、下端境界条件を摩擦境界条件で与え、かつ摩擦の強さを変更した実験を行い、季節変化するハドレー循環を調べた。

まず、数値モデルの構築を行った。本研究で構築した数値モデルは、空間離散化にスペクトル法を用いる。展開関数系として、水平方向には球面調和関数を、鉛直方向にはチェビシェフ多項式を用いる。構築した数値モデルの妥当性を確かめることも兼ねて自転軸対称ハドレー循環を調べた先行研究の追試を行った。その結果、子午面流線関数や東西風の構造などほぼ一致する結果となった。

そして、下端における摩擦の強さを変えて季節変化するハドレー循環の数値実験を行った。その結果、Fang and Tung (1999) と概ね一致する循環の性質が得られ、下端境界条件の違いは結果に大きな差をもたらさないことがわかった。その一方で、北半球が夏から秋へと移行する時期に南半球に現れるフェレル循環は、下端における摩擦が強いほど強くなる結果となった。摩擦が強いほど、強いフェレル循環が形成された理由を Held and Hou (1980) で示された下層での南北質量輸送に関する式を用いて考察した。この式は、下層での南北質量輸送の強さが、表面応力（摩擦係数と下端での東西風の積）に比例することを表す。各摩擦係数で行った実験で

得られた下端東西風をもとに下端での表面応力を解析したところ、摩擦係数が大きいほど、下端での東西風自体は弱くなるが、表面応力は強くなる結果となった。下端での摩擦が強いほど表面応力が強くなったことは、Held and Hou (1980) の式に従えば、下層での南北質量輸送も強くなることを意味する。フェレル循環の強さを下層での南北質量輸送の強さとして見なせば、摩擦が強いほど強いフェレル循環が形成される理由を Held and Hou (1980) で与えられた南北質量輸送の式で定性的に説明できることがわかった。

# 目次

第1章	はじめに	1
1.1	ハドレー循環	1
1.2	ハドレー循環の過去の研究	1
1.3	本研究の着眼点	4
1.4	本研究の目的と論文の構成	5
第2章	数値モデルの概要	5
2.1	支配方程式系	6
2.2	境界条件	7
2.3	数理モデル化の概要	7
2.4	離散化の概要	7
第3章	定常ハドレー循環に関する追試	8
3.1	Held and Hou (1980) の追試	9
3.1.1	実験設定	9
3.1.2	定常状態の判別	10
3.1.3	子午面流線関数, 子午面東西風	14

---

3.1.4	上端と下端における東西風 . . . . .	19
3.2	Lindzen and Hou (1988) の追試 . . . . .	21
3.2.1	実験設定 . . . . .	21
3.2.2	質量流線関数 . . . . .	22
3.2.3	子午面東西風, 子午面温位場 . . . . .	25
3.2.4	地表面東西風 . . . . .	27
第 4 章	季節変化するハドレー循環の数値実験	27
4.1	実験設定 . . . . .	29
4.2	標準実験 . . . . .	31
4.3	摩擦係数を変えた場合の実験 . . . . .	40
第 5 章	まとめ	44
謝辞		48
付録 A	数値モデルの構築	49
A.1	支配方程式系 . . . . .	50
A.2	モデル支配方程式系への変形 . . . . .	51
A.3	空間離散化 . . . . .	53
A.4	時間離散化 . . . . .	56
A.5	数値計算の流れ . . . . .	57

---

付録 B 展開関数の性質	57
B.1 球面調和関数の性質 . . . . .	58
B.2 チェビシエフ多項式の性質 . . . . .	60
付録 C 水平拡散を入れた場合の実験	64
C.1 背景と目的 . . . . .	65
C.2 実験設定 . . . . .	66
C.3 結果の比較 . . . . .	67
参考文献	70

# 第1章 はじめに

## 1.1 ハドレー循環

地球大気には、ハドレー循環と呼ばれる大規模な流れが存在する。この流れは、赤道付近で温められ上昇した空気が極側へと移動し、亜熱帯付近で下降し、赤道へと向かうものである。現実の地球大気においては、この循環は、東西平均した南北鉛直面内の流れとして確認される (図 1.1)。図 1.1 において両半球の低緯度に存在する循環がハドレー循環である。さらに、地球大気の本ハドレー循環の幅や強さは、季節変化する (図 1.2)。

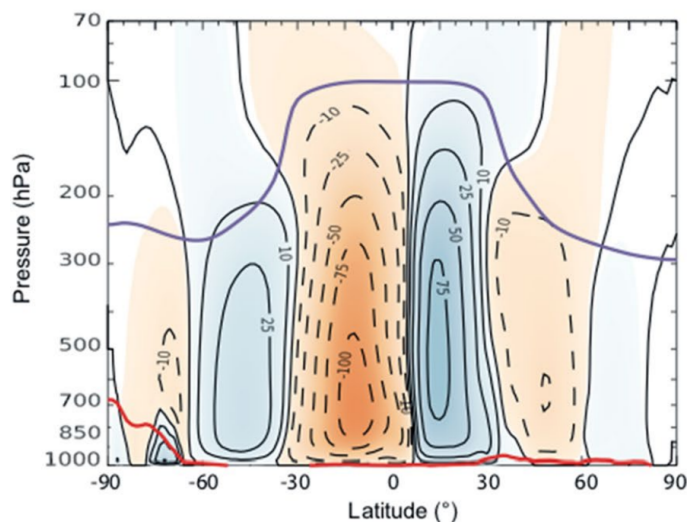


図 1.1: 1979-2017 年で年平均された、質量流線関数の等値線 (Lucas et al. (2021) から引用)。質量流線関数の単位は、 $10^9 \text{ kg s}^{-1}$  であり、横軸は緯度、縦軸は圧力である。質量流線関数は、正の等値線に沿う時計回りの流れおよび、負の等値線に沿う反時計回りの流れがあることを意味する。紫線は、対流圏界面の位置 (高度) であり、赤線は、地表面気圧である。

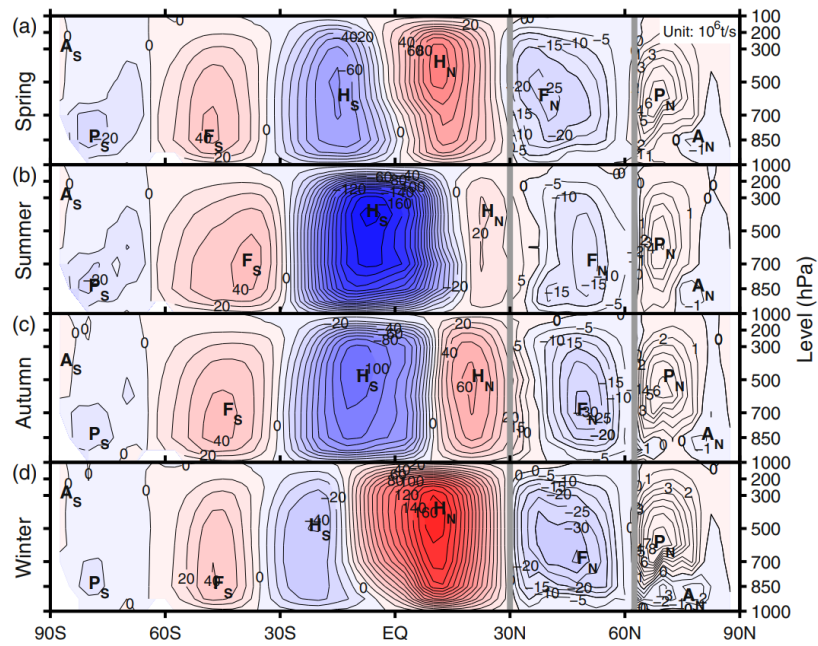


図 1.2: 1981-2010 年の NCEP1 再解析データを用いて描画された質量流線関数 (Qian et al. (2015) から引用). 質量流線関数の単位は  $10^9 \text{ kg s}^{-1}$  であり, 横軸は緯度, 縦軸は圧力である. 四つの図はそれぞれ, (a) 3-5 月平均, (b) 6-8 月平均, (c) 9-11 月平均, (d) 12-2 月平均の結果である. (b) 北半球が夏の場合, 南 (冬) 半球側のハドレー循環は, 北半球側へと拡大し, 北半球のハドレー循環は (a) の場合に比べて弱くなっている.



## 1.2 ハドレー循環の研究

ハドレー循環を調べた研究は、現在に至るまで数多く存在する。その中でも、ハドレー循環の南北幅や強さといった力学構造は、自転軸対称（東西一様）な枠組みで調べられてきた。自転軸対称ハドレー循環を調べた研究として、Held and Hou (1980) がある。Held and Hou (1980) は、ニュートン加熱冷却<sup>\*1</sup>による熱強制を受ける乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系を枠組みとして用いた。ニュートン加熱冷却の放射平衡温位場として赤道対称な分布を与えて、流れが定常状態かつ非粘性であることを仮定して、ハドレー循環の南北幅や亜熱帯ジェットの強度などの解析解を導出した。この研究では、解析解だけでなく、数値計算により得られる定常解も示された。ハドレー循環の南北幅に関しては、解析解が、粘性が弱い場合の数値計算解とほぼ一致し、現実のハドレー循環の南北幅とも大きな差のない結果となった。

しかし、Held and Hou (1980) で得られたハドレー循環は、現実の地球大気の本ハドレー循環に比べると弱いものであったと Lindzen and Hou (1988) は指摘した。Lindzen and Hou (1988) は、加熱分布の与え方に注目して、Held and Hou (1980) とは異なり、以下の赤道非対称なニュートン加熱冷却の放射平衡温位場  $\theta_E$  を与えた

Held and Hou (1980) :

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3\sin^2\phi - 1) + \Delta_v\left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\right) \quad (1.1)$$

Lindzen and Hou (1988) :

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3(\sin\phi - \sin\phi_0)^2 - 1) + \Delta_v\left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\right). \quad (1.2)$$

ここで、 $(\phi, z)$  は、緯度、高度であり、 $\Delta_H, \Delta_v$  は、それぞれ赤道と極の温位差および鉛直方向の温位差を決めるパラメータであり、 $H$  はモデルトップの高度、 $\Theta_0$  は放射平衡温位場  $\theta_E$  の全球平均である。 $\phi_0$  は、Lindzen and Hou (1988) で、「heating center」等と呼ばれており、本論文では  $\phi_0$  を「加熱中心の緯度」と呼ぶ。Lindzen and Hou (1988) は、 $\phi_0 > 0^\circ$  で与えることにより、北半球が夏、南半球が冬で固定されている設定で数値計算を行った。結果として得られる赤道非対称ハドレー循環、東西風には、以下のような性質がある。まず、冬（南）半球の本ハドレー循環が夏（北）半球の本ハドレー循環より非常に強く、南北幅も夏半球のものより大きい。東西

<sup>\*1</sup>モデルにおける実際の温位  $\theta$  が、設定した放射平衡温位場  $\theta_E$  に近づくようにはたらく熱強制。熱力学方程式中で、

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \dots = \dots - \frac{\theta - \theta_E}{\tau}$$

として表される。ここで  $\theta$  は温位、 $t$  は時刻、 $\tau$  は放射緩和時定数である。

風分布における亜熱帯ジェットも冬半球側のものが夏半球側のものより非常に強い結果となった。これらの性質は現実の地球大気におけるハドレー循環 (図 1.2), 東西風の性質と定性的に一致している。また, 加熱中心の赤道からのずれがわずかであっても, 赤道対称ハドレー循環に比べると冬半球のハドレー循環がかなり強くなる結果が得られた。

その後, Fang and Tung (1999) は, 季節が時間とともに変化する場合のハドレー循環を調べた。Fang and Tung (1999) で与えられた  $\theta_E$  は, Lindzen and Hou (1988) と同じ関数形の

$$\frac{\theta_E}{\Theta_0} = 1 - \Delta_H(\mu - \mu_0)^2 + \Delta_v z \quad (1.3)$$

である ( $\mu = \sin \phi$ )。ただし, 加熱中心  $\mu_0$  を固定して実験した Lindzen and Hou (1988) とは異なり, 360 日 (約 1 年) の周期で時間変化する

$$\mu_0(t) = \mu_{0\max} \sin\left(\frac{2\pi t}{360 \text{ days}}\right) \quad (1.4)$$

を用いた。ここで,  $t$  は時刻であり,  $\mu_{0\max}$  は,  $\mu_0$  の最大値である。Fang and Tung (1999) で得られたハドレー循環は, Lindzen and Hou (1988) で得られたハドレー循環の性質をよく表現しており, 冬半球側のハドレー循環が強くなり, 夏半球側のハドレー循環は弱くなった。しかし, Lindzen and Hou (1988) の結果とは異なり, 加熱中心の赤道からのずれがわずかであっても, 南北のハドレー循環の強弱に強い赤道非対称性は現れなかった。

### 1.3 本研究の着眼点

上記三つの研究では,  $\theta_E$  の与え方は異なるが, 基本的には同じ枠組み (自転軸対称, 乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系, ニュートン加熱冷却による熱強制) でハドレー循環が調べられた。しかし, Fang and Tung (1999) のみ下端境界条件の与え方が異なる:

Held and Hou (1980), Lindzen and Hou (1988) :

$$\text{下端風速に比例する摩擦条件} : \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = Cv$$

Fang and Tung (1999) :

$$\text{粘着条件} : u = v = 0.$$

下端風速に比例する摩擦条件は, 下端における風速をゼロに近づけるようにはたらく。その一方で, 粘着条件は, 下端風速をゼロとする条件である。この二つの条件には, 下端における風速がゼロかそうでないかに大きな違いがある。そこで, 下端

を含めた下層においての、ハドレー循環やフェレル循環<sup>\*2</sup>による南北質量輸送、および子午面循環全体にも違いが現れるのではないかと考えた。

## 1.4 本研究の目的と論文の構成

そこで本研究では、下端境界条件の与え方により季節変化するハドレー循環の構造がどのように異なるのかを調べる。Fang and Tung (1999) との対応関係についてまとめると表 1.1 となる。本研究で与える下端境界条件は、Held and Hou (1980) および Lindzen and Hou (1988) で用いられた、下端風速に比例する摩擦条件である。この下端境界条件は、鉛直拡散係数  $\nu_V$  と摩擦係数  $C$  の与え方により、摩擦の強さが異なる ( $C$  を大きくすると摩擦は強まり、下端風速はよりゼロに近づく)。本研究では、 $\nu_V$  の値は、Fang and Tung (1999) と同じ値で固定して、いくつかの  $C$  の値で実験を行う。そして、得られた実験結果を比較することで、下端境界条件が季節変化するハドレー循環にもたらす違いを考察する。

表 1.1: 先行研究と本研究の違い

		Fang and Tung (1999)	本研究
放射平衡温位場	赤道に関して	非対称	
	時間変化	する	
下端境界条件		粘着条件 $u = v = 0$	下端風速に比例する摩擦 $\nu \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \nu \frac{\partial v}{\partial z} = Cv$
鉛直拡散係数		$3.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章では、本研究で構築した数値モデルの概要を説明する。第 3 章では、数値モデルの妥当性を確かめるために行った Held and Hou (1980) と Lindzen and Hou (1988) の追試結果を示す。第 4 章では、季節変化するハドレー循環の数値実験結果を示す。まず、Fang and Tung (1999) との比較を行い、次に、摩擦係数  $C$  の値の違いによって、得られる結果がどのように異なるのかを考察する。そして、第 5 章はまとめである。

<sup>\*2</sup>本研究で用いる自転軸対称な系では、(パラメータなどの設定にもよるが) ハドレー循環とは逆回転の循環がハドレー循環より極側の亜熱帯から中緯度に現れる。先行研究にならい、この逆循環をフェレル循環と呼ぶことにする。ただし、本来の(地球大気の)フェレル循環の形成を考えるうえでは、東西平均からのずれの成分がもたらす効果を考慮に入れる必要がある。そのため、本研究で扱うフェレル循環は、あくまで自転軸対称な系で現れるフェレル循環であることに注意したい。

## 第2章 数値モデルの概要

この章では、本研究で用いた数値モデルの概要を説明する。以降では、空間三次元を想定した数値モデル構築の概要を説明する。数値計算には、自転軸対称二次元化して実験を行った。なお、数値モデル構築に関する詳細は、付録 A と付録 B を参照されたい。

### 2.1 支配方程式系

支配方程式系は乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\Omega v \sin \phi - \frac{uv \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2\Omega u \sin \phi + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\Theta_0} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\theta) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\theta \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) = -\frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \nu_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

これらは上から順に、東西流運動方程式、南北流運動方程式、静力学平衡の式、熱力学方程式、非圧縮の式である。文字の定義は

$\lambda$  : 経度,  $\phi$  : 緯度,  $z$  : 高度,  $t$  : 時刻

$\mathbf{u} = (u, v, w)$  : 東西, 南北, 鉛直流速,  $\theta$  : 温位,  $\Phi$  : ジオポテンシャル

$\Omega$  : 自転角速度,  $a$  : 惑星半径,  $g$  : 重力加速度,  $\tau$  : ニュートン加熱冷却の緩和時定数

$\theta_E$  : 放射平衡温位場,  $\Theta_0$  :  $\theta_E$  の全球平均,  $\nu_V$  : 鉛直拡散係数

である。

## 2.2 境界条件

鉛直境界条件は,

$$\begin{aligned} \text{上端 } (z = H) : \quad w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \\ \text{下端 } (z = 0) : \quad w = 0; \quad \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu; \quad \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = Cv; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

である。ここで、 $H$  はモデル上端の高度で、 $C$  は摩擦係数である。両端で  $w = 0$  は、運動学的境界条件と呼ばれ、鉛直境界を横切る流れが存在しないことを表している。残りの境界条件は、力学的境界条件と呼ばれる。 $u, v$  に対する、上端での境界条件は、応力が存在しないためのものであり、下端では、下端風速に比例する摩擦がはたらく。温位に対しては、両端で熱フラックスが存在しないようにする境界条件である。

## 2.3 数値モデル化の概要

2.1 節で示した支配方程式系を 2.2 節の境界条件のもと時間積分することで数値解を得る。まずは、非圧縮の式を自動的に満たすように流速場をトロイダル・ポロイダル展開する。東西流、南北流運動方程式に対しては、鉛直渦度、水平発散の式に変形する。いくつかの式変形をすると、(2.1)-(2.5) の式は、鉛直渦度、水平発散、温位に関する時間発展方程式に帰着する。

## 2.4 離散化の概要

時間発展方程式を数値的に解くには離散化する必要がある。本モデルでは、空間離散化にスペクトル法を用いる。スペクトル法を用いることには、以下の利点があることが石岡 (2004) で示されている:

- 通常、展開関数系として滑らかな関数系を使うので、偏微分を差分近似することに伴う誤差がなく、差分法に比べて高精度の解を得ることができる。

- 展開関数系として、偏微分方程式に含まれる演算子の固有関数系を使うことができれば、離散化して得られる常微分方程式が非常に簡単になる。

スペクトル法には、領域の形が複雑な場合に展開関数系を簡単には構築できない欠点も存在するが、本研究では、以上の長所を考慮に入れてスペクトル法を用いる。

本モデルでは、水平方向には球面調和関数を鉛直方向にはチェビシェフ多項式を用いて展開する。一般的な大気力学コア<sup>\*3</sup>では、鉛直方向には差分法が用いられることが多い。一方で、Ishioka et al. (2022) では鉛直方向にもスペクトル展開を用いる大気力学コアの精度の検証などが行われた。その結果、鉛直方向にスペクトル展開を用いることは、鉛直方向の展開の自由度が低い場合でも精度のよい解が得られ、鉛直方向の展開の自由度を大きくするにつれ誤差が小さくなることが示された。そこで、本モデルも、鉛直方向の離散化にスペクトル展開を用いることにした。

以上の方法 (水平方向: 球面調和関数, 鉛直方向: チェビシェフ多項式) で、境界条件も含めてスペクトル展開を行う。時間発展方程式をスペクトル展開することで得られる常微分方程式は、時間離散化する必要がある。時間離散化には、セミインプリシット法を用いる。本モデルでは、非線形項に対しては二次のアダムズバッシュフォース法 (陽解法) を線形項に対してはクランクニコルソン法 (陰解法) を用いる。

以上の離散化を経て、展開係数に対する連立方程式が得られる。本研究では LU 分解を用いて、展開係数に対する三本の時間発展方程式を解く。

なお、水平方向の展開や微分には、竹広他 (2006) によって開発された階層的地球流体スペクトルモデル集ライブラリ `spml` を用いる。

---

<sup>\*3</sup>惑星大気の気象や気候を調べる際には、運動方程式、熱力学方程式、連続の式といった力学過程に、放射、対流、乱流による効果をモデル内でパラメータ化して表現した物理過程も含めて解かれる。力学コアは、これら過程のうち力学過程のみを取り出した枠組みである。

## 第3章 定常ハドレー循環に関する追試

ここでは、数値モデルが問題なく構築され、自転軸対称ハドレー循環に関する妥当な解を得られるかを確認するために追試計算を行った。追試として、Held and Hou (1980) と Lindzen and Hou (1988) の数値実験を行った。本数値モデルは、Held and Hou (1980) および Lindzen and Hou (1988) で用いられた数値モデルと同じでない。なぜなら、空間離散化手法として、本数値モデルではスペクトル法が、Held and Hou (1980) および Lindzen and Hou (1988) では差分法が用いられているためである。そのため、完全に同じ条件では追試をできてはいないが、先行研究と遜色ない結果を得ることができた。以降ではまず、3.1 節で Held and Hou (1980) の追試計算結果の説明をし、3.2 節で Lindzen and Hou (1988) の追試計算結果を説明する。

### 3.1 Held and Hou (1980) の追試

この節では、自転軸対称で赤道対称なハドレー循環を調べた Held and Hou (1980) の追試結果を説明する。3.1.1 節で、追試の実験設定を説明する。その次に、定常状態の判別から始めて、子午面流線関数、子午面東西風、上端と下端における東西風の追試結果を示す。

#### 3.1.1 実験設定

Held and Hou (1980) は、

$$\nu_V = 0.5, 1.0, 2.5, 5.0, 10.0, 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

の各値に対して、定常状態の数値解を得ている。そこで、本研究でも、上記の  $\nu_V$  について追試を行った。

$\nu_V$  以外の設定は以下のとおりである。

放射平衡温位場：

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3\sin^2\phi - 1) + \Delta_v\left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\right)$$

パラメータの値：

$$\Omega = 2\pi/(8.64 \times 10^4) \text{ s}^{-1}, a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m s}^{-2}, H = 8.0 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\Theta_0 = 300 \text{ K}, \Delta_H = 1/3, \Delta_v = 1/8, \tau = 20 \text{ days},$$

$$C = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$$

解像度等：

水平切断波数：126, 緯度格子点数：192,

鉛直切断波数：48, 鉛直格子点数：49,

時間刻み幅：120 s, 積分時間：1000 days, 出力間隔：1 day.

放射平衡温位場とパラメータの値は, Held and Hou (1980) と同じものを用いた。また, 格子点数は, Held and Hou (1980) とおおよそ同じになっている (Held and Hou (1980) は, 赤道から極まで 90 グリッドで, 鉛直方向には 50 グリッド)。全ての  $\nu_V$  に対する実験で初期場を等温 (300 K), 静止大気で与え, 上記のように 1000 日積分した。

### 3.1.2 定常状態の判別

まずは, 各実験で定常状態に至ったかどうかの確認をする。確認の方法として, (a) 500 日後, (b) 750 日後, (c) 1000 日後の子午面東西風分布を用いる。 (a), (b), (c) で, 東西風分布にほとんど違いがなければ, 定常状態に至ったと考える。そして, (c) の結果を本追試で得られた定常解として定義して, Held and Hou (1980) の結果と比較する。

図 3.1 に各  $\nu_V$  の値を用いて計算された, (a) 500 日後, (b) 750 日後, (c) 1000 日後の東西風分布を示す。

まず (i)  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  から確認する。 (i) の (a) と (b) から見ると, 緯度約  $32 - 34^\circ$  の領域で, 等値線の数 (a) から (b) にかけて増えている。実際, 緯度  $32^\circ$  で等値線の本数を比較すると, (a) では 9 本であるが, (b) では 10 本である。この変化は,  $(\phi, z) = (34^\circ, H)$  の領域の東西風が強化されたことを意味する。 $(\phi, z) = (34^\circ, H)$  の極大値は, (b) から (c) にかけてわずかではあるが領域が広がっている。(b) と (c) の比較では, 緯度  $36 - 40^\circ$  で, 東西風の南北構造がより締まるような時間変化がおきたことも確認できる。さらに, (c) の高緯度では, 東西風の等値線に波打つような構造があり, 緯度  $85^\circ$  付近では, 負の東西風となる高波数



成分が目立つ。これらから (i) は、定常状態に至っていないと判断した。本研究では、このようになった理由を以下のように考察した。

(i)  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合に、本追試計算では、高波数成分が現れ定常解を得られなかった。一方で Held and Hou (1980) では、定常解が得られており高波数成分も現れていない (図 3.1 (i))。高波数成分が現れるかどうかは、数値計算手法の違いに起因するかもしれない。なぜなら、Held and Hou (1980) で空間離散化に用いられた差分法には、一般的に数値拡散<sup>\*4</sup>が含まれており、これが高波数成分の出現を抑えている可能性があるためである。水平拡散を入れた場合の数値実験では、高波数成分は抑えられ、Held and Hou (1980) の結果によく似た定常解が得られることを確認した。この数値実験結果は、付録 C にまとめられている。数値計算手法の違いを考慮に入れ、かつ後述の計算結果が Held and Hou (1980) の結果とよく一致していることから、(i)  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合に、本実験で定常解を得ることができなかったことは、本数値モデルの解き方に誤りがあることを示唆するわけでない判断した。(i)  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  に対しては、Held and Hou (1980) と定常解の比較はできないが、800 – 1000 日で時間平均した結果を示す。

(ii) では、(a) と (b) の緯度  $34 - 36^\circ$ 、高度 8 km 付近の極大値の領域がわずかに時間変化 (領域の面積が広がっている) している。この変化以外に、(ii) では目立つ構造の変化は見られない。そして (iii)-(vi) に関しては、(a)-(c) にかけてほとんど違いがなく、これらでは、定常状態に至ったと判断し、(c) 1000 日後の結果を Held and Hou (1980) の結果と比較する。(i) に現れる高波数成分は (ii)-(v) では現れない。その一方で、(vi) の、中高緯度での東西風の等値線には高波数成分が目立つ。比較的  $\nu_V$  が大きい実験の中で、(vi)  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  でのみ高波数成分が目立つ理由は今後調べる必要がある。

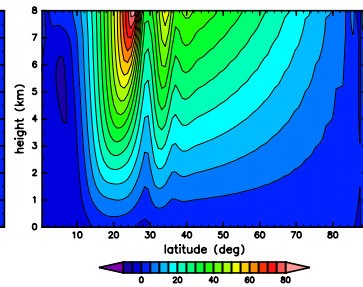
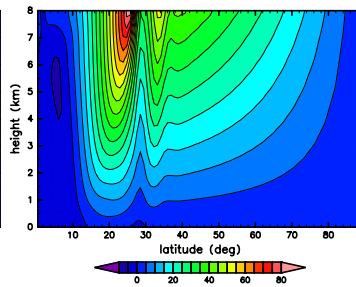
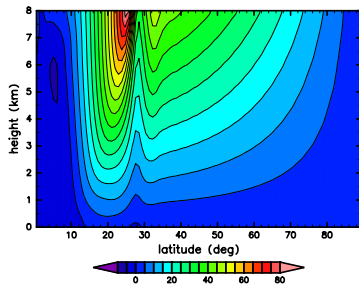
<sup>\*4</sup>物理的な拡散とは区別される、差分法で離散化することにより現れる拡散項。

(i)  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後

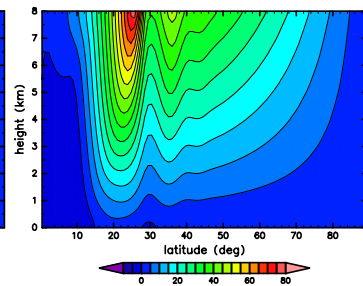
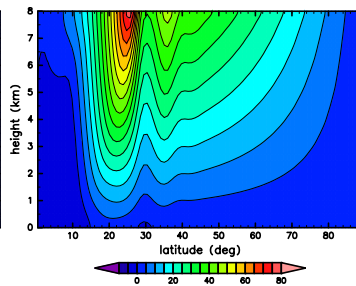
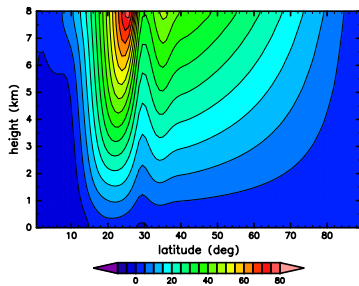


(ii)  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後

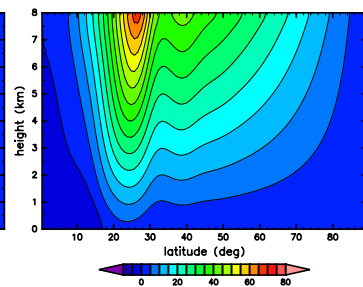
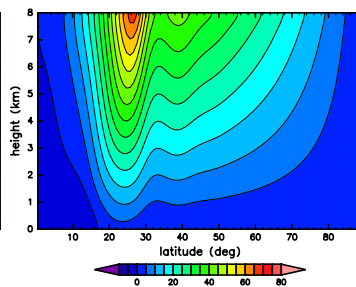
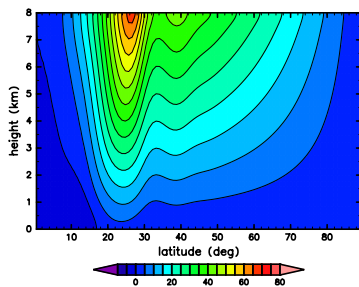


(iii)  $\nu_V = 2.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後

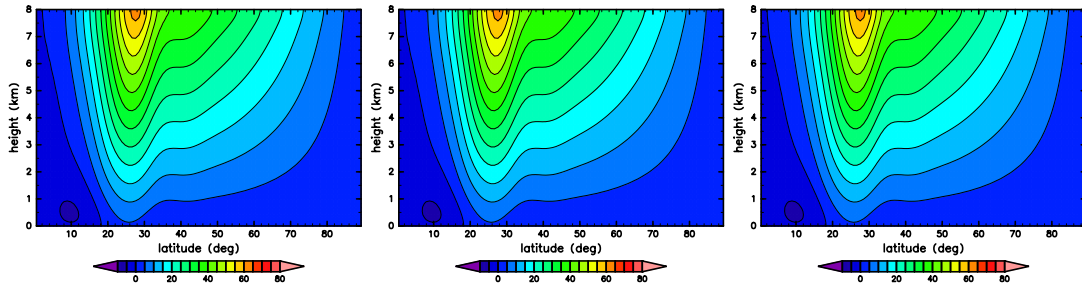


(iv)  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後

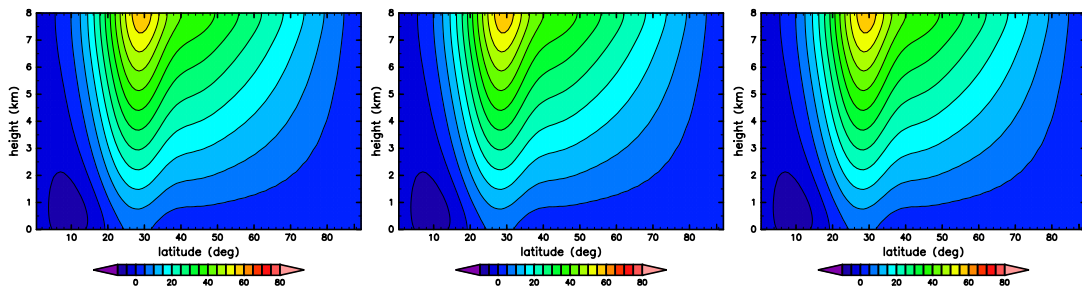


(v)  $\nu_V = 10.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後



(vi)  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後

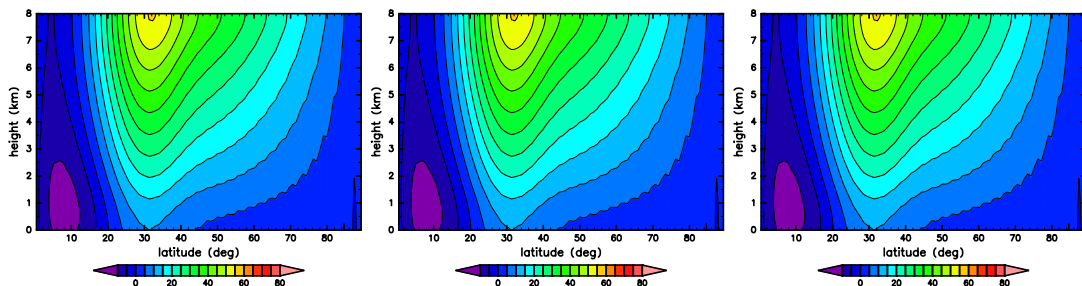


図 3.1: (i) から (vi) の各  $\nu_V$  の値で計算された, 各時刻 (a) 500 日, (b) 750 日, (c) 1000 日における東西風分布. 等値線間隔は  $5 \text{ m s}^{-1}$  である.

### 3.1.3 子午面流線関数, 子午面東西風

ここでは, 子午面流線関数と子午面東西風の追試結果を示し, Held and Hou (1980) の結果と比較する. 図 3.2 に流線関数と東西流の子午面分布を示す. 流線関数  $\Psi$  は, Held and Hou (1980) と同じ,

$$v = -\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad (3.1)$$

で定義される. (i)-(vi) で, 本追試結果の特徴を説明し, その次に Held and Hou (1980) との比較をする.

まず, (i)  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の子午面流線関数から述べる. 本実験結果の子午面流線関数では, ハドレー循環が, 上層では緯度  $25^\circ$ , 下層では  $10 - 15^\circ$  の南北幅をもつ. 流線関数の最大値は, モデル中間高度より上に存在する. 緯度  $15 - 25^\circ$  には, フェレル循環が存在する. 以上の特徴は Held and Hou (1980) の定常解でも確認できる. 一方で, 本実験結果の緯度  $50 - 60^\circ$  には, 高波数成分が存在する. これは, Held and Hou (1980) と異なる結果であり, 本実験結果は定常に至っていないことを意味する. 次に子午面東西風を見ると, 亜熱帯ジェットが緯度  $25^\circ$  に存在し, 緯度  $30 - 35^\circ$  には二つ目の極大値 (以降では, 「第二のジェット」と呼ぶ) が存在することがわかる. これらは Held and Hou (1980) の結果と同じである. 本実験結果は定常解ではないが, 流線関数, 東西風ともに Held and Hou (1980) の定常解と概ね一致している.

次に (ii)  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の子午面流線関数を確認する. (i) と同じく, 本実験結果では, ハドレー循環が上層と下層で異なる南北幅をもつ. 流線関数の最大値はモデル中間高度より上に存在し, 緯度  $15 - 25^\circ$  にはフェレル循環が存在する. これらは Held and Hou (1980) と同じ結果である. しかし, 緯度  $10^\circ$ , 高度  $2 - 3 \text{ km}$  において, 流線関数の等値線が, 本実験結果では上下に繋がっているが, Held and Hou (1980) では分離されている.  $(\phi, z) = (30^\circ, 0.5 \text{ km})$  に存在する正の循環の広がり, 本実験結果より Held and Hou (1980) のものの方が大きい. 東西風における亜熱帯ジェットは, 緯度  $25^\circ$  にあり, それより少し極側の  $35^\circ$  付近には第二のジェットがある. さらに, 緯度  $30^\circ$  の下端では, 負の東西風となっており, これは Held and Hou (1980) と異なる結果である.

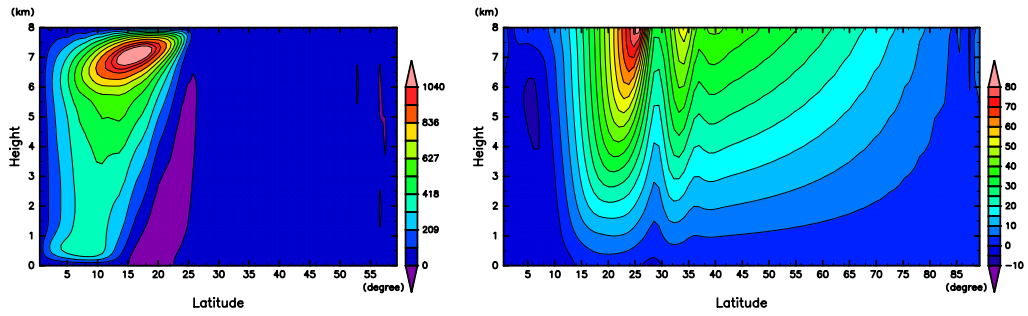
(iii)  $\nu_V = 2.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合には, 本実験結果と Held and Hou (1980) の結果にほとんど違いがない. 実際, 本実験結果の流線関数において, 形, 値の大きさ, 最大値をとる位置など Held and Hou (1980) の結果と一致する. 東西風についても, 亜熱帯ジェットおよび第二のジェットの位置や強度が, Held and Hou (1980) の結果とよく一致する.

(iv)-(vi) でも, 流線関数, 東西風ともに Held and Hou (1980) に遜色ない結果が得られた. しかし, (vi)  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  における東西風の本実験結果で, 中緯度から高緯度にかけて等値線に高波数成分が目立つ. これは Held and Hou (1980) に

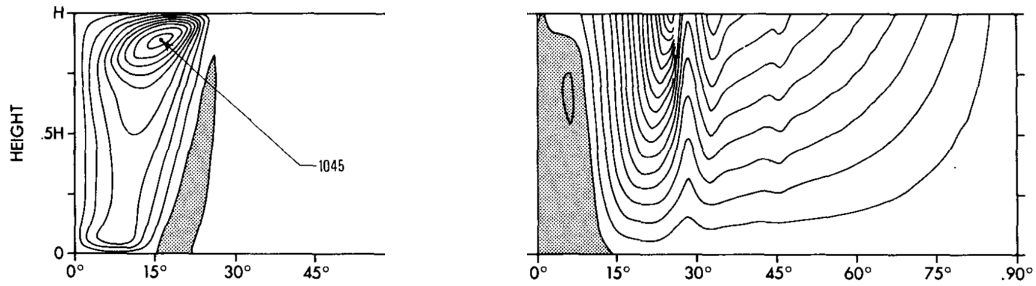
は現れていない。

(i)  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 本実験結果

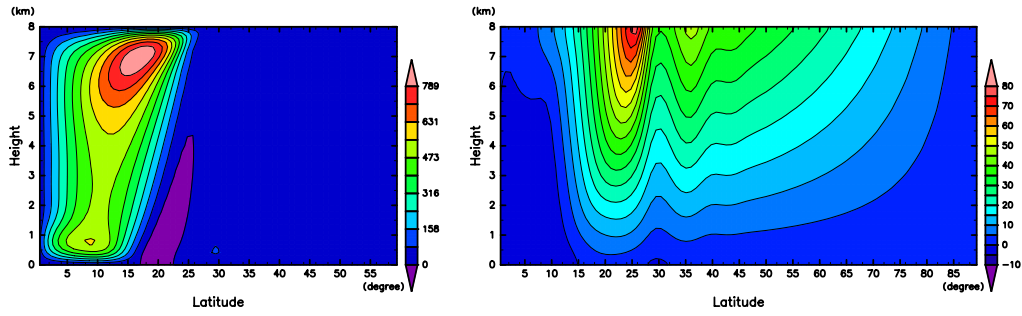


(b) Held and Hou (1980) の結果

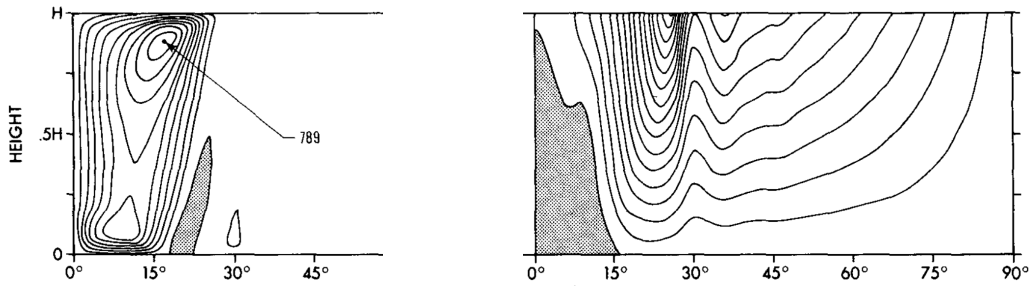


(ii)  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 本実験結果

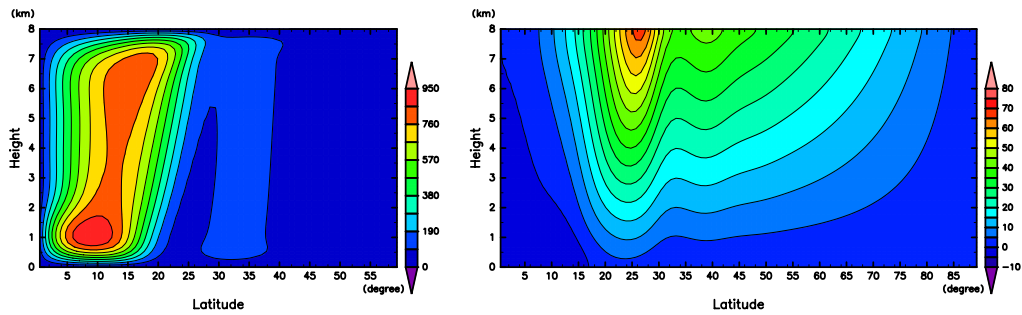


(b) Held and Hou (1980) の結果

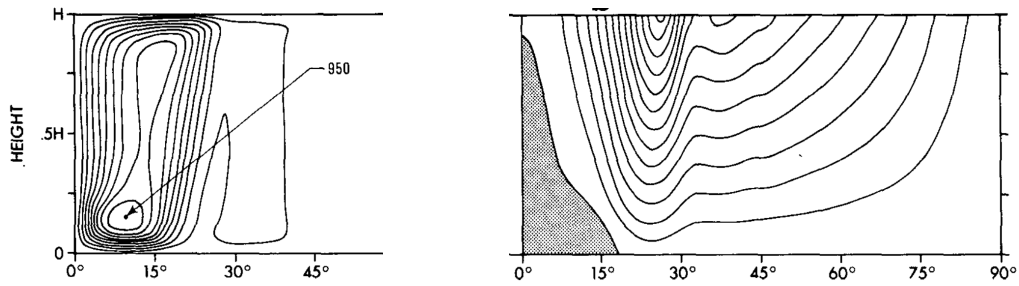


(iii)  $\nu_V = 2.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 本実験結果

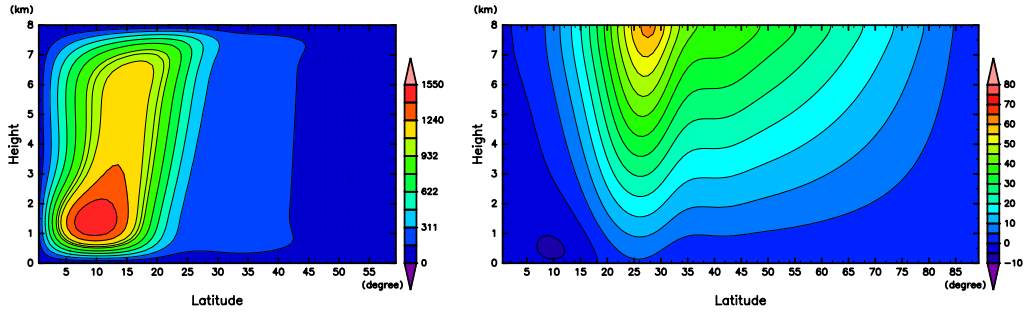


(b) Held and Hou (1980) の結果

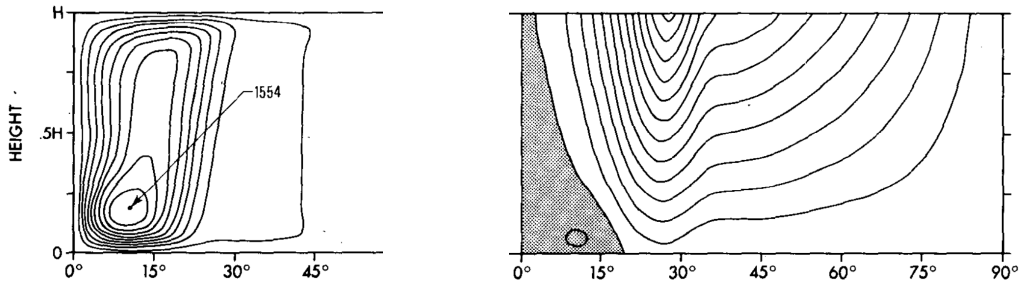


(iv)  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 本実験結果

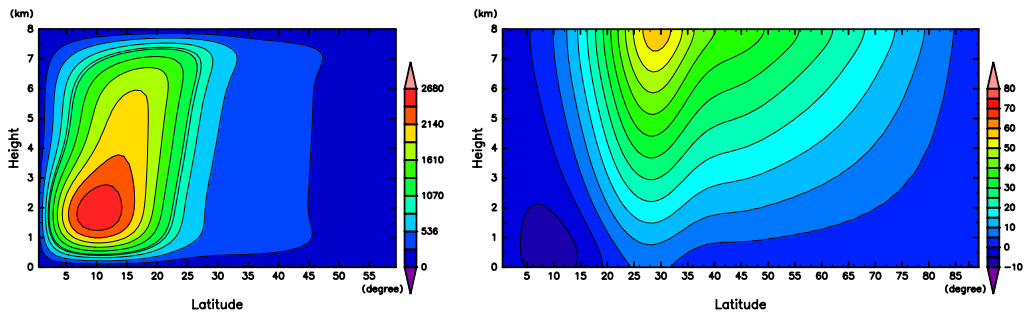


(b) Held and Hou (1980) の結果

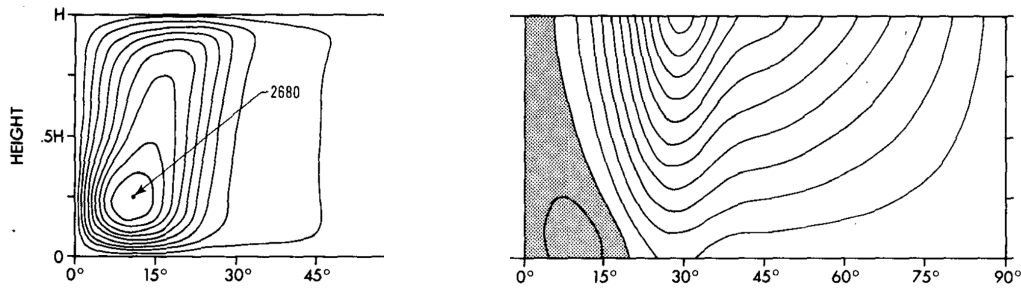


(v)  $\nu_V = 10.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 本実験結果

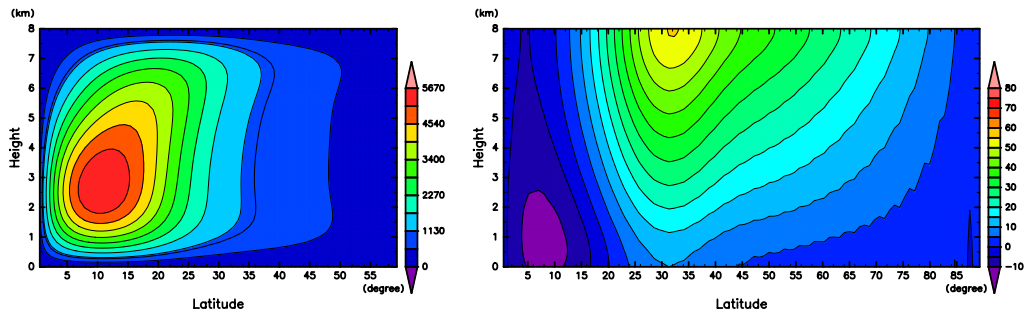


(b) Held and Hou (1980) の結果



(vi)  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

(a) 本実験結果



(b) Held and Hou (1980) の結果

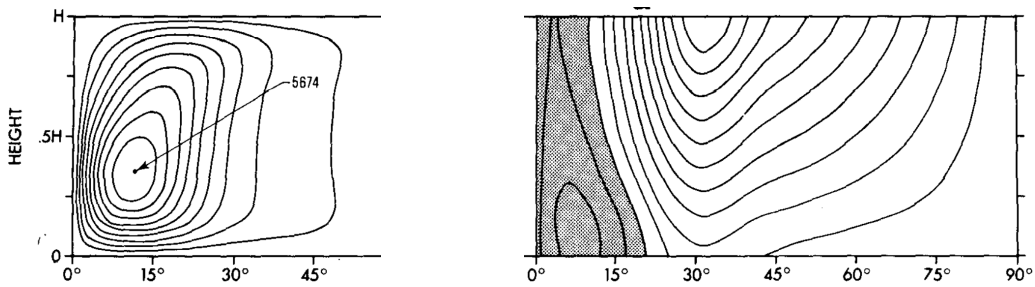


図 3.2: (i) から (vi) の各  $\nu_V$  の値を用いた実験で得られた (a) 本実験結果の定常解と (b) Held and Hou (1980) の定常解. ただし, 本実験結果の (i)  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  は, 800-1000 日で時間平均した結果である.

左図が流線関数  $\Psi$  であり, 右図が東西風である. 流線関数は, その等値線に沿う流れの向きと強さを示す物理量である. ここでは, 正の等値線に沿う時計回りの流れがあることを意味し, 等値線間隔が狭いほど, より強い流れが存在する.

(b) の縦軸において  $H = 8000 \text{ m}$  であり, 横軸は緯度である. (b) 左図の等値線間隔は, ( $\Psi_{\max}$  を流線関数の最大値として)  $0.1\Psi_{\max}$  であり, (b) 右図の等値線間隔は  $5 \text{ m s}^{-1}$  である. また, 影付きの領域は負の値を意味する. (a) 本実験結果の等値線間隔は, 流線関数, 東西風ともに, Held and Hou (1980) と同じである.



### 3.1.4 上端と下端における東西風

次に、上端における東西風の緯度分布を示す (図 3.3). 図 3.3 に示されているのは、赤線:  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 青線:  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 緑線:  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  および黒線: 解析解, である. ただし, 解析解は,

$$R = \frac{gH\Delta_H}{\Omega^2 a^2}, \quad \phi_H = \left(\frac{5}{3}R\right)^{1/2} \quad (3.2)$$

として,

$$0 \leq \phi \leq \phi_H : u_M(\phi, H) = \Omega a \sin^2 \phi / \cos \phi \quad (3.3)$$

$$\phi_H < \phi : u_E(\phi, H) = \Omega a \cos \phi [(1 + 2R)^{1/2} - 1] \quad (3.4)$$

から求める. ここで,  $u_M$  は, 非粘性極限における角運動量保存解であり,  $u_E$  は放射平衡温位場と温度風平衡にある状態の解である. また, 本実験設定では,  $\phi_H \sim 26.64^\circ$  である.

まず  $\phi < \phi_H$  では, 本実験結果の  $\nu_V = 1.0, 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  で, 東西風が緯度とともに増大しており, 常に正である. 一方で,  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  では,  $0 - 6^\circ$  の範囲において, 東西風は緯度とともに減少しており,  $0 - 10^\circ$  では, 負である. そして亜熱帯ジェットの緯度は,  $\nu_V$  が大きくなるほど, 解析解からのずれが大きくなっている.  $\phi < \phi_H$  の領域では全体的に,  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の結果が, 角運動量保存解  $u_M$  に最も近くなっている. 以上の特徴は, Held and Hou (1980) の結果と一致する.

本実験結果では, 亜熱帯ジェットの緯度より極側で, 東西風は緯度とともに減少する. しかし,  $\nu_V$  の値によって  $\phi < 45^\circ$  での増減が異なる.  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合, 単調に減少しているが,  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合,  $36 - 40^\circ$  では増加に転じる. この特徴は,  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合にも確認でき,  $36^\circ$  付近に二つ目の極大値 (第二のジェット) が存在する.  $45^\circ < \phi$  では, 各  $\nu_V$  に対する結果の全てが,  $u_E$  と概ね一致している. これらの性質も, Held and Hou (1980) の結果と整合的である.

最後に, 地表面東西風分布を図 3.4 に示す. 図 3.4 に示されているのは, 赤線:  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 青線:  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 緑線:  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  および黒線: 解析解, である. ただし, 解析解は,  $\phi \leq \phi_H$  では

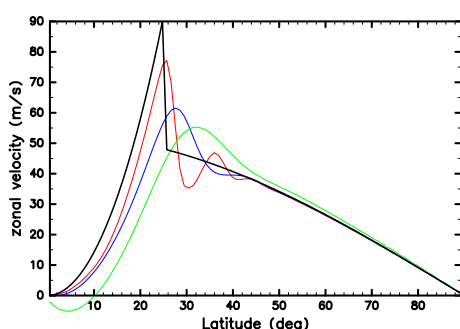
$$u(\phi, 0) = -\frac{25 \Omega a H \Delta_H}{18 C \tau \Delta_v} R^2 \left[ \left(\frac{\phi}{\phi_H}\right)^2 - \frac{10}{3} \left(\frac{\phi}{\phi_H}\right)^4 + \frac{7}{3} \left(\frac{\phi}{\phi_H}\right)^6 \right] \quad (3.5)$$

から求め,  $\phi_H < \phi$  では  $u(\phi, 0) = 0$  とする.

地表面東西風  $u(\phi, 0)$  に関しても, Held and Hou (1980) とほとんど一致する結果が得られた. 本実験結果の鉛直拡散係数が最も大きい  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  では, 緯度  $0 < \phi < 20^\circ$  では東風であり, それより極側では西風である.  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合も,  $18^\circ$  付近を境にして, 東風から西風へと変わる. これらの性質は, Held and

Hou (1980) と同じである. 本実験結果の  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  でも,  $14^\circ$  付近を境にして, 西風になる. しかし,  $\nu_V = 5.0, 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合と異なり, この緯度より極側で, 常に正になるわけではない. 実際, 緯度  $30^\circ$  付近で負の値となる. これらの特徴は, Held and Hou (1980) で得られた結果と同じである. 一方で, 本実験結果では, 東風から西風へと変わるのが, 緯度  $14^\circ$  付近であり, これは, 解析解に比べると小さい. Held and Hou (1980) では, この境界の緯度が  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  と, 解析解でほとんど違いがない.

(a) 本実験結果



(b) Held and Hou (1980) の結果

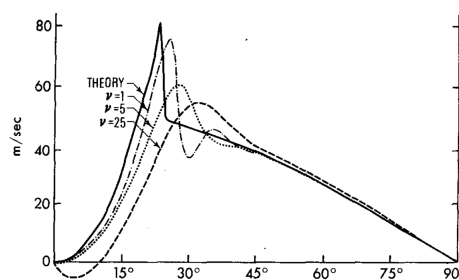
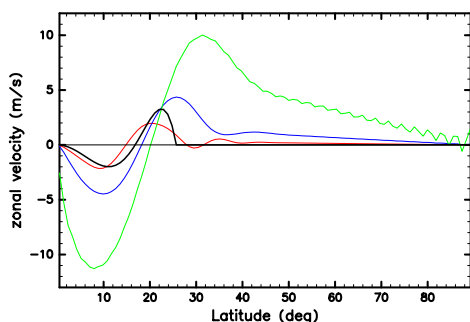


図 3.3: 上端における東西流  $u(\phi, H)$ . (a) が本実験結果であり, (b) が Held and Hou (1980) の結果である.

(a) の各線は, 黒: 解析解, 赤:  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 青:  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 緑:  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  である.

(a) 本実験結果



(b) Held and Hou (1980) の結果

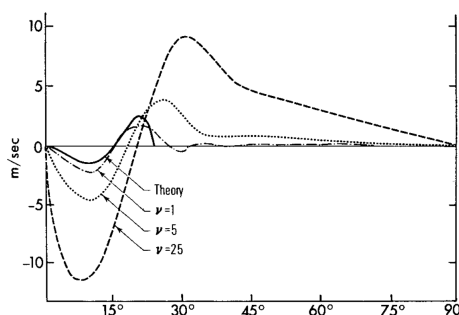


図 3.4: 地表面東西風の緯度分布. (a) が本実験結果であり, (b) が Held and Hou (1980) の結果である.

(a) の各線は, 黒: 解析解, 赤:  $\nu_V = 1.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 青:  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , 緑:  $\nu_V = 25.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  である.

## まとめ

本節では、自転軸対称かつ赤道対称なハドレー循環の定常解を調べた Held and Hou (1980) の追試結果を示し、比較を行った。本追試計算で得られた定常解は、Held and Hou (1980) で得られた結果をよく表現している。一方で、東西風の第二のジェット of の構造など細かい違いは存在する。これらの違いは、数値モデル内の空間離散化手法の違い (本モデル: スペクトル法, Held and Hou (1980): 差分法) が原因であるかもしれない。本論文では、この違いについて追究しない。

## 3.2 Lindzen and Hou (1988) の追試

本節では、自転軸対称かつ赤道非対称なハドレー循環の定常解を調べた Lindzen and Hou (1988) の追試結果を説明する。まずは、実験設定を説明し、その後に追試結果を示す。

### 3.2.1 実験設定

Lindzen and Hou (1988) で用いられた、ニュートン加熱冷却の放射平衡温位場は、

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3(\sin\phi - \sin\phi_0)^2 - 1) + \Delta_v\left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\right) \quad (3.6)$$

である。ここで  $\phi_0$  は加熱中心の緯度である。ここでは、

$$\phi_0 = 0^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ$$

のそれぞれの値に対して数値実験を行う。これらの値は、Lindzen and Hou (1988) で用いられた値と同じである。なお  $\phi_0 > 0^\circ$  に関しては、加熱中心が北半球側にあることから、北半球が夏で、南半球が冬を想定している。その他の設定は、固定され

ており, 以下のとおりである.

パラメータの値:

$$\begin{aligned}\Omega &= 2\pi/(8.64 \times 10^4) \text{ s}^{-1}, \quad a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ m s}^{-2}, \quad H = 1.5 \times 10^4 \text{ m} \\ \Theta_0 &= 300 \text{ K}, \quad \Delta_H = 1/6, \quad \Delta_v = 1/8, \quad \tau = 20 \text{ days}, \quad \nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\ C &= 5.0 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}\end{aligned}$$

解像度等:

水平切断波数: 126, 緯度格子点数: 192,  
鉛直切断波数: 32, 鉛直格子点数: 33,  
時刻幅: 120 s, 総積分時間: 1000 days, 出力間隔: 1 day.

パラメータの値は, Lindzen and Hou (1988) と同じである (Held and Hou (1980) では,  $H = 8.0 \times 10^3 \text{ m}$ ,  $\Delta_H = 1/3$ ). Lindzen and Hou (1988) では, 格子点間隔が緯度方向に  $1^\circ$  であり, 鉛直方向に  $0.75 \text{ km}$  であるので, この格子点間隔とほぼ同じになるように本実験の格子点数を設定した. 初期場は, 等温 ( $300 \text{ K}$ ) 静止大気で与える.

上記の設定で, 1000 日積分をすると, 全ての  $\phi_0$  の場合に対して定常解を得ることができた. 次に, (a) 本実験で得られた定常解と (b) Lindzen and Hou (1988) の定常解を比較する.

### 3.2.2 質量流線関数

まず, 質量流線関数  $\Psi_\rho$  から確認する.  $\Psi_\rho$  の定義は,

$$v = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Psi_\rho}{\rho_0} \right), \quad w = \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\Psi_\rho}{\rho_0} \right) \quad (3.7)$$

であり, Lindzen and Hou (1988) と同じである (Held and Hou (1980) では流線関数). ここで  $\rho_0$  は, ブシネスク近似における参照密度である. Lindzen and Hou (1988) では,  $\rho_0$  の値が記載されていないが, 本追試では, 空気の密度  $1 \text{ kg m}^{-3}$  を用いた. 図 3.5 に, 各  $\phi_0 = 0^\circ, 2^\circ, 6^\circ$  で得られた質量流線関数を示す.

(i)  $\phi_0 = 0^\circ$  に示されているのは, 赤道対称な場合に得られる質量流線関数<sup>\*5</sup>である. 質量流線関数の空間的広がり, 最大値, 最小値の大きさおよび位置など Lindzen and Hou (1988) の結果と概ね一致する.

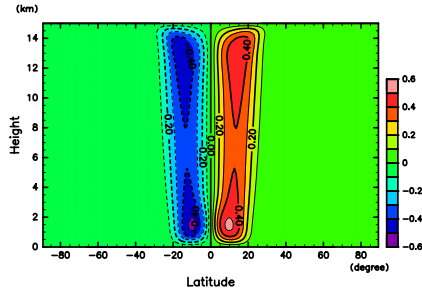
<sup>\*5</sup>本節の数値実験で用いた,  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  で得られる赤道対称ハドレー循環の結果は, 前節にも示した. しかし, 前節で得られた結果と本節で得られた結果は同じでない. なぜなら, 前節の数値実験で用いられた  $H, \Delta_H$  とは異なる値を本節の数値実験では用いているためである (解像度なども違う). 本節と前節では, 描画している物理量 (本節: 質量流線関数, 前節: 流線関数) や等値線間隔などが異なることに注意したい.

(ii)  $\phi_0 = 2^\circ$  の本追試結果では, 得られる南北のハドレー循環は赤道非対称となる. 本実験結果の南半球側のハドレー循環において, 最小値はモデル中間高度より上に存在する. 一方で, Lindzen and Hou (1988) では, 最小値は中間高度より下に存在する. また最小値は, 本実験結果では  $-0.8$  より小さく, Lindzen and Hou (1988) の  $-0.77$  よりわずかに小さい. (i) の赤道対称なハドレー循環と比べると, 本実験結果では, 南半球 (冬) のハドレー循環は強くなり, 北半球 (夏) のハドレー循環は弱くなる. これは, Lindzen and Hou (1988) の結果と同じである.

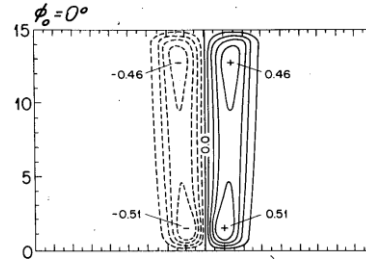
加熱中心の赤道からの変位が (ii) の場合より大きい (iii)  $\phi_0 = 6^\circ$  では, 本実験結果で, 南北のハドレー循環の赤道非対称性はより強くなる. 本実験結果では, 冬半球側のハドレー循環において質量流線関数の最小値は  $-2$  より小さく, 北半球側では,  $0 - 0.20$  である. 本実験結果で, 緯度  $-30^\circ$  から  $-20^\circ$  にフェレル循環が現れていることも確認できる. 以上で述べた特徴は, Lindzen and Hou (1988) の結果と概ね一致する. しかし, フェレル循環の高さで比べると, 本実験結果の方が, Lindzen and Hou (1988) の結果より高い.

(i)  $\phi_0 = 0^\circ$

(a) 本実験結果

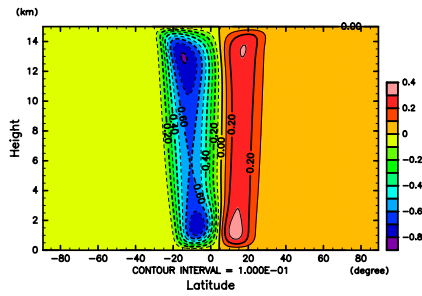


(b) Lindzen and Hou (1988) の結果

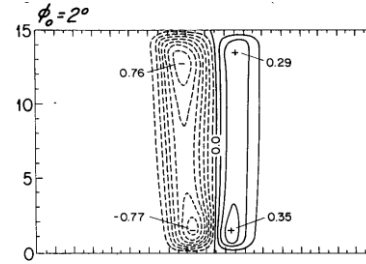


(ii)  $\phi_0 = 2^\circ$

(a) 本実験結果

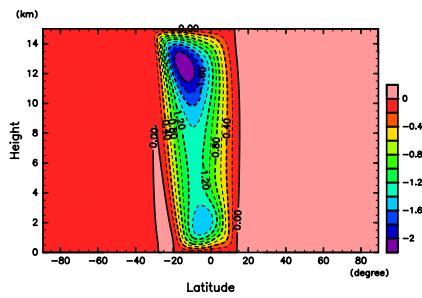


(b) Lindzen and Hou (1988) の結果



(iii)  $\phi_0 = 6^\circ$

(a) 本実験結果



(b) Lindzen and Hou (1988) の結果

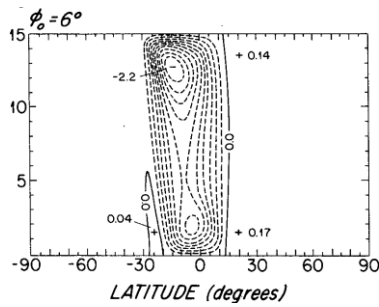


図 3.5: 質量流線関数 (単位:  $10^{10} \text{ kg s}^{-1}$ ). (a) が本実験結果であり, (b) が Lindzen and Hou (1988) の結果である. 等値線間隔は, (i) と (ii) では,  $0.1 \text{ kg s}^{-1}$  であり, (iii) においては  $0.2 \text{ kg s}^{-1}$  である.

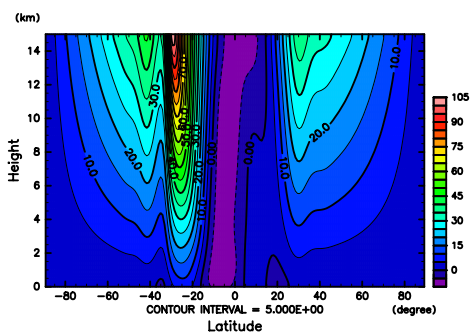
### 3.2.3 子午面東西風, 子午面温位場

$\phi_0 = 6^\circ$  で得られた, 東西風は図 3.6 に描画されている. まず, 本実験結果では, 南半球 (冬) の亜熱帯ジェットが, 北半球 (夏) の亜熱帯ジェットよりかなり強いことがわかる. しかし, 亜熱帯ジェットの強度, 緯度は, 本実験結果と Lindzen and Hou (1988) の結果でわずかに異なる.

これを見るために,  $\phi_0 = 6^\circ$  の本実験で得られた  $z = H$  における東西風の緯度分布を図 3.7 に示す. 図 3.7 より, 南半球の亜熱帯ジェットが  $105 \text{ m s}^{-1}$  で緯度約  $-30^\circ$  に存在し, 北半球の亜熱帯ジェットが  $35 - 40 \text{ m s}^{-1}$  で緯度約  $30^\circ$  に存在することがわかる. 一方で, Lindzen and Hou (1988) には, 南半球の亜熱帯ジェットが,  $98 \text{ m s}^{-1}$  で緯度  $-29^\circ$  に存在し, 北半球の亜熱帯ジェットが,  $30 \text{ m s}^{-1}$  で緯度  $36^\circ$  に存在する, と記述されている. 南半球の亜熱帯ジェットの緯度についてはあまり差がないが, それ以外の要素は差が大きい.

亜熱帯ジェットより少し極側の領域では, 本実験結果と Lindzen and Hou (1988) の結果で, 東西風の構造が異なる. 北半球の緯度  $30 - 40^\circ$  で比較すると, 本実験結果の東西風の等値線は Lindzen and Hou (1988) におけるものより南北方向に締まっている. 一方で, 南半球の緯度  $-40^\circ$  付近では違いがより明確である. 本実験結果では, 第二のジェットが形成されている. 亜熱帯ジェットより少し極側にできる第二のジェットは, Held and Hou (1980) の追試でも現れた. しかし, その強さや南北構造は, 先行研究と異なる結果となった.

(a) 本実験結果



(b) Lindzen and Hou (1988) の結果

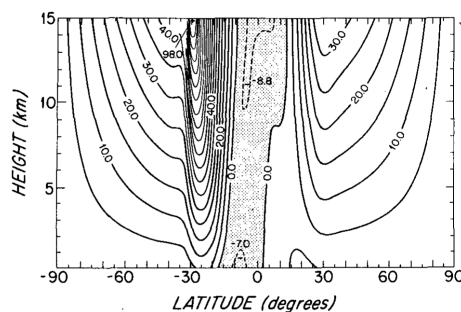


図 3.6:  $\phi_0 = 6^\circ$  で得られた東西流の子午面分布. (a) が本実験結果であり, (b) が Lindzen and Hou (1988) の結果である. 等値線間隔は  $5 \text{ m s}^{-1}$  である.

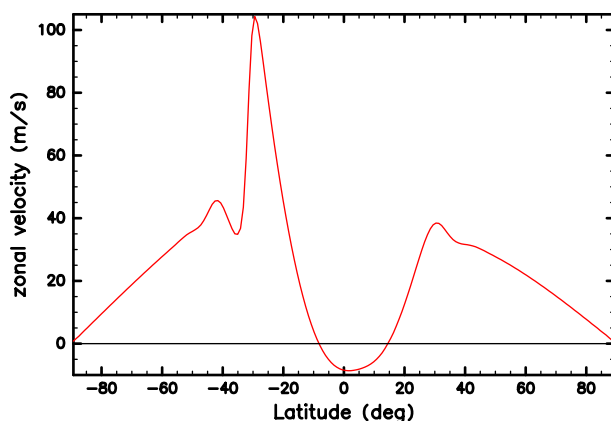


図 3.7:  $\phi_0 = 6^\circ$  で得られた, モデルトップ  $z = H$  における東西流の緯度分布.

$\phi_0 = 6^\circ$  で得られた温位場は図 3.8 に示されている. 図 3.5 に示されている通り, 低緯度にはハドレー循環が存在し, 南北温位勾配は弱い. 一方で,  $0 - 20^\circ$  では, 南北温位勾配がわずかに正であり, 高度が増すにつれて南北温位勾配も強くなっている. そしてこれらの結果は, Lindzen and Hou (1988) で得られた結果と同じである.

(a) 本実験結果

(b) Lindzen and Hou (1988) の結果

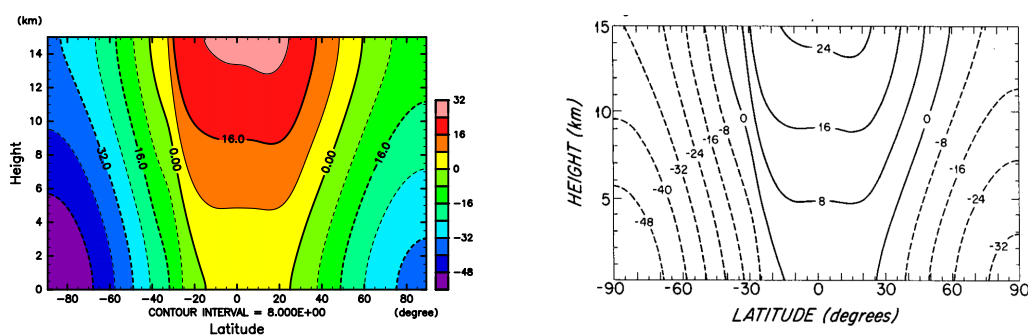


図 3.8:  $\phi_0 = 6^\circ$  で得られた温位場の子午面分布 ( $\theta = 300$ ). (a) が本実験結果であり, (b) が Lindzen and Hou (1988) の結果である. 等値線間隔は 8K である.



### 3.2.4 地表面東西風

最後に地表面東西風分布を確認する。  $\phi_0 = 0^\circ, 2^\circ, 6^\circ, 8^\circ$  で得られた、地表面東西風分布は、図 3.9 に示されている。

まずは、(i)  $\phi_0 = 0^\circ$  から確認する。(i) は赤道対称の場合である。前節の  $\nu_V = 5.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  で得られた結果と同じく、本実験結果では、低緯度において東風で、それ以外では西風である。これは、Lindzen and Hou (1988) の結果と一致する。しかし、極大値、極小値を比べると、本実験結果は、Lindzen and Hou (1988) のものより強い。さらに  $\mu = 0.5 - 0.6$  で本実験結果には、第二の極大、極小が現れる。

(ii)  $\phi_0 = 2^\circ$  になると、南半球 (冬) の地表面東西風は強くなり、北半球 (夏) 側では弱くなる。(i) 赤道対称な場合とは異なり、赤道においてわずかに東風であり、北半球の赤道付近でわずかに西風である。これらは、Lindzen and Hou (1988) の結果と同じである。本実験結果の  $\mu = -0.5$  では、地表面東西風がほぼゼロである。本実験結果の、 $\mu = -0.5$  と  $\mu = 0.5 - 0.6$  にある極小値は、(i) の場合と同じく、Lindzen and Hou (1988) にはないものである。

(iii) では、(ii) で示した性質がさらに明確である。本実験結果の南半球 (冬) では、西風と東風がともに強くなり、赤道においての東風、さらには北半球の低緯度 ( $0.1 < \mu < 0.3$ ) で西風となる。そして北半球の中高緯度では、地表面東西風はかなり弱い。

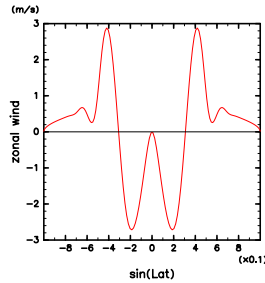
(iv)  $\phi_0 = 8^\circ$  でも (iii) で述べた特徴は確認できる。(i) において本実験結果では、 $\mu = -0.2$  にあった極小値は、(iv) では、 $\mu = -0.1$  付近にまで移動している。本実験結果において  $0.1 < \mu < 0.3$  における西風は (iii) のときより強くなっており、Lindzen and Hou (1988) で得られた結果と同じである。

#### まとめ

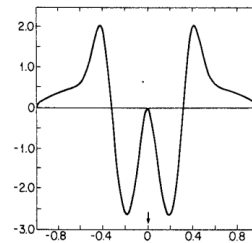
本節では、赤道非対称ハドレー循環を調べた Lindzen and Hou (1988) の追試結果を示し、比較を行った。加熱中心が赤道からずれた場合でも、Lindzen and Hou (1988) と概ね一致する結果を得ることができた。本実験結果には、冬半球側の亜熱帯ジェットの少し極側に極大値 (第二のジェット) が現れており、これは Lindzen and Hou (1988) と異なる結果となった (図 3.6)。

(i)  $\phi_0 = 0^\circ$

(a) 本実験結果

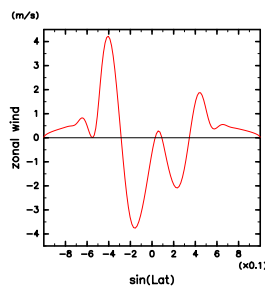


(b) Lindzen and Hou (1988) の結果

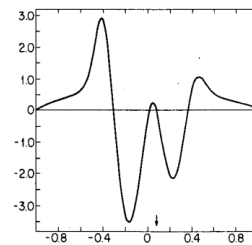


(ii)  $\phi_0 = 2^\circ$

(a) 本実験結果

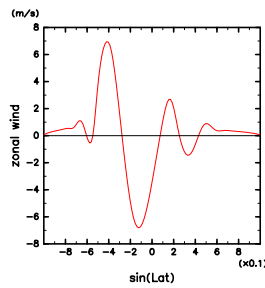


(b) Lindzen and Hou (1988) の結果

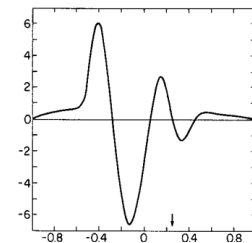


(iii)  $\phi_0 = 6^\circ$

(a) 本実験結果

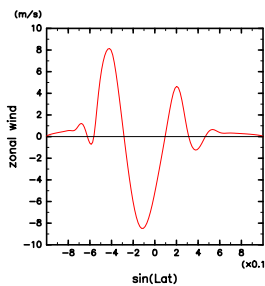


(b) Lindzen and Hou (1988) の結果



(iv)  $\phi_0 = 8^\circ$

(a) 本実験結果



(b) Lindzen and Hou (1988) の結果

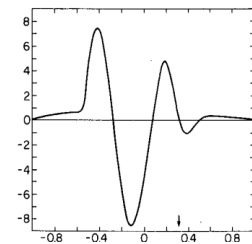


図 3.9: 地表面東西風の緯度分布. 横軸はサイン緯度である.

## 第4章 季節変化するハドレー循環の数値実験

本章では, 季節変化するハドレー循環を調べる. 先行研究である Fang and Tung (1999) では, 下端境界条件として, 粘着条件  $u = v = 0$  が用いられたが本研究では, 下端風速に比例する摩擦条件:

$$\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu, \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = Cv \quad (4.1)$$

を用いる. この境界条件における摩擦係数  $C$  をいくつかの値に設定して実験を行い, 下端境界条件がもたらす違いについて調べる.

4.1 節では, 初期場の与え方や, 解析手法など実験に関する設定を述べる. 4.2 節では, 標準実験の結果を Fang and Tung (1999) の結果と比較する. 4.3 節では,  $C$  の値を変えた場合の実験結果を示し比較する.

## 4.1 実験設定

### パラメータ, 解像度の設定

本章では, 以下の設定で数値実験を行う.

放射平衡温位場:

$$\frac{\theta_E}{\Theta_0} = 1 - \Delta_H(\mu - \mu_0)^2 + \Delta_v z \quad (\mu = \sin \phi)$$

$$\mu_0(t) = \mu_{0\max} \sin\left(\frac{2\pi t}{360 \text{ days}}\right)$$

パラメータの値:

$$\Omega = 2\pi/(8.64 \times 10^4) \text{ s}^{-1}, \quad a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.8 \text{ m s}^{-2}, \quad H = 1.5 \times 10^4 \text{ m}$$

$$\Theta_0 = 300 \text{ K}, \quad \Delta_H = 1/6, \quad \Delta_v = 3.8/\Theta_0 \text{ km}^{-1}, \quad \tau = 20 \text{ days}, \quad \nu_V = 3.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\mu_{0\max} = 0.2$$

解像度等:

水平切断波数: 126, 緯度格子点数: 192,

鉛直切断波数: 48, 鉛直格子点数: 49,

時間刻み幅: 120 s, 総積分時間: 1000 days, 出力間隔: 1 day.

パラメータの値や放射平衡温位場は, Fang and Tung (1999) と同じである. 解像度等に関しては, 第3章と同じとする. 実験に用いる  $C$  の値は,  $C^* = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  として,

$$\frac{C}{C^*} = 100, 10, 2, 1, 0.5, 0.1 \quad (4.2)$$

である. 時刻  $t$  と加熱中心  $\mu_0 = \sin \phi_0$  と北半球, 南半球の季節の対応関係は表 4.1 にまとめられている.

### 初期場の設定

本研究では, Fang and Tung (1999) にならい, 加熱中心が赤道上に固定されている場合に得られる定常解を初期場とする. つまり,  $\mu_0 = 0$  で固定して 1000 日積分することで得られた解 (定常解) を初期場として与える.

## 解析について

Fang and Tung (1999) では, 約 4 か月 (120 日) 経過後から, 周期的な解が現れたと述べられている. 本実験では, 1 年 (360 日) 後には周期的な解が形成されていた (実際には, 計算開始から 1 年以内には周期的な解が形成されていた). そこで, 360-720 日の結果を解析に用いる. 以降では, 時刻表記をするときに 0 日, 30 日などとするが, 実際のデータとしては, 360 日, 390 日のものを用いている.

表 4.1: 時刻と加熱中心の位置および季節の対応関係

$t$ (day)	$\mu_0$	$\phi_0$	北半球	南半球
0	0	$0^\circ$	春	秋
30	0.1	$\sim 5.7^\circ$	↓	↓
60	$\sim 0.17$	$\sim 9.9^\circ$	↓	↓
90	0.2	$\sim 11^\circ$	夏	冬
120	$\sim 0.17$	$\sim 9.9^\circ$	↓	↓
150	0.1	$\sim 5.7^\circ$	↓	↓
180	0	$0^\circ$	秋	春

## 4.2 標準実験

本節では, 標準実験の結果を説明する. ここでは,  $C = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  の値で得られた結果を Fang and Tung (1999) との比較に用いる.

### 子午面流線関数

まずは, 各時刻における子午面流線関数から確認する. 流線関数  $\Psi$  の定義は,

$$v = -\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \quad (4.3)$$

である. 1 年 (360 日) 後から数えて, 30 日ごとに描画した流線関数が図 4.1 に示されている.\*<sup>6</sup> Fang and Tung (1999) との比較のため, 流線関数は無次元化されている. 無次元化された流線関数  $\Psi^*$  の定義は

$$\Psi^* = \Psi / (UH) \quad (4.4)$$

\*<sup>6</sup>Fang and Tung (1999) における等値線間隔などが不明であるため, 図によっては本結果と細かい比較ができない.

である。ここで  $U$  は典型的な東西風速であり、ロスビー数<sup>\*7</sup>  $Ro = U/(2\Omega a)$  を用いて計算する ( $Ro = 0.0283$ )。

(i)-(vi) の本実験結果において、子午面循環の季節変化は以下のとおりである：

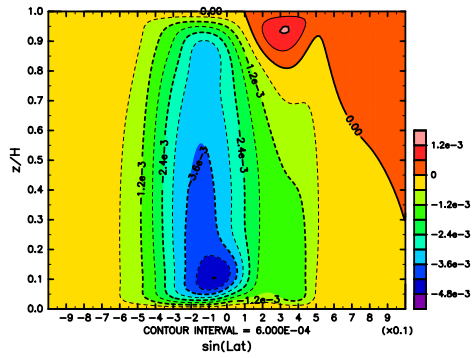
- (i) 30 日後には、南半球のハドレー循環がかなり強くなり、南北幅も大きくなる。一方で、北半球のハドレー循環は弱くなり、循環がモデルの上部へ移動する。
- (ii) (i) のときと同じく、南半球のハドレー循環は強まる。北半球側では、ハドレー循環が弱まり、循環の構造が見えなくなる。
- (iii) 90 日後も (ii) と傾向は同じである。南半球のハドレー循環は強まる (最小値が、(ii) では  $\sim -0.08$ , (iii) では  $\sim -0.011$ )。北半球側では、流線関数が正である領域が (ii) に比べて広がる。
- (iv) 南半球のハドレー循環の強さや幅は、120 日後の結果と (iii) 90 日後の結果で大きな違いはない。北半球側では、流線関数が正である領域が (iii) に比べて拡大しており、正の循環が強化されていることがわかる。
- (v) 150 日後には、南半球のハドレー循環は (iv) に比べてわずかに弱くなっている。北半球では、流線関数が正である領域が広がるが循環の構造自体は見えない。南半球側にはフェレル循環が現れる。
- (vi) 180 日後は、加熱中心が赤道に戻る時刻である。加熱分布は赤道対称であるが、循環の構造は赤道非対称である。南半球のハドレー循環は (v) のときより弱くなっており、循環がモデル中間高度より上部に移動している。北半球にはハドレー循環が現れている。南半球のフェレル循環は (v) のときより強くなる。

南北のハドレー循環の季節変化に関しては、Fang and Tung (1999) の結果と概ね一致する。しかし、循環が現れる時期に関して違いがある。(iv) 120 日後において、Fang and Tung (1999) では、南半球にフェレル循環が存在するが、本実験結果には存在しない。(v) 150 日後になると、本実験結果にも南半球にフェレル循環が現れる。しかし、この時刻で、Fang and Tung (1999) の結果には北半球のハドレー循環が現れているが、本実験結果には現れていない。(vi) 180 日後になると、本実験結果にも北半球のハドレー循環が現れる。しかし、180 日における南半球のフェレル循環の強さと北半球のハドレー循環の強さは、本実験結果では北半球のハドレー循環の方が強く、Fang and Tung (1999) では南半球のフェレル循環の方が強い。

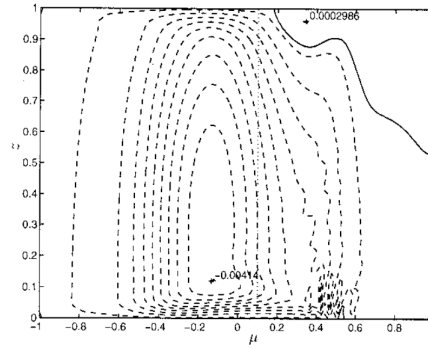
<sup>\*7</sup> コリオリ項に対する移流項の比を表す無次元数。

(i) 30 日後

(a) 本実験結果

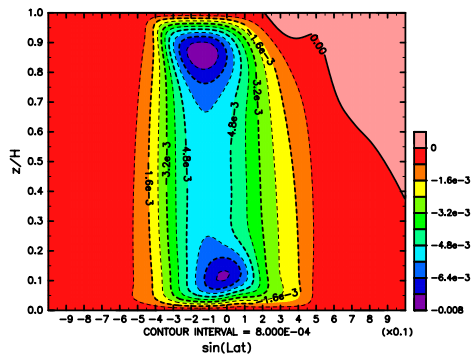


(b) Fang and Tung (1999) の結果

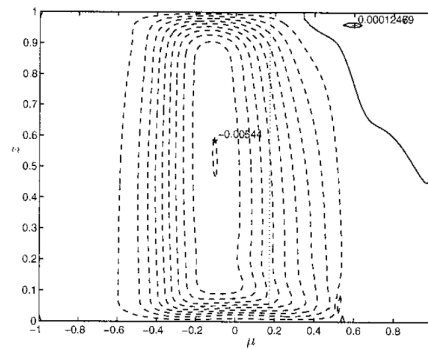


(ii) 60 日後

(a) 本実験結果

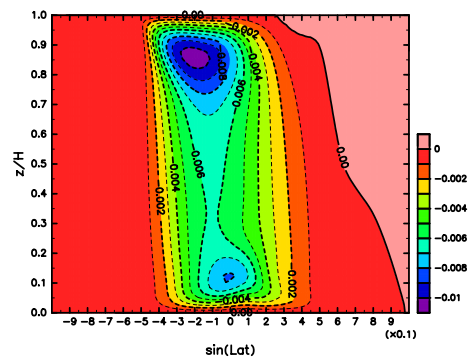


(b) Fang and Tung (1999) の結果

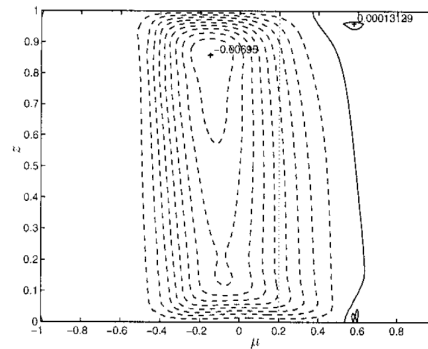


(iii) 90 日後

(a) 本実験結果

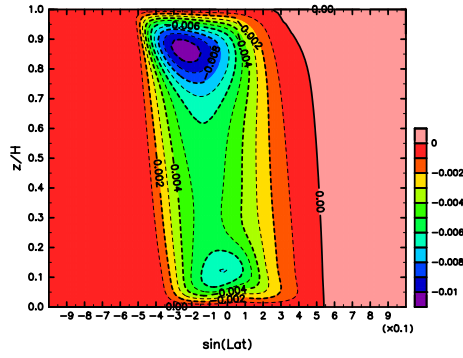


(b) Fang and Tung (1999) の結果

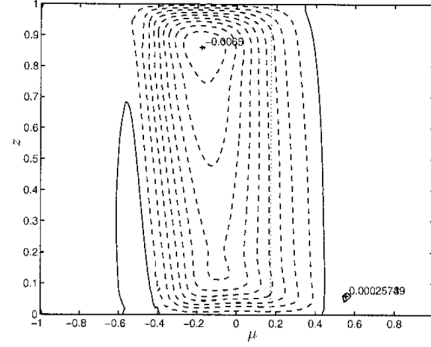


(iv) 120 日後

(a) 本実験結果

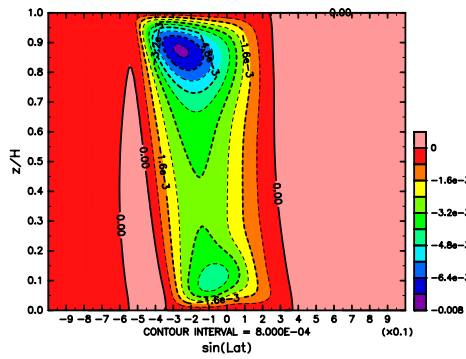


(b) Fang and Tung (1999) の結果

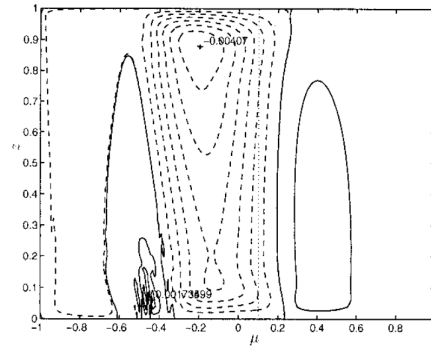


(v) 150 日後

(a) 本実験結果

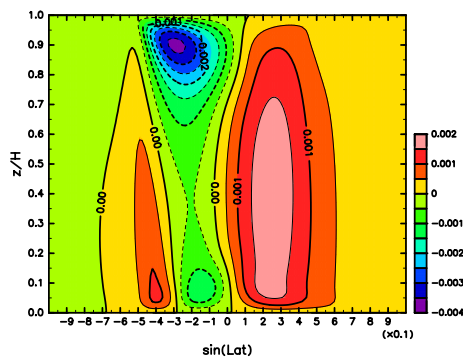


(b) Fang and Tung (1999) の結果



(vi) 180 日後

(a) 本実験結果



(b) Fang and Tung (1999) の結果

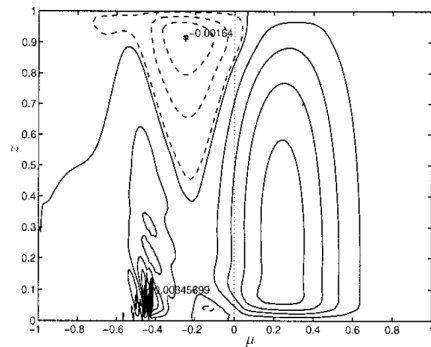


図 4.1: 各時刻における流線関数. 横軸はサイン緯度であり, 縦軸は無次元化された高度 ( $z^* = z/H$ ) である. 流線関数の値も無次元化されており, 定義については (4.4) を確認せよ. (a) が本実験結果であり, (b) が Fang and Tung (1999) の結果である.

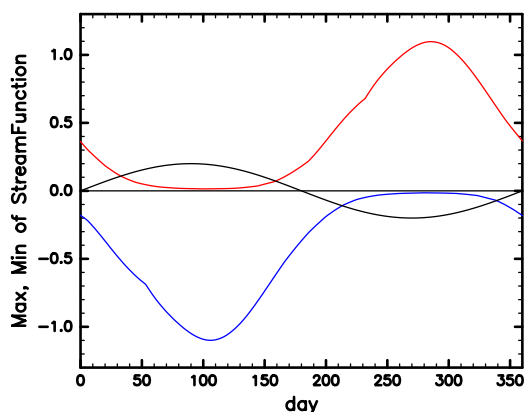


流線関数の最大値, 最小値の季節変化

次に, 流線関数の最大値, 最小値の季節変化を見る. 流線関数の最大値, 最小値の季節変化は図 4.2 に示されている. 横軸は, 1 年後からの 1 年, つまり 360-720 日を実際には範囲としている.

この図は, 子午面における循環の強さが季節とともにどのように変化するかかの指標である. 0-90 日では, 南半球は秋から冬へと, 北半球は春から夏へと移行する. この時期には, 本実験結果で, 南半球の (負の) ハドレー循環は強まり, 北半球の (正の) ハドレー循環は弱まる. 北半球のハドレー循環の強さは, 約 90-120 日ではほとんどゼロとなる (図 4.1 の (iii), (iv)). 加熱中心が南半球側へと移動する 180 日以降は, 今まで述べた, 北半球と南半球の循環の強弱の変化は逆になる. これらの特徴は, Fang and Tung (1999) で得られた結果と同じである.

(a) 本実験結果



(b) Fang and Tung (1999) の結果

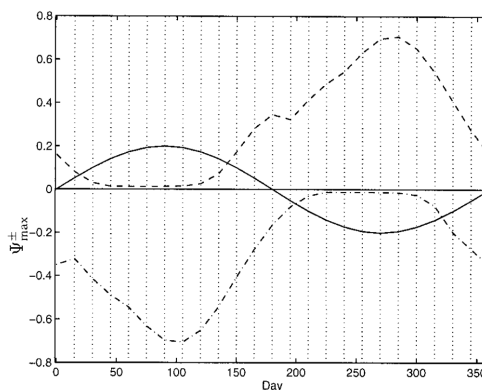


図 4.2: 流線関数の最大値と最小値の時間変化. (a) が本実験結果であり, (b) が Fang and Tung (1999) の結果である.

(a) において, 赤線: 流線関数の最大値, 青線: 流線関数の最小値, 黒線: 加熱中心  $\mu_0(t)$  である.

(b) では, 破線: 最大値, 一点鎖線: 最小値, 実線:  $\mu_0$  である. なお, 流線関数は, 無次元化された値であり, かつここでは 100 を掛けられた値である.

流線関数が最大, 最小をとる緯度の時間変化

流線関数が最大値, 最小値をとる (サイン) 緯度を確認する. これは, 図 4.3 に示されている. 図 4.3 は, 最も強い正の循環 (赤線) および負の循環 (青線) がどの緯度に存在するのかを表す. 流線関数の最大値, 最小値が各時刻で, 実際にどこに存

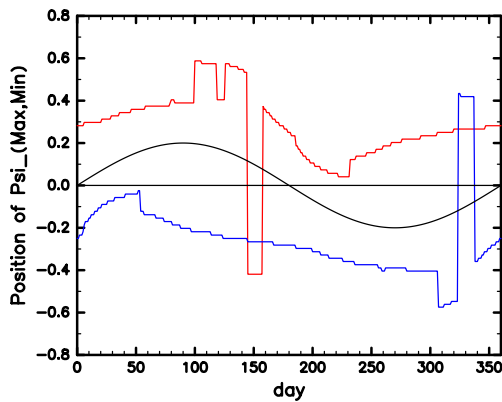
在するのかを確認するために、子午面流線関数を図 4.4 に示す。

図 4.3 における本実験結果を見ると、赤線（最大値）が 1 年のうちのほとんどの時間帯で北半球に存在する（サイン緯度が正）ことがわかる。同様に、青線（最小値）は南半球に存在する（サイン緯度が負）。これは、1 年のうちのほとんどの時間帯で、北（南）半球のハドレー循環が最も強い正（負）の循環であることを意味する。

その一方で、本実験結果の 150 日後には、最大値が南半球に存在する。これは、この時刻で、南半球のフェレル循環が北半球のハドレー循環より強いことを意味する（図 4.4 の (f)）。330 日において最小値が北半球に存在するのも、同様に、北半球のフェレル循環が南半球のハドレー循環より強いことを意味する。このように、Fang and Tung (1999) と同じく、最大値もしくは最小値が片半球にのみ存在する時間帯はあるが、その期間は Fang and Tung (1999) に比べると短い。

最後に、図 4.3 において、本実験結果の 0 日における最小値をとる緯度が Fang and Tung (1999) の結果と異なること、すなわち本実験では、最小値が南半球に存在し、Fang and Tung (1999) では、北半球に存在することの違いを説明する。これは、Fang and Tung (1999) では、0 日において、北半球のフェレル循環が南半球のハドレー循環より強いために、流線関数の最小値が北半球にあると考えることができる。一方で、図 4.4 の (a) 0 日の結果を見ると、本実験では、北半球のフェレル循環は、南半球のハドレー循環より強くない。これは、図 4.1 の (vi) 180 日後の結果と本質的には同じである。つまり、本実験では、加熱中心が赤道に戻ってきたときに、冬半球側のフェレル循環は夏半球側のハドレー循環より弱いことを意味する。これが、0 日における Fang and Tung (1999) の結果との違いをもたらす。

(a) 本実験結果



(b) Fang and Tung (1999) の結果

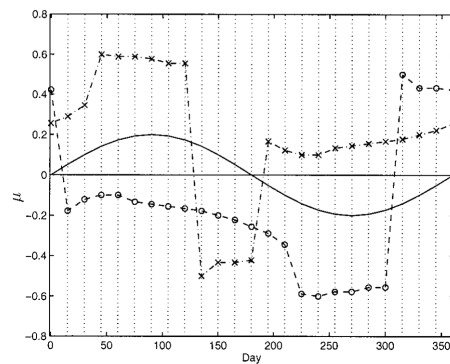


図 4.3: 流線関数が最大値と最小値をとる（サイン）緯度の季節変化. (a) が本実験結果であり, (b) が Fang and Tung (1999) の結果である.

(a) において、赤線: 最大値の緯度, 青線: 最小値の緯度, 黒線: 加熱中心  $\mu_0(t)$  である。

(b) では、x: 最大値の緯度, o: 最小値の緯度, 実線:  $\mu_0$  である。

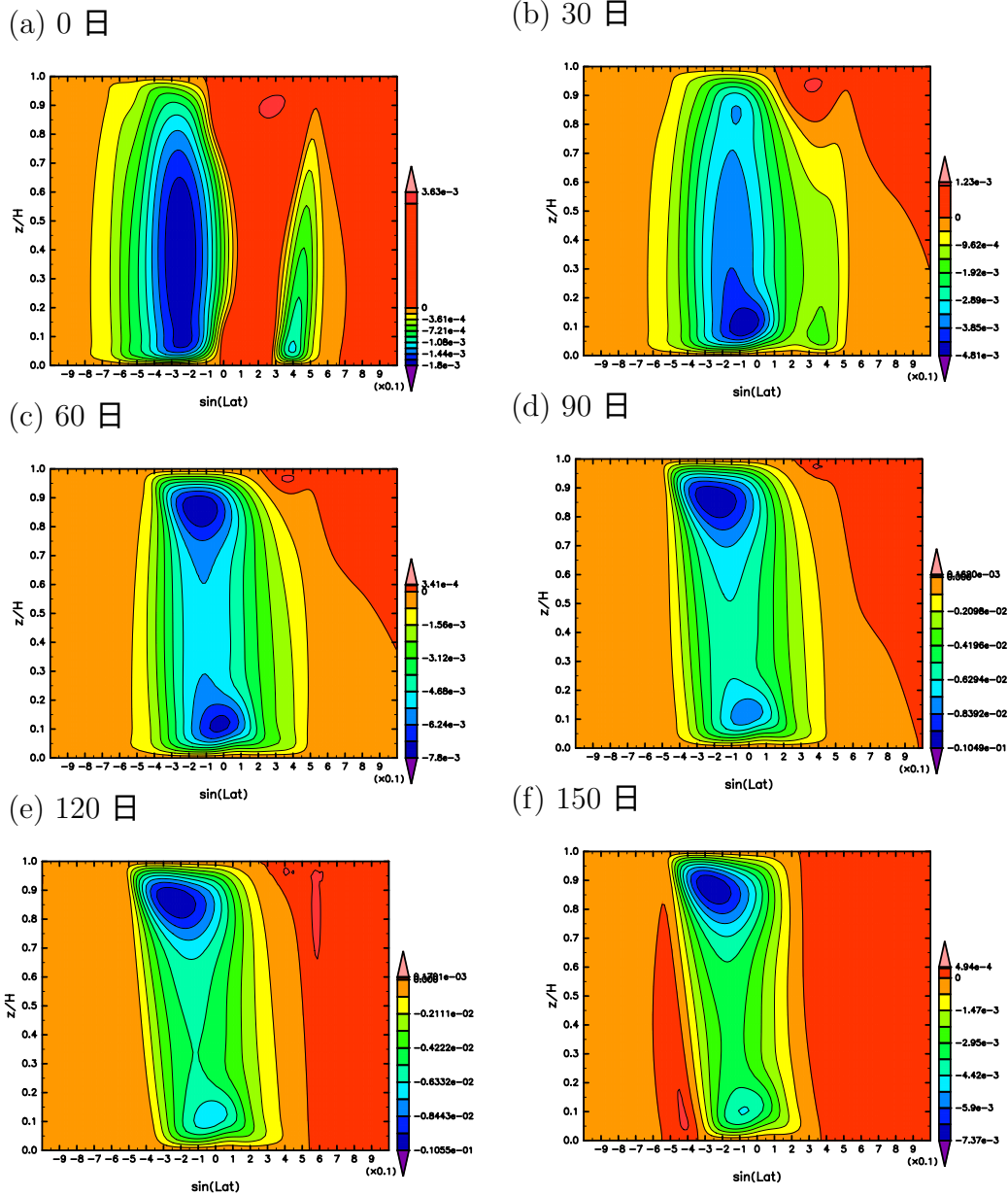


図 4.4: 各時刻における流線関数. 流線関数の最大値, 最小値の場所がわかるように, 等値線をひいている. 負の値に対しては, 等値線間隔を  $0.1\Psi_{\min}$  とし, 正の値に対しては,  $0.9\Psi_{\max}$ ,  $1.0\Psi_{\max}$  としている. なお,  $\Psi_{\min}$ ,  $\Psi_{\max}$  は流線関数の最小値と最大値である.

## 年平均循環の比較

最後に年平均循環を比較する。ここで比較するのは、(i)  $\mu_0 = 0$  に固定された場合に得られる定常解、(ii) 定常解の「年平均」、(iii) 季節変化する解の年平均、である。(i) は、赤道対称ハドレー循環に関する数値実験で得られる結果であり、年平均循環として見なすのは、年平均した加熱分布が概ね赤道対称になると予想できるためである。そのため (i) は年平均加熱分布を与えた場合と解釈できる。(ii) 定常解の「年平均」は、加熱中心  $\mu_0$  を様々な緯度で固定した場合に得られる定常解を平均した結果である。実際には、

$$\mu_0 = -0.2, -0.16, -0.12, -0.08, -0.04, 0, \\ 0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.2$$

で固定して実験を行い、得られた各定常解を用いて平均する<sup>\*8</sup>。(iii) 季節変化する解の年平均では、360-720 日の結果を時間平均することで得る。

図 4.5 は、以上で定義した循環を描画したものである。(i) 年平均加熱分布を与えた場合の循環は、(ii) 定常解の「年平均」循環より弱く、これは、Fang and Tung (1999) の結果と一致する。図 4.1 のとおり、季節変化するハドレー循環自体は各時刻では赤道非対称であるが、(iii) その年平均は赤道対称となる。本実験結果において、ハドレー循環の強さ (単位:  $10^{-3}$ ) を (i)-(iii) で比べる。(iii) では  $3.0 - 3.6$  であり、この値は、(i) の  $1.25 - 1.5$  より大きく、(ii)  $2.5 - 3.0$  よりも大きい。つまり、(iii) 季節変化する場合の年平均循環が最も強い。一方で、Fang and Tung (1999) では、(i) が  $1.05$ 、(ii) が  $2.1$ 、(iii) が  $1.81$  である。つまり、定常解の「年平均」が最も強い。(i)-(iii) を本実験結果と Fang and Tung (1999) の結果で比べても、(i)-(iii) の全てで本実験結果の方が強い循環である。

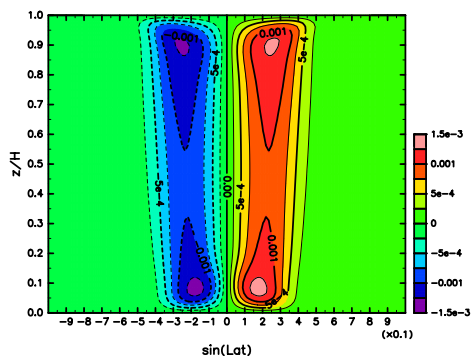
## まとめ

ここでは、 $C = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  で得られた結果を Fang and Tung (1999) の結果と比較した。Fang and Tung (1999) で示された、子午面におけるハドレー循環およびフェレル循環の季節変化は、本実験で下端境界条件として用いた、下端風速に比例する摩擦条件でも現れる。一方で、冬半球側に現れるフェレル循環が夏半球側のハドレー循環より強くなっている期間は、Fang and Tung (1999) の結果より短

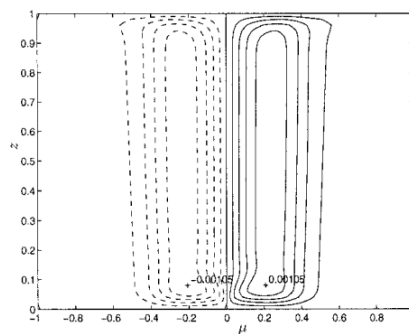
<sup>\*8</sup>ここでの平均は、上記の  $\mu_0$  で得られた定常解を全て 1 回ずつ足して平均をとるわけではない。実際には、 $\mu_0 = -0.2, 0.2$  で得られた定常解は各一回ずつ平均計算に用いて、その他の  $\mu_0$  に対しては二回ずつ平均計算に用いる。このようにするのは、 $\mu_0 = -0.2, 0.2$  は北半球の冬至、および夏至と考えることができ、この  $\mu_0$  を境にして、加熱中心は赤道に戻るためである。そのため、 $\mu_0 = -0.2, 0.2$  を除いた点は、加熱中心が二度通る分、年平均計算に同じ値が二度使われる。

(i) 加熱中心が赤道にある場合の定常解

(a) 本実験結果

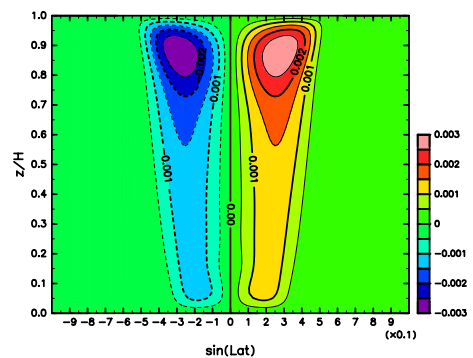


(b) Fang and Tung (1999) の結果

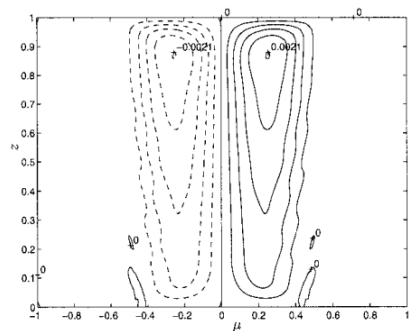


(ii) 定常解から作る「年平均」

(a) 本実験結果

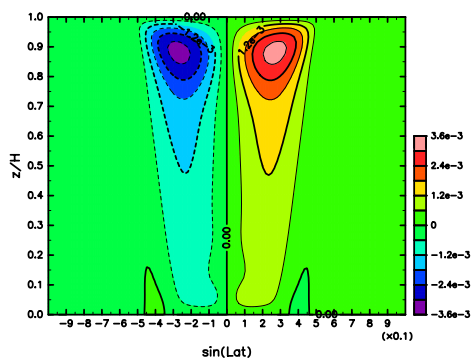


(b) Fang and Tung (1999) の結果



(iii) 季節変化する解の年平均

(a) 本実験結果



(b) Fang and Tung (1999) の結果

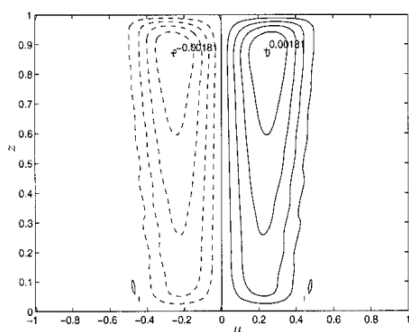


図 4.5: 無次元化された流線関数. (i) は,  $\mu_0 = 0$  で得られた定常解. (ii) は, 定常解の「年平均」. (iii) は, 季節変化する場合の年平均.

い. 次に,  $C$  の値 (下端における摩擦の強さ) を変えた場合に, 子午面における各循環の季節変化がどのように異なるのかを見る.

### 4.3 摩擦係数を変えた場合の実験

最後に, 摩擦係数  $C$  を変えた場合の実験結果を示す. ここでは,

$$\frac{C}{C^*} = 100, 10, 2, 1, 0.5, 0.1$$

の値を用いて行った実験結果を比較する.

以上の  $C$  の値を用いて実験を行った結果, どの  $C$  を用いた実験でも, 4.2 節で示した季節変化する循環の特徴が現れた. つまり,

- 加熱中心が赤道から北半球へと移動する時期 (0-90 日) には, 北半球 (夏) のハドレー循環は弱くなり, 南半球 (冬) のハドレー循環は強くなる.
- 加熱中心が北半球から赤道へと戻る時期 (90-180 日) には, 南半球のハドレー循環は弱くなる.
- 加熱中心が赤道に帰る時刻では, 南半球のハドレー循環は, 図 4.1 (vi) 180 日後のように上空へと押し出される. このとき, 子午面には, 北半球のハドレー循環, 南半球のハドレー循環, 南半球のフェレル循環の三つの循環が存在する.

このように,  $C$  を変えた実験でも得られる結果に大きな差はできない. しかし, 各循環の強さの大小関係は,  $C$  の値に依存する. これは, 図 4.6 から確認する. 図 4.6 は, 前節で示した, 流線関数の最大値, 最小値がどの (サイン) 緯度に存在するのかを表す.

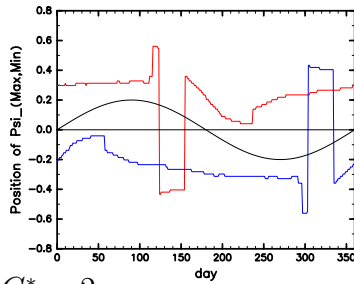
(a)-(f) の全ての実験で, ほとんどの時刻において, 最大値は北半球に, 最小値は南半球に存在する. これは, 北半球の (正の) ハドレー循環と, 南半球の (負の) ハドレー循環が一年間のほとんどにおいて最も強い循環であることを意味する. しかし, 最も強い正の循環が南半球に, 最も強い負の循環が北半球に存在する時期がある. この時期では, 冬半球側に現れるフェレル循環が夏半球側のハドレー循環より強くなる.

しかし, このような状態になるかどうか, およびその期間は, (a)-(f) の結果で異なる. つまり, 比較的摩擦が強い (a)-(d) の結果では, 150 日と 330 日あたりでその時間帯が存在する一方で, 摩擦が弱い (e), (f) の結果にはその時間帯が存在しな

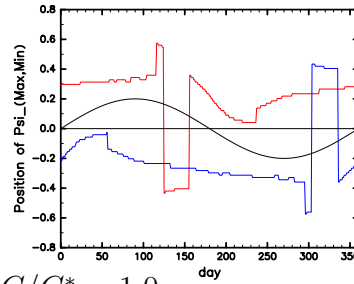
い. さらに, (a)-(c) の結果では, この期間が (d) の結果より長い.

図 4.6 からでは, 冬半球側のフェレル循環と夏半球側のハドレー循環の強さの大小関係がわからないため, 子午面流線関数の値で確認する. 150 日後における子午面流線関数は, 図 4.7 に描画されている (以降では, 150 日後における結果を考察する). 図 4.7 を見ると,  $C$  の値が大きい (a)-(d) の実験では, 南半球のフェレル循環が強く, 流線関数の最大値が確かに南半球に存在しているとわかる. 一方で, (e), (f) の結果では, 南半球にフェレル循環は存在するが, その強さは北半球のハドレー循環より弱い. そして, それぞれの循環の強さを, (a) から (f) で比較すると,  $C$  が大きいほど, 南半球のフェレル循環が強いことがわかる. このように, 下端における摩擦が強いと, より強いフェレル循環が形成される理由を簡単な理論を使って考察する.

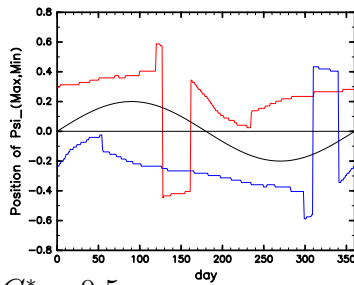
(a)  $C/C^* = 100$



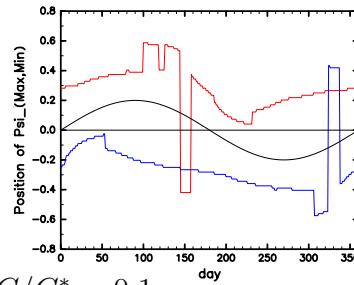
(b)  $C/C^* = 10$



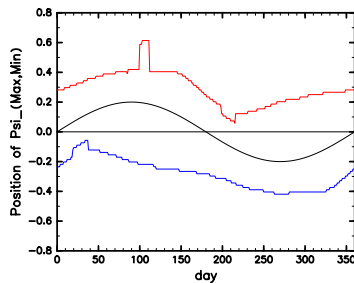
(c)  $C/C^* = 2$



(d)  $C/C^* = 1.0$



(e)  $C/C^* = 0.5$



(f)  $C/C^* = 0.1$

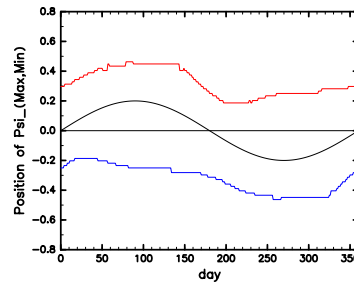
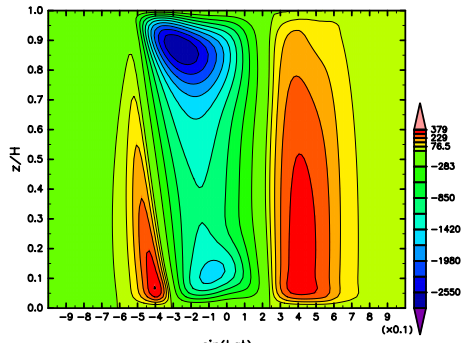
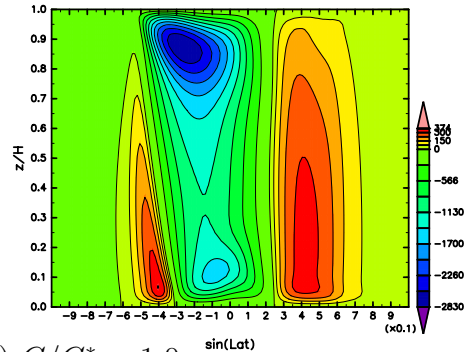


図 4.6: 流線関数の最大値 (赤線) と最小値 (青線) をとる (サイン) 緯度の時間変化. 黒線は加熱中心の (サイン) 緯度である.  $C^* = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  である.

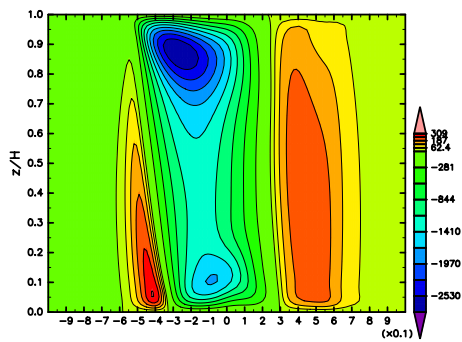
(a)  $C/C^* = 100$



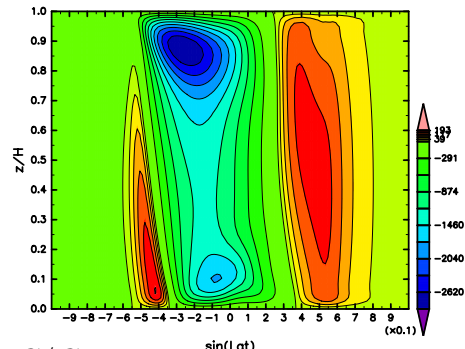
(b)  $C/C^* = 10$



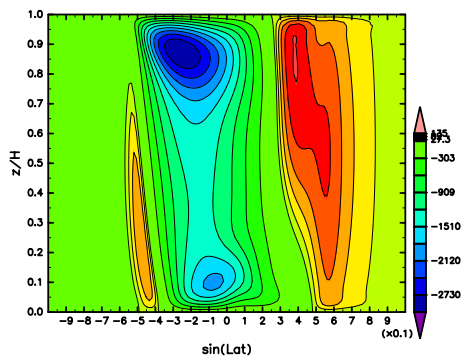
(c)  $C/C^* = 2$



(d)  $C/C^* = 1.0$



(e)  $C/C^* = 0.5$



(f)  $C/C^* = 0.1$

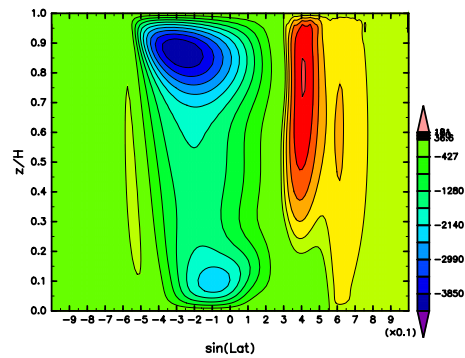


図 4.7: 150 日後における流線関数. 流線関数の最大値,  $\Psi_{\max}$  の位置が分かるように色付けしている. 正の値に対しては,  $0.2\Psi_{\max}$  と  $0.99\Psi_{\max}$  で等値線を引いている.



考察

ここでは、図 4.7 に示した通り、 $C$  が大きい、つまり下端における摩擦が強いほどフェレル循環が強い理由を考察する。より正確には、フェレル循環の強さが下層における南北方向の流れの強さで決められると考え、下層における南北方向の流れの強さに関する式で診断する。診断には、Held and Hou (1980) に示されている、全南北質量輸送  $V_G$  に関する以下の式を使う。

$$fV_G \approx Cu(0) - \nu_V \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\delta}. \quad (4.5)$$

この式は、東西流運動方程式において、定常状態かつ、移流項、メトリック項が無視できるほど弱いと仮定した場合の式、

$$fv = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4.6)$$

を摩擦境界層にわたって  $z = 0$  から  $z = \delta$  まで積分して得られる。ここで、 $V_G = \int_0^{\delta} v dz$  であり、下端境界条件

$$z = 0: \quad \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu \quad (4.7)$$

を用いている。(4.5) において、さらに、内部領域での粘性がないと仮定すると

$$fV_G \approx Cu(0) \quad (4.8)$$

となる。この式に従うと、下端における風速  $u(0)$  が正、つまり地表面西風領域では、極方向への質量輸送がある。下層における極方向への質量輸送に伴いできる逆循環がフェレル循環である。

実際に、(4.8) を使って、フェレル循環による南北質量輸送の大小を診断する。まず、150 日後における下端の東西風速を描画すると図 4.8 である。これを見ると、全ての  $C$  に対する実験結果で、 $-0.5 < \mu < -0.3$  では正の東西風となっている。また、 $C$  が大きいほど、下端における摩擦が強く効くため、下端における西風は弱い。このとき、地表面西風領域  $-0.5 < \mu < -0.3$  において、フェレル循環による南極側への質量輸送があるかを図 4.7 で再度確認すると、 $C$  が小さいほどこの輸送は小さく、特に (f)  $C/C^* = 0.1$  では、全くないように見える。

(f) において、 $u(0)$  は強い西風となっているが、実際には下層における南北質量輸送がほとんどない。これは、表面応力  $Cu(0)$  の大きさを診断していないためである。図 4.9 に示されている、表面応力  $Cu(0)$  を見ると、 $-0.5 < \mu < -0.3$  において全ての結果で  $Cu(0) > 0$  であるが、 $u(0)$  の大小関係とは逆になっている。つまり、 $C$  が大きいほど、 $Cu(0)$  が大きい。これを考慮に入れると、図 4.7 で  $C$  が大きいほど南半球のフェレル循環が強いのは、(4.8) が定性的にはなりたっているため

ではないかと考えた。

$C$  が大きくなるほどフェレル循環の強さ (南北質量輸送) が強くなる理由は, (4.8) を用いればある程度説明することができる。しかし, 図 4.9 を見ると (f)  $C/C^* = 0.1$  の場合でも,  $Cu(0)$  はそれほど小さい値ではない。(4.8) が定量的にも成り立っているならば, (f)  $C/C^* = 0.1$  の場合でも, フェレル循環による南北質量輸送がいくらかはあると考えられる。しかし, 実際に図 4.7 で子午面流線関数を見たときに, そのような輸送がないように見えるのは,  $Cu(0)$  に比べて, 内部領域での粘性  $\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\delta}$  が無視できないためではないかと考えられる。

これを確認するため,

$$fV_G \approx Cu(0) - \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\delta}. \quad (4.9)$$

の右辺の項の診断を行った。まずは,  $\nu_V \frac{\partial u}{\partial z}$  の子午面分布を図 4.10 に示す。この図を見ると, 下層では  $\nu_V \frac{\partial u}{\partial z}$  の値が  $C$  によらずほぼ同じくらいの値であることがわかる。次に, 各  $C$  での, 右辺の二つの項の大小関係を確認する。ここで, 摩擦境界層の厚さ  $\delta$  は, 正確に決めることはできないが, 図 4.7 からだいたい  $\delta = z^* = 0.05$  であると仮定した。各  $C$  での,  $Cu(0) - \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\delta}$  は図 4.11 に描画されている。 $-0.5 < \mu < -0.3$  に注目すると,  $C$  の値により大小が異なることがわかる。 $C$  が大きい, つまり下端における摩擦が強いほど (4.9) の右辺が大きい。正負に関しては, 摩擦が最も弱い  $C/C^* = 0.1$  のときのみ, この項は負になっている。つまり,  $Cu(0)$  より  $\nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\delta}$  の方が大きい。Held and Hou (1980) では, この二つの項の大小関係とフェレル循環の存在について以下のように述べられている: 「地表面西風に伴う表面応力が, 内部領域との境界での抵抗を乗り越えたとフェレル循環が現れる」。本実験において,  $C/C^* = 0.1$  のときに, 下層における南北質量輸送がほとんどなく (図 4.7), 結果的に弱いフェレル循環であったのは, Held and Hou (1980) の記述に従えば, 表面応力が内部領域との境界での抵抗より弱かったためことが原因であると考えられることができる。

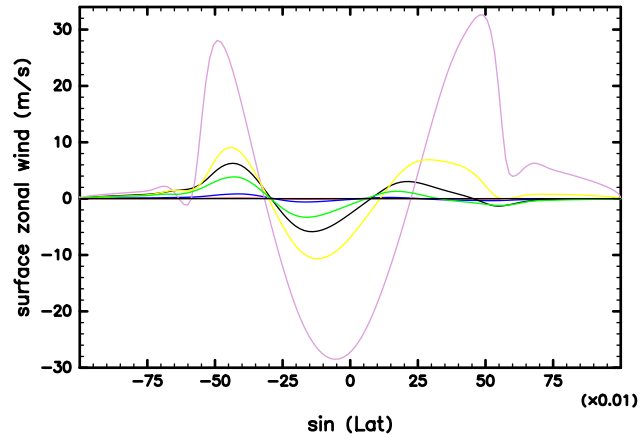


図 4.8: 下端における東西風  $u(\phi, 0)$ . 各線と,  $C/C^*$  の対応関係は以下のとおりである. 赤: 100, 青: 10, 緑: 2, 黒: 1, 黄: 0.5, 桃: 0.1.

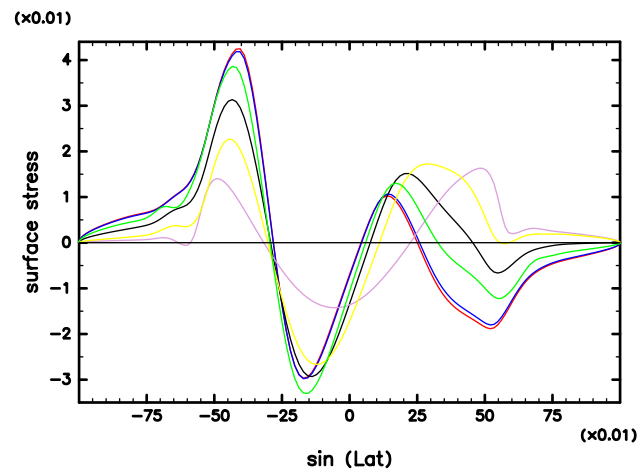


図 4.9: 下端における摩擦応力  $Cu(0)$ . 各線と,  $C/C^*$  の対応関係は以下のとおりである. 赤: 100, 青: 10, 緑: 2, 黒: 1, 黄: 0.5, 桃: 0.1.

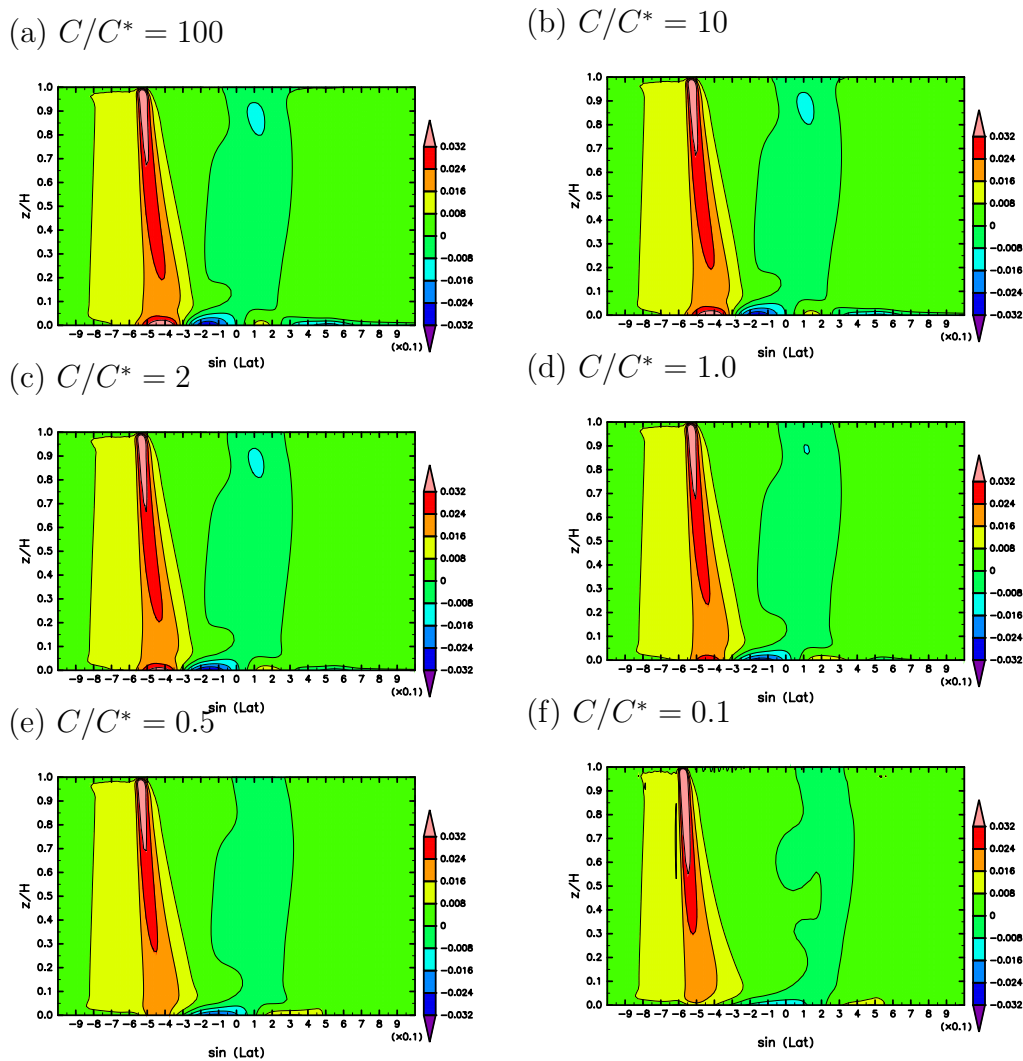


図 4.10: 150 日後における  $\nu_V \frac{\partial u}{\partial z}$ . 等値線間隔は  $0.008 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  である.

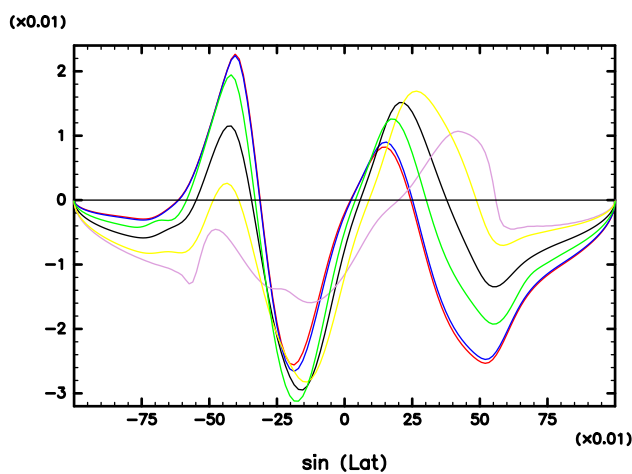


図 4.11:  $Cu(0) - \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\delta}$ . ここで,  $\delta = z^* = 0.05$  である. 各線と,  $C/C^*$  の対応関係は以下のとおりである. 赤: 100, 青: 10, 緑: 2, 黒: 1, 黄: 0.5, 桃: 0.1.

## 第5章 まとめ

地球大気のハドレー循環は、赤道で温められ上昇した空気が亜熱帯で冷やされ下降し、赤道へと戻る流れである。ハドレー循環を調べた研究は古くから存在するが、ハドレー循環の幅や亜熱帯ジェットの強度といった基本的な力学構造は、自転軸対称な系で調べられてきた。

自転軸対称ハドレー循環を調べた研究として、Held and Hou (1980) がある。この研究では、定常状態にある非粘性の大気が従う非線形の支配方程式からハドレー循環の幅や、角運動量保存する流れが作る亜熱帯ジェット、地表面東西風分布などに関する解析解が得られた。Held and Hou (1980) で考えられたハドレー循環は赤道対称なものであったが、その後、Lindzen and Hou (1988) は赤道非対称なハドレー循環に関する数値実験を行った。その結果、地球大気の手ドレー循環のように、冬半球側の手ドレー循環が夏半球側の手ドレー循環より強くなることが示された。Fang and Tung (1999) では、半球の季節が季節変化する場合に得られる循環の性質が調べられた。

本研究では、Fang and Tung (1999) で用いられた下端境界条件が Held and Hou (1980) と Lindzen and Hou (1988) で用いられたものと異なることに注目した。具体的には、Held and Hou (1980) と Lindzen and Hou (1988) では、下端風速に比例する摩擦条件であり、Fang and Tung (1999) では、下端で風速がゼロとなる粘着条件である。下端において、風速がゼロであるかそうでないかに関してみれば、この二つの境界条件は明確に異なる。この二つの境界条件の違いは、下層における流れの強さにも影響するのではないかと考え、下端境界条件の違いが季節変化するハドレー循環にもたらす影響を調べることにした。

まずは、数値モデルの構築を行った。支配方程式系の空間離散化にはスペクトル法を用いた。展開関数系として、水平方向には球面調和関数を、鉛直両方向にはチェビシェフ多項式を用いた。そして、構築した数値モデルの妥当性を確かめることも兼ねて、追試計算を実施した。本研究では、Held and Hou (1980) と Lindzen and Hou (1988) の追試を行った。追試の結果、子午面流線関数の値や形状、亜熱帯ジェットの強度などほとんど一致する結果が得られた。しかし、鉛直拡散係数が比較的小さい場合にできる東西風の第二のジェットの構造など細かい違いは存在する。これらの違いは、数値計算手法 (本研究: スペクトル法, Held and Hou (1980): 差分法) の違いが原因かもしれない。

最後に、本研究の目的である、下端境界条件の違いにより季節変化するハドレー循環がどのように異なるのかを調べた。下端境界条件として、下端風速に比例する摩擦条件を用いて、摩擦係数の値を変更していくつかの実験を行った。その結果、どの摩擦係数を用いた実験でも、季節変化するハドレー循環の基本的な性質が見られた。つまり、冬半球のハドレー循環は強くなり、夏半球のハドレー循環は弱くなる。その一方で、北半球が夏から秋へと移行する時期に南半球に現れるフェレル循環は、摩擦係数が大きいほど、つまり下端における摩擦が強いほど強い結果となった。

摩擦が強いほど、強いフェレル循環が形成された理由を Held and Hou (1980) で示された下層での南北質量輸送に関する式を用いて考察した。この式は、下層での南北質量輸送の強さが、表面応力（摩擦係数と下端での東西風の積）に比例することを表す。各摩擦係数で行った実験で得られた下端東西風をもとに下端での表面応力を解析したところ、摩擦係数が大きいほど、下端での東西風自体は弱くなるが、表面応力は強くなる結果となった。下端での摩擦が強いほど表面応力が強くなったことは、Held and Hou (1980) の式に従えば、下層での南北質量輸送も強くなることを意味する。フェレル循環の強さを下層での南北質量輸送の強さとして見なせば、摩擦が強いほど強いフェレル循環が形成される理由を Held and Hou (1980) で与えられた南北質量輸送の式で定性的に説明できることがわかった。Fang and Tung (1999) で得られたフェレル循環が、本研究で得られたフェレル循環より強いのも下端境界条件の違いが原因であるかもしれない。つまり、Fang and Tung (1999) で用いられた粘着条件を、摩擦係数を無限大にした場合の摩擦境界条件として考えると、摩擦が強いために強いフェレル循環ができた、と考えることができる。

## 謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方にご協力いただきました。林祥介教授には、セミナー発表において実験結果の解釈の仕方や発表の改善点を数多くいただきました。流体基礎理論講義では、基礎的な内容から応用的なことまで、数式の変形や図の解釈の仕方なども含めて解説していただきました。基礎惑星学特論では、自転軸対称ハドレー循環に関する英語で書かれた論文の和訳、数式の変形、著者が意図していることまで教えてくださり、本研究を行う上でも非常に有益な時間となりました。高橋芳幸准教授は、基礎理論読書会でレジュメ資料の添削を丁寧にしてくださり、技術系文章における正しい日本語の書き方を学ぶことができました。また、研究室で運用しているサーバの管理、運用に携わってくださり、特にトラブルなく数値実験を行うことができ感謝しています。樫村博基講師は、本研究を行うにあたり誰よりも多く時間を費やして指導にあたってくださりました。日頃の研究に関するミーティングでは、数値モデル作成段階で発生した問題の原因を追究するために、ソースコードを読んで対応策を一緒に考えてくださりました。セミナー発表前には、発表資料をチェックして、聞く人に理解してもらうためには、どのようにスライドを作り、どの流れで発表するのがいいのかを教えてください、感謝しています。松嶋俊樹特命助教は、CPS mosir プロジェクトの一環として講演資料や動画を公開する際に、進捗のチェックをしてくださり、修正点も教えてくださいました。地球および惑星大気科学研究室の学生の皆様には、研究室活動の際に数多くのご協力を頂きました。皆様に改めて感謝申し上げます。

本研究では、スペクトル展開や空間微分などを計算するために、京都大学の竹広真一氏らによって開発されたライブラリ `spml`、および京都大学の石岡圭一氏が開発した `ISPACK` を使用しました。計算結果の描画、解析には、地球流体電脳倶楽部の `Dennou Ruby Project` の一環として開発されたライブラリ `gphys` を使用しました。また、描画の際に数値や文字の処理を行うためのライブラリ `DCL` を使用しました。

## 付録 A 数値モデルの構築

ここでは、本研究で用いた、数値モデルの構築手順を解説する。本モデルで解くのは、乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系である。まずは、この方程式系を数値モデル内で解く方程式系（モデル支配方程式系）に変形する。次に、モデル支配方程式系を空間離散化する。本モデルでは、空間離散化にはスペクトル展開を用いる。水平方向の展開には球面調和関数を、鉛直方向の展開には、チェビシェフ多項式を用いる。そして、空間離散化された式に対して時間積分公式を適用する。本モデルで用いる時間積分公式は、陽解法と陰解法を組み合わせたセミインプリシット法である。この手法のもと、非線形項の時間離散化には二次のアダムズバッシュフォース法（陽解法）を、線形項の時間離散化にはクランクニコルソン法（陰解法）を適用する。

以降では、以下の順番に解説する。まず A.1 では、支配方程式系を説明する。次に、A.2 で、支配方程式系からモデル支配方程式系に変形する。次に、A.3 で、モデル支配方程式系をスペクトル展開し、A.4 で、空間離散化された式を時間離散化する。最後に、A.5 では、数値計算の全体の流れを解説する。なお、空間離散化で用いる展開関数の性質は付録 B で解説する。



## A.1 支配方程式系

数値モデルで解く方程式系は、乾燥ブシネスク流体プリミティブ方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\Omega v \sin \phi - \frac{uv \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2\Omega u \sin \phi + \frac{u^2 \tan \phi}{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \nu_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\Theta_0} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\theta) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v\theta \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) = -\frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \nu_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.5})$$

である。これらは上から順に、東西流運動方程式、南北流運動方程式、静力学平衡の式、熱力学方程式、非圧縮の式である。文字の定義は

$\lambda$ : 経度,  $\phi$ : 緯度,  $z$ : 高度,  $t$ : 時刻

$\mathbf{u} = (u, v, w)$ : 東西, 南北, 鉛直流速,  $\theta$ : 温位,  $\Phi$ : ジオポテンシャル

$\Omega$ : 自転角速度,  $a$ : 惑星半径,  $g$ : 重力加速度,  $\tau$ : ニュートン加熱冷却の緩和時定数

$\theta_E$ : 放射平衡温位場,  $\Theta_0$ :  $\theta_E$ の全球平均,  $\nu_V$ : 鉛直拡散係数

である。鉛直境界条件は

$$\text{上端 } (z = H): \quad w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\text{下端 } (z = 0): \quad w = 0; \quad \nu_V \frac{\partial u}{\partial z} = Cu; \quad \nu_V \frac{\partial v}{\partial z} = Cv; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

である。ここで、 $H$  はモデルトップの高度で、 $C$  は摩擦係数である。次に、以上の式をモデル内で解く方程式系に変形する。

## A.2 モデル支配方程式系への変形

まず、非圧縮の式 (A.5) から  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  を自動的に満たすように速度場をトロイダル・ポロイダル展開する。つまり、トロイダルポテンシャル  $\psi$  と、ポロイダルポ

テンソル  $\chi$  を用いて以下のように展開する

$$\mathbf{u} = -\nabla \times \psi \mathbf{k} + \nabla \times \nabla \times \chi \mathbf{k}. \quad (\text{A.6})$$

ここで  $\mathbf{k}$  は鉛直方向の単位ベクトルである. このとき, 速度場を成分表示すると

$$u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$v = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$w = -\frac{1}{a \cos \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\cos \phi}{a} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right) \right\} = -\nabla_H^2 \chi \quad (\text{A.9})$$

である.

次に, 東西流, 南北流運動方程式を鉛直渦度  $\zeta$  と水平発散  $D$  の時間発展方程式に変形する. 鉛直渦度の時間発展方程式は, (A.2) に  $\partial/\partial\lambda$  を作用させた式から (A.1) に  $\partial/\partial\phi(\cos\phi)$  を作用させた式を引くことで得られる. 水平発散の時間発展方程式は, (A.1) に  $\partial/\partial\lambda$  を作用させた式と (A.2) に  $\partial/\partial\phi(\cos\phi)$  を作用させた式の和をとることで得られる. なお, 導出には, 高橋他 (2018) の「支配方程式系の導出に関する参考資料」を参考にした. この手順で式変形を行い, 整理すると, 元の支配方程式系は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial A}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial B}{\partial \mu} + \nu_V \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \nabla_H^2 (\Phi + \text{KE}) + \nu_V \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\Theta_0} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U\theta) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V\theta) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta) - \frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \nu_V \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (\text{A.13})$$

となる (トロイダル・ポロイダル展開により非圧縮の式は自動的に満たされるため, これらの式には含めていない). ここで, 文字の定義は以下の通りである

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi) = \nabla_H^2 \psi \\ D &= \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_H^2 \chi \\ A &= (\zeta + 2\Omega\mu)U + w \frac{\partial V}{\partial z}, \quad B = (\zeta + 2\Omega\mu)V - w \frac{\partial U}{\partial z} \\ \text{KE} &= \frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)}, \quad \nabla_H^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ U &= u \cos \phi, \quad V = v \cos \phi, \quad \mu = \sin \phi. \end{aligned}$$

ここで、水平発散に関する式 (A.11) を鉛直微分すると、右辺第三項に  $\partial\Phi/\partial z$  の項ができる。この項に静力学平衡の式 (A.12) を代入する。その結果、元々五つの式で構成されていた支配方程式系は、以下の三つの式にまとまる

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial A}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial B}{\partial\mu} + \nu_V\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) = \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A}{\partial\mu} - \nabla_H^2\left(g\frac{\theta}{\Theta_0} + \frac{\partial}{\partial z}\text{KE}\right) + \nu_V\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(U\theta) - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}(V\theta) - \frac{\partial}{\partial z}(w\theta) - \frac{\theta - \theta_E}{\tau} + \nu_V\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}. \quad (\text{A.16})$$

鉛直渦度と水平発散の式を、トロイダルポテンシャルとポロイダルポテンシャルの式に書き直す。そして、右辺の鉛直拡散項以外の項を  $G$  でまとめると

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = G^\psi + \nu_V\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right) = G^\chi + \nu_V\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = G^\theta + \nu_V\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \quad (\text{A.19})$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} G^\psi &\equiv \nabla_H^{-2}\left[-\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial A}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial B}{\partial\mu}\right] \\ G^\chi &\equiv \nabla_H^{-2}\left[\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A}{\partial\mu}\right] - \left(g\frac{\theta}{\Theta_0} + \frac{\partial}{\partial z}\text{KE}\right) \\ G^\theta &\equiv -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(U\theta) - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\mu}(V\theta) - \frac{\partial}{\partial z}(w\theta) - \frac{\theta - \theta_E}{\tau} \end{aligned}$$

である。最後に鉛直境界条件を  $\psi, \chi, \theta$  を用いて表現すると

$$\text{上端 } (z = H): \quad \chi = 0; \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$$

$$\text{下端 } (z = 0): \quad \chi = 0; \quad \nu_V\frac{\partial\psi}{\partial z} = C\psi, \quad \nu_V\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = C\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$$

となる。次にこれらの式の空間離散化について説明する。

### A.3 空間離散化

空間離散化には、スペクトル展開を用いる。本モデルでは、水平方向には球面調和関数を鉛直方向にはチェビシェフ多項式を用いて展開する。展開関数の性質は

付録 B にまとめているので、先にそちらを参照されたい。そのため、展開関数の性質の証明などは行わず、モデル支配方程式を空間離散化することのみを念頭に説明する。

A.2 節で得られたモデル支配方程式をスペクトル展開する。例えば、トロイダルポテンシャルであれば、

$$\psi(\lambda_i, \mu_j, \eta_k, t) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n \zeta_{n,m,l}(t) Y_{n,m}(\lambda_i, \mu_j) T_l(\eta_k) \quad (\text{A.20})$$

のように展開する。ここで文字の定義は以下のとおりである。

$\lambda_i$  : 等間隔格子,  $\mu_j$  : ガウス緯度,  $\eta_k$  : ガウスロバット選点

$\sum''$  : 初項と末項のみを 1/2 倍して和をとる

$m$  : 東西波数,  $n$  : 南北波数,  $l$  : 鉛直波数,  $M$  : 水平切断波数,  $L$  : 鉛直切断波数

$\zeta_{n,m,l}$  : 展開係数,  $Y_{n,m}$  : 球面調和関数,  $T_l$  : チェビシエフ多項式。

$\chi, \theta$  などの各変数も同様に展開し、モデル支配方程式に代入する。そして、展開関数の直交関係を用いると、以下の常微分方程式

$$\frac{d\zeta_{n,m,l}}{dt} = g_{n,m,l}^\zeta + \nu_V \left(\frac{2}{H}\right)^2 \zeta_{n,m,l}^{(2)} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2}{H}\right)^2 \chi_{n,m,l}^{(2)} = g_{n,m,l}^\chi + \nu_V \left(\frac{2}{H}\right)^4 \chi_{n,m,l}^{(4)} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d\theta_{n,m,l}}{dt} = g_{n,m,l}^\theta + \nu_V \left(\frac{2}{H}\right)^2 \theta_{n,m,l}^{(2)} \quad (\text{A.23})$$

が得られる。ここで、 $\partial/\partial z = (2/H)\partial/\partial \eta$  を用いている。非線形項  $G$  の展開係数は  $g_{n,m,l}$  としており、変換法から求める。

これらの式を鉛直微分を演算するための行列  $E$  を用いて書き換えると、

$$\frac{d\psi_{n,m}}{dt} = \mathbf{g}_{n,m}^\psi + \nu \mathbf{E}^2 \psi_{n,m} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E}^2 \chi_{n,m} = \mathbf{g}_{n,m}^\chi + \nu \mathbf{E}^4 \chi_{n,m} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{d\theta_{n,m}}{dt} = \mathbf{g}_{n,m}^\theta + \nu \mathbf{E}^2 \theta_{n,m} \quad (\text{A.26})$$

となる。ここで、各展開係数の波数  $l$  軸に対してはベクトル表記をしている。また、 $\nu = (2/H)^2 \nu_V$  であり、 $\mathbf{g}_{n,m}^\chi$  は、 $g_{n,m,l}^\chi$  に  $(2/H)^2$  を掛けたものである。

次に鉛直境界条件を離散的に表す。ポテンシャルを用いた境界条件は

$$\text{上端 } (z = H) : \quad \chi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\text{下端 } (z = 0) : \quad \chi = 0; \quad \nu_V \frac{\partial \psi}{\partial z} = C\psi, \quad \nu_V \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = C \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

である。チェビシェフ多項式の性質を用いて、 $\psi, \chi, \theta$  それぞれの展開係数に対する離散的表現を導出すると以下の方程式が得られる。

トロイダルポテンシャル：

$$1 \cdot 1\psi_1 + 2 \cdot 2\psi_2 + 3 \cdot 3\psi_3 + \cdots + (L-1)(L-1)\psi_{L-1} + \frac{L^2}{2}\psi_L = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\left\{ \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 \right\} \psi_0 - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 1 \cdot 1 \right\} \psi_1 + \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 2 \cdot 2 \right\} \psi_2 - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} 3 \cdot 3 \right\} \psi_3 \\ + \cdots - \left\{ 1 + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} (L-1)(L-1) \right\} \psi_{L-1} + \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\nu_V}{C} \frac{2}{H} \frac{L^2}{2} \right\} \psi_L = 0 \quad (\text{A.28})$$

ポロイダルポテンシャル：

$$\chi_0 + 2\chi_2 + 2\chi_4 + \cdots + \chi_L = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\chi_1 + \chi_3 + \chi_5 + \cdots + \chi_{L-1} = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\chi_0^{(2)} + 2\chi_2^{(2)} + \cdots + \chi_L^{(2)} - \left( \frac{C}{\nu_V} \right) \left( \frac{H}{2} \right) \left\{ \frac{1}{2}\chi_0^{(1)} - \chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} + \cdots + \frac{1}{2}\chi_L^{(1)} \right\} = 0 \quad (\text{A.31})$$

$$\chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \cdots + \chi_{L-1}^{(2)} + \left( \frac{C}{2\nu_V} \right) \left( \frac{H}{2} \right) \left\{ \frac{1}{2}\chi_0^{(1)} - \chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} + \cdots + \frac{1}{2}\chi_L^{(1)} \right\} = 0 \quad (\text{A.32})$$

温位：

$$1^2\theta_1 + 3^2\theta_3 + 5^2\theta_5 + \cdots + (L-3)^2\theta_{L-3} + (L-1)^2\theta_{L-1} = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$2^2\theta_2 + 4^2\theta_4 + 6^2\theta_6 + \cdots + (L-2)^2\theta_{L-2} + \frac{L^2}{2}\theta_L = 0. \quad (\text{A.34})$$

ここで、(A.31) と (A.32) には、以下の関係式を用いてさらに離散化する。

$$\chi_0^{(2)} + 2\chi_2^{(2)} + 2\chi_4^{(2)} + \cdots + \chi_L^{(2)} \\ = (1^2)2 \cdot 2\chi_2 + (1^2 + 3^2)2 \cdot 4\chi_4 + (1^2 + 3^2 + 5^2)2 \cdot 6\chi_6 \\ + \cdots + \{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (L-3)^2\} 2(L-2)\chi_{L-2} \\ + \{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (L-1)^2\} L\chi_L \quad (\text{A.35})$$

$$\chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \chi_5^{(2)} + \cdots + \chi_{L-1}^{(2)} \\ = (2^2)2 \cdot 3\chi_3 + (2^2 + 4^2)2 \cdot 5\chi_5 + (2^2 + 4^2 + 6^2)2 \cdot 7\chi_7 \\ + \cdots + \{2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (L-4)^2\} 2(L-3)\chi_{L-3} \\ + \{2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (L-2)^2\} 2(L-1)\chi_{L-1} \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{1}{2}\chi_0^{(1)} - \chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} - \cdots + \frac{1}{2}\chi_L^{(1)} \\ = 1^2\chi_1 - 2^2\chi_2 + 3^2\chi_3 - 4^2\chi_4 + 5^2\chi_5 - 6^2\chi_6 \\ + \cdots - (L-2)^2\chi_{L-2} + (L-1)^2\chi_{L-1} - \frac{L^2}{2}\chi_L. \quad (\text{A.37})$$

次に, 常微分方程式 (A.24)-(A.26) の時間離散化を説明する.

## A.4 時間離散化

前節で得られた展開係数に対する常微分方程式,

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{n,m}}{dt} &= \mathbf{g}_{n,m}^{\psi} + \nu \mathbf{E}^2 \psi_{n,m} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{E}^2 \chi_{n,m} &= \mathbf{g}_{n,m}^{\chi} + \nu \mathbf{E}^4 \chi_{n,m} \\ \frac{d\theta_{n,m}}{dt} &= \mathbf{g}_{n,m}^{\theta} + \nu \mathbf{E}^2 \theta_{n,m}\end{aligned}$$

を時間離散化する. 本モデルでは, 陽解法と陰解法を組み合わせたセミインプリシット法を用いる. この手法に基づき, 非線形項には二次のアダムズバッシュフォース法を, 鉛直拡散 (線形) 項にはクランクニコルソン法を適用する. この時間積分公式を適用すると

$$\begin{aligned}\psi_{n,m}(t+h) &= \psi_{n,m}(t) + \frac{h}{2} (\nu \mathbf{E}^2 \psi_{n,m}(t+h) + \nu \mathbf{E}^2 \psi_{n,m}(t)) \\ &\quad + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}_{n,m}^{\psi}(t) - \mathbf{g}_{n,m}^{\psi}(t-h))\end{aligned}\tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^2 \chi_{n,m}(t+h) &= \mathbf{E}^2 \chi_{n,m}(t) + \frac{h}{2} (\nu \mathbf{E}^4 \chi_{n,m}(t+h) + \nu \mathbf{E}^4 \chi_{n,m}(t)) \\ &\quad + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}_{n,m}^{\chi}(t) - \mathbf{g}_{n,m}^{\chi}(t-h))\end{aligned}\tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}\theta_{n,m}(t+h) &= \theta_{n,m}(t) + \frac{h}{2} (\nu \mathbf{E}^2 \theta_{n,m}(t+h) + \nu \mathbf{E}^2 \theta_{n,m}(t)) \\ &\quad + \frac{h}{2} (3\mathbf{g}_{n,m}^{\theta}(t) - \mathbf{g}_{n,m}^{\theta}(t-h))\end{aligned}\tag{A.40}$$

となる. ここで  $h$  は時間刻み幅である. 右辺第二項がクランクニコルソン法によって, 右辺第三項が二次のアダムズバッシュフォース法により離散化された箇所である.

これらの式における次ステップの予報変数を左辺に移行し整理すると

$$\left(I - \frac{h\nu}{2}\mathbf{E}^2\right)\psi_{n,m}(t+h) = \left(I + \frac{h\nu}{2}\mathbf{E}^2\right)\psi_{n,m}(t) + \frac{h}{2}(3\mathbf{g}_{n,m}^\psi(t) - \mathbf{g}_{n,m}^\psi(t-h)) \quad (\text{A.41})$$

$$\left(\mathbf{E}^2 - \frac{h\nu}{2}\mathbf{E}^4\right)\chi_{n,m}(t+h) = \left(\mathbf{E}^2 + \frac{h\nu}{2}\mathbf{E}^4\right)\chi_{n,m}(t) + \frac{h}{2}(3\mathbf{g}_{n,m}^x(t) - \mathbf{g}_{n,m}^x(t-h)) \quad (\text{A.42})$$

$$\left(I - \frac{h\nu}{2}\mathbf{E}^2\right)\theta_{n,m}(t+h) = \left(I + \frac{h\nu}{2}\mathbf{E}^2\right)\theta_{n,m}(t) + \frac{h}{2}(3\mathbf{g}_{n,m}^\theta(t) - \mathbf{g}_{n,m}^\theta(t-h)) \quad (\text{A.43})$$

となる。ここで  $I$  は単位行列である。

## A.5 数値計算の流れ

最後に、数値計算の流れを説明する。以上の議論により、(A.41)-(A.43) と、それぞれの展開係数に対する境界条件の式を連立させることで解くことが可能になる。つまり、次ステップ  $t+h$  における展開係数を  $x$  とし、それに作用する行列を  $A$ 、右辺の各時刻  $t$  で計算可能なベクトルを  $b$  とすると、境界条件も含めると、これらは連立一次方程式、

$$Ax = b \quad (\text{A.44})$$

を構成する。行列の積の形で表すと

$$\begin{pmatrix} A_{00} & \cdots & \cdots & A_{0L} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{L0} & \cdots & \cdots & A_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_L \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

である。あとはこの連立一次方程式を LU 分解を用いて解く。

## 付録 B 展開関数の性質

この付録では、本モデルでスペクトル展開に用いる展開関数の性質を説明する。B.1 では、球面調和関数について、B.2 ではチェビシェフ多項式について述べる。

### B.1 球面調和関数の性質

ここでは、球面長関数の性質（定義、直交関係、空間微分、変換）について述べる。なお、ここでの内容は、石岡（2004）を参考にした。

球面調和関数  $Y_{n,m}(\lambda, \mu)$  は、球面上の水平ラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \quad (\text{B.1})$$

の固有関数であり、

$$\nabla^2 Y_{n,m}(\lambda, \mu) = -n(n+1)Y_{n,m}(\lambda, \mu) \quad (\text{B.2})$$

の関係がある。ここで  $n, m$  はそれぞれ南北波数と東西波数である。 $Y_{n,m}(\lambda, \mu)$  は、ルジャンドル陪関数と三角関数を用いると

$$Y_{n,m}(\lambda, \mu) = P_{n,m}(\mu)e^{im\lambda} \quad (\text{B.3})$$

である（ $i, e$  は虚数単位と自然対数の底）。ここで、 $P_{n,m}(\mu)$  は 2 に正規化されたルジャンドル陪関数

$$P_{n,m} = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{1}{2^n n!}} (1-\mu^2)^{|m|/2} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2-1)^n \quad (n \geq |m|) \quad (\text{B.4})$$

である。球面調和関数には直交関係があり、それは

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_n^m(\lambda, \mu) \{Y_{n'}^{m'}(\lambda, \mu)\}^* d\mu d\lambda = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (\text{B.5})$$



である ( $\{\}^*$  は複素共役を意味する).

次に, 球面調和関数の空間微分を述べる. まず, 経度微分は, 三角関数の経度微分をすればよい. つまり,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} Y_{n,m}(\lambda, \mu) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} P_{n,m}(\mu) e^{im\lambda} \\ &= im Y_n^m\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

である. サイン緯度 ( $\mu$ ) 微分には, ルジャンドル陪関数の漸化式を用いる. この漸化式は

$$(n+1)\varepsilon_n^m P_{n-1}^m - n\varepsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m = (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n^m \quad (\text{B.7})$$

である. ここで

$$\varepsilon_n^m \equiv \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}} \quad (\text{B.8})$$

である. 漸化式の左辺を計算することで右辺にあるルジャンドル陪関数の  $\mu$  微分を計算できる.

球面のスペクトル法を実装するためには, 球面調和関数で展開された式の正変換を計算できるようにする必要がある. 球面上で定義された関数  $g(\lambda, \mu)$  を

$$g(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n s_{n,m} Y_{n,m}(\lambda, \mu) \quad (\text{B.9})$$

で展開すると, 展開係数  $s_{n,m}$  は

$$\begin{aligned}s_{n,m} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\lambda, \mu) \{Y_{n,m}(\lambda, \mu)\}^* d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(\lambda, \mu) P_{n,m}(\mu) e^{-im\lambda} d\mu d\lambda\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

を計算することで得られる. 数値計算においては, この積分を離散的に実行する必要がある. フーリエ正変換の部分,

$$G_m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \quad (\text{B.11})$$

は, 経度方向の等間隔格子上での離散フーリエ変換を計算すればよい. つまり,  $\lambda_i = 2\pi i/I$  ( $i = 0, 1, \dots, I$ ) として ( $i$  は虚数単位  $i$  と異なることに注意),

$$G_m(\mu) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} g(\lambda_i, \mu) e^{-im\lambda_i} \quad (\text{B.12})$$

を計算する. そして, ルジャンドル正変換の部分,

$$s_{n,m} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G_m(\mu) P_{n,m}(\mu) d\mu \quad (\text{B.13})$$

は、ガウスルジャンドルの積分公式を用いて計算する。この積分公式は

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{j=1}^n w_j f(\mu_j) \quad (\text{B.14})$$

である。ここで  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) はルジャンドル多項式  $P_n(\mu)$  の  $n$  個の零点 (ガウス緯度) で、

$$-1 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < 1$$

である。そして

$$w_j = \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu)}{(\mu - \mu_j) P_n'(\mu_j)} d\mu = \frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_j)P_n'(\mu_j)} \quad (\text{B.15})$$

はガウス重みである。この積分公式により、積分を離散的に実行することができる

$$\begin{aligned} s_n^m &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J w_j G^m(\mu_j) P_n^m(\mu_j). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

## B.2 チェビシエフ多項式の性質

鉛直方向のスペクトル展開には、チェビシエフ多項式を用いる。ここでは、チェビシエフ多項式の性質を説明する。チェビシエフ多項式は、 $[-1, 1]$  で定義される、重み  $1/\sqrt{1-\eta^2}$  の直交多項式である。一般項は、

$$T_n(\eta) = \cos(n\vartheta); \quad \eta = \cos \vartheta \quad (\text{B.17})$$

と表される。ここで  $n$  は波数である。直交関係は

$$\int_{-1}^1 T_m T_n(\eta) \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi/2 & (m = n \neq 0) \\ \pi & (m = n = 0) \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

である. チェビシエフ多項式の空間微分は

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_n(\eta)}{d\eta} &= \frac{d\vartheta}{d\eta} \frac{dT_n}{d\vartheta} \\
 &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d \cos(n\vartheta)}{d\vartheta} \\
 &= \frac{n \sin(n\vartheta)}{\sin \vartheta} \\
 &= n \frac{(e^{ni\vartheta} - e^{-ni\vartheta})/(2i)}{(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta})/(2i)} \\
 &= n \frac{e^{ni\vartheta} - e^{-ni\vartheta}}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} \\
 &= n \frac{\{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}\} \{e^{(n-1)i\vartheta} + e^{(n-2)i\vartheta} e^{-i\vartheta} + e^{(n-3)i\vartheta} e^{-2i\vartheta} + \dots + e^{i\vartheta} e^{-(n-2)i\vartheta} + e^{-(n-1)i\vartheta}\}}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} \\
 &= n \{e^{(n-1)i\vartheta} + e^{(n-3)i\vartheta} + \dots + e^{-(n-3)i\vartheta} + e^{-(n-1)i\vartheta}\} \\
 &= \begin{cases} 2n \{ \cos(n-1)\vartheta + \cos(n-3)\vartheta + \dots + \cos \vartheta \} & (n : \text{偶数}) \\ 2n \{ \cos(n-1)\vartheta + \cos(n-3)\vartheta + \dots + \cos 2\vartheta + \frac{1}{2} \} & (n : \text{奇数}) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2n(T_{n-1} + T_{n-3} + \dots + T_1) & (n : \text{偶数}) \\ 2n(T_{n-1} + T_{n-3} + \dots + T_2 + \frac{1}{2}T_0) & (n : \text{奇数}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

である.

実際の数値計算では, 離散された座標上でのチェビシエフ多項式を用いてスペクトル展開する必要がある. 本モデルでは, 離散化された鉛直座標のとり方としてガウスロバット選点を用いる. これは, ある切断波数  $N$  のチェビシエフ多項式の一階微分の零点である.  $N$  次のチェビシエフ多項式の一階微分が

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_N(\eta)}{d\eta} &= \frac{d\vartheta}{d\eta} \frac{dT_N(\eta)}{d\vartheta} \\
 &= \frac{N \sin(N\vartheta)}{\sin \vartheta}
 \end{aligned}$$

なので, Gauss-Loabatto 選点は

$$\begin{aligned}
 \vartheta_k &= \frac{N-k}{N} \pi, \quad (k = 0, \dots, N) \\
 \eta_k &= \cos \vartheta_k
 \end{aligned}$$

である。

ガウスロバット選点には、以下のような選点直交性がある。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}T_m(\eta_0)T_n(\eta_0) + \sum_{k=1}^{N-1} T_m(\eta_k)T_n(\eta_k) + \frac{1}{2}T_m(\eta_N)T_n(\eta_N) \\ &= \begin{cases} N & (m = n = 0, N) \\ \frac{N}{2} & (m = n \neq 0, N) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

この式の証明は、吉田 (2020) を参考にせよ。本モデルでは、ある関数  $f(\eta)$  を

$$f(\eta_k) = \frac{1}{2}a_0T_0(\eta_k) + \sum_{n=1}^{N-1} a_nT_n(\eta_k) + \frac{1}{2}a_NT_N(\eta_k) \quad (\text{B.20})$$

のように展開する。そのとき、選点直交性から展開係数は

$$a_n = \frac{2}{N} \left[ \frac{1}{2}f(\eta_0)T_n(\eta_0) + \sum_{k=1}^{N-1} f(\eta_k)T_n(\eta_k) + \frac{1}{2}f(\eta_N)T_n(\eta_N) \right] \quad (\text{B.21})$$

となる。なお、この展開方法では、展開の自由度と等しい自由度の選点をとる。

このように展開すると、空間微分は以下のように計算できる。ある関数  $f(\eta)$

$$f(\eta) = \frac{1}{2}a_0T_0(\eta) + \sum_{n=1}^{N-1} a_nT_n(\eta) + \frac{1}{2}a_NT_N(\eta)$$

を両辺  $\eta$  で微分すると、チェビシエフ多項式の微分より、

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\eta} &= \frac{1}{2}a_0 \cdot 0 + a_1T_0 + a_2 \cdot 4T_1 + a_3 \cdot 6 \left( T_2 + \frac{1}{2}T_0 \right) \\ &\quad + a_4 \cdot 8(T_3 + T_1) + a_5 \cdot 10 \left( T_4 + T_2 + \frac{1}{2}T_0 \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{2}a_N \cdot 2N(T_{N-1} + T_{N-3} + \cdots + T_1) \end{aligned}$$

となる. これを  $T_0, T_1, \dots, T_N$  についてまとめると

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\eta} = & a_1 T_0 + 3a_3 T_0 + 5a_5 T_0 + \dots + (N-1)a_{N-1} T_0 \\ & + 4a_2 T_1 + 8a_4 T_1 + 12a_6 T_1 + \dots + 2N a_N T_1 \\ & + 6a_3 T_2 + 10a_5 T_2 + 14a_7 T_2 + \dots + 2(N-1)a_{N-1} T_2 \\ & \vdots \\ & + 2(N-2)a_{N-2} T_{N-3} + N a_N T_{N-3} \\ & + 2(N-1)a_{N-1} T_{N-2} \\ & + N a_N T_{N-1} \\ & + 0 \cdot T_N \end{aligned}$$

となる. ここで,  $df/d\eta$  も  $f(\eta)$  と同様に,

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{1}{2} a_0^{(1)} T_0(\eta) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{(1)} T_n(\eta) + \frac{1}{2} a_N^{(1)} T_N(\eta)$$

と展開できるとすると, 展開係数  $a_n^{(1)}$  は以下を, 波数の大きい方から計算すれば求めることができる.

$$\begin{aligned} a_N^{(1)} &= 0 \\ a_{N-1}^{(1)} &= N a_N \\ a_{N-2}^{(1)} &= 2(N-1)a_{N-1} \\ a_{N-3}^{(1)} &= a_{N-1}^{(1)} + 2(N-2)a_{N-2} \\ a_{N-4}^{(1)} &= a_{N-2}^{(1)} + 2(N-3)a_{N-3} \\ &\vdots \\ a_2^{(1)} &= a_4^{(1)} + 2 \cdot 3a_3 \\ a_1^{(1)} &= a_3^{(1)} + 2 \cdot 2a_2 \\ a_0^{(1)} &= a_2^{(1)} + 2 \cdot 1a_1. \end{aligned}$$

これらの式を行列を用いて表現する.  $a_n^{(1)}$  を左辺に移項し, 整理すると

$$\begin{aligned}
 a_0^{(1)} &= 2 \cdot 1a_1 + 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 5a_5 + \cdots + 2(N-3)a_{N-3} + 2(N-1)a_{N-1} \\
 a_1^{(1)} &= 2 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 4a_4 + 2 \cdot 6a_6 + \cdots + 2(N-2)a_{N-2} + Na_N \\
 a_2^{(1)} &= 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 5a_5 + \cdots + 2(N-3)a_{N-3} + 2(N-1)a_{N-1} \\
 a_3^{(1)} &= 2 \cdot 4a_4 + 2 \cdot 6a_6 + \cdots + 2(N-2)a_{N-2} + Na_N \\
 &\vdots \\
 a_{N-2}^{(1)} &= 2(N-1)a_{N-1} \\
 a_{N-1}^{(1)} &= Na_N \\
 a_N^{(1)} &= 0
 \end{aligned}$$

となる. これを行列の積で表すと

$$\begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{N-2}^{(1)} \\ a_{N-1}^{(1)} \\ a_N^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot 1 & 0 & 2 \cdot 3 & 0 & \cdots & 0 & 2(N-1) & 0 \\ & 0 & 2 \cdot 2 & 0 & 2 \cdot 4 & \cdots & 2(N-2) & 0 & N \\ & & 0 & 2 \cdot 3 & 0 & \cdots & 0 & 2(N-1) & 0 \\ & & & 0 & 2 \cdot 4 & \cdots & 2(N-2) & 0 & N \\ & \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ & \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & & & & & & 0 & 2(N-1) & 0 \\ & & & & & & & 0 & N \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix}$$

となる.

## 付録 C 水平拡散を入れた場合の実験

### C.1 背景と目的

本文の 3.1 節で示した通り, 本研究では, 赤道対称ハドレー循環の数値実験で, 鉛直拡散係数が  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合に定常解を得ることができなかった. 3.1 節の図 3.1 に示した東西風では, はっきりとした時間変化の様子は見られないが, 流線関数を描画すると定常状態に至っていないことが明確にわかる (図 C.1). 図 C.1 における流線関数を見ると, 時間が進むにつれ南北方向の高波数成分が顕著に現れるようになる.

Held and Hou (1980) では,  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の値に対しても, 定常解を得ることができている. 本実験で高波数成分が現れ定常状態にならなかったのは, Held and Hou (1980) との数値計算手法の違いが原因ではないかと考えた. Held and Hou (1980) との数値計算手法の違いは, 表 C.2 にまとめられている.

表 C.2: 数値計算手法の違い

	本モデル	Held and Hou (1980)
空間離散化	スペクトル法	差分法
時間離散化	セミインプリシット法	松野スキーム

一般的に差分法には, 物理的な拡散とは区別される, 差分法を用いることで発生する人工的な粘性 (数値拡散) が含まれている. この数値拡散は, スペクトル法を用いる本モデルには含まれない. 図 C.1 にあるような高波数成分が, 数値拡散がないことによってもたらされているならば, 本実験結果が Held and Hou (1980) と異なり定常状態に至らなかったことは数値計算手法の違いが原因であり, 本数値モデル自体に誤りがあるわけではないと言えるだろう.

本研究では, 差分モデルを構築しておらず, 数値拡散の影響を調べることはできないため, これを厳密に証明することはできない. その一方で, 水平拡散項を意図的に数値モデルに入れた場合の数値実験で得られる解が, 水平拡散項がない場合の結果, および Held and Hou (1980) の結果と, どのような点で一致し, どのような点で異なるのかに興味をもった. そこで, 水平拡散項を東西流運動方程式に入れた

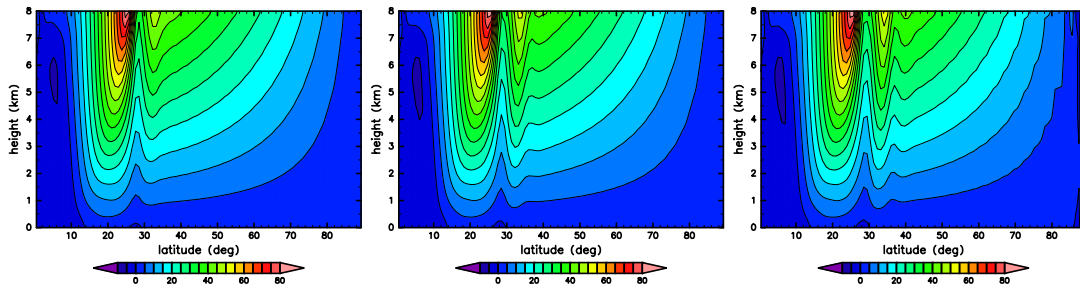
場合の数値実験を行った。3.1 節で用いた方程式系には水平拡散項がないため、物理的には正しく比較することはできない。しかし、いくつかの水平拡散係数を用いて数値実験を行った結果、Held and Hou (1980) の定常解にかなり近い解が得られたため、ここでそれを示す。次節では、実験設定を簡単に説明する。そして、C.3 節で、結果の比較をする。

(i) 東西風

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後



(ii) 流線関数

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後

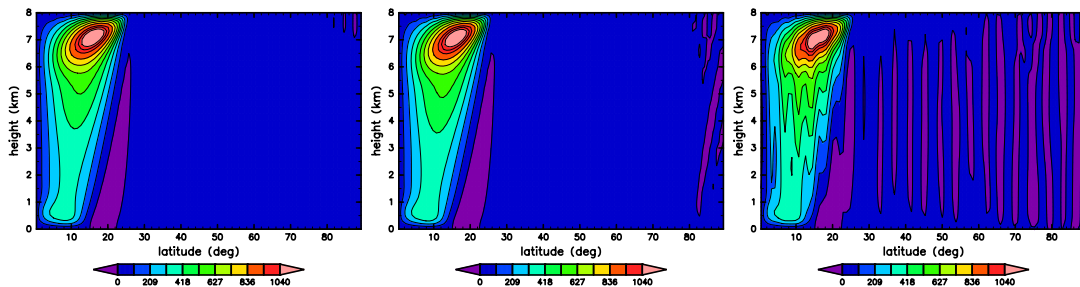


図 C.1: (a) 500 日後, (b) 750 日後, (c) 1000 日後における (i) 東西風と (ii) 流線関数. 東西風の等値線間隔は,  $5 \text{ m s}^{-1}$  であり, 流線関数の等値線間隔は,  $104.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  である.

## C.2 実験設定

本付録で用いる数値モデルは、2 章で解説した数値モデルと基本的に同じである。ただし、東西流運動方程式には、水平拡散項が加わっている

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \dots = \dots + \nu_H \nabla_H^2 u. \quad (\text{C.1})$$



ここで,  $\nu_H$  は水平拡散係数であり,  $\nabla_H^2$  は球面上の水平ラプラシアンである.  
実験設定は, 3.1 節におけるものと同じで

放射平衡温位場 :

$$\frac{\theta_E(\phi, z)}{\Theta_0} = 1 - \frac{1}{3}\Delta_H(3\sin^2\phi - 1) + \Delta_v\left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\right)$$

パラメータの値 :

$$\Omega = 2\pi/(8.64 \times 10^4) \text{ s}^{-1}, a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, g = 9.8 \text{ m s}^{-2}, H = 8.0 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\Theta_0 = 300 \text{ K}, \Delta_H = 1/3, \Delta_v = 1/8, \tau = 20 \text{ days},$$

$$C = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$$

解像度等 :

水平切断波数 : 126, 緯度格子点数 : 192,

鉛直切断波数 : 48, 鉛直格子点数 : 49,

時間刻み幅 : 120 s, 総積分時間 : 1000 days, 出力間隔 : 1 day

である.  $\nu_V$  は,  $\nu_V = 0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  で固定し, いくつかの  $\nu_H$  の値に対して数値実験を行った. ここでは,  $\nu_H = 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  の場合に得られた実験結果のみを示す.

### C.3 結果の比較

水平拡散項を入れた場合に得られる, (a) 500 日, (b) 750 日, (c) 1000 日における, (i) 東西風と (ii) 流線関数を図 C.2 に示す. 全体的にみると, 東西風, 流線関数ともに, 水平拡散がない場合の図 C.1 に比べると高波数成分がほとんどない (流線関数には,  $85 - 90^\circ$  の高高度に高波数成分が常に存在する.). (i) 東西風において, (a) と (b) を比較すると, 緯度  $32 - 34^\circ$  で等値線が南北にわずかに締まり, 緯度  $32 - 34^\circ$ ,  $z = 8 \text{ km}$  付近での等値線もわずかに広がっている. (a), (b) には, このようにわずかに時間変化した箇所が存在するが, (b) 750 日と (c) 1000 日を比較すると, このような細かい違いも見られなくなる. これは, (ii) 流線関数についても同じであり, 水平拡散項を入れることで, 高波数成分を抑えることができ, 定常状態に至ったと考えることができる.

水平拡散が (i) ない場合と (ii) ある場合で, 高波数成分の強さがどのように違うのかを運動エネルギーの南北スペクトルを描画することで確認する. 運動エネルギーの南北スペクトルは, Koshyk and Hamilton (2001) の式 (5) から

$$E_n(z, t) = \frac{1}{4} \frac{a^2}{n(n+1)} (|\zeta_n(z, t)|^2 + |D_n(z, t)|^2) \quad (\text{C.2})$$

で求める. ここで,  $\zeta_n(z, t)$ ,  $D_n(z, t)$  は, それぞれ鉛直渦度と水平発散の南北スペクトルである. また,  $n$  は南北波数であり, この式では  $1 \leq n$  である.

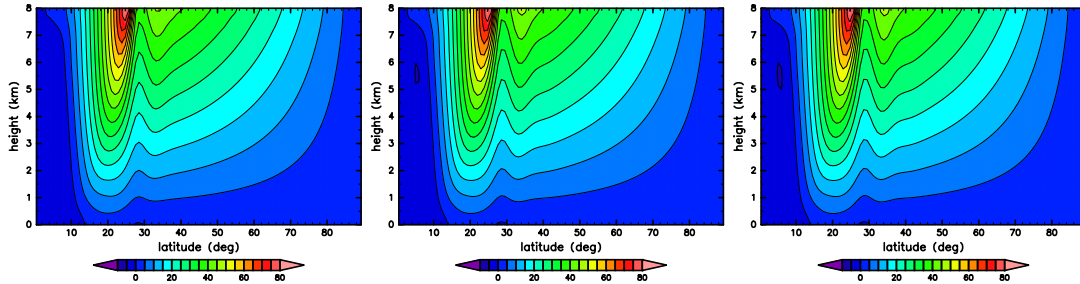
$z = 4 \text{ km}$  で切り出した, 各時刻における  $E_n$  を描画したのが図 C.3 である. (i), (ii) の両方の結果で約 20 以下の比較的  $n$  が小さい範囲では, (a), (b), (c) の強さや概形はほとんど一致している. しかし, (i) 水平拡散がない場合の結果では, 高波数成分が時間と共に強くなっていることがわかる. とりわけ,  $60 \leq n$  の領域で, (c) が (a), (b) よりも大きい. その一方で, (ii) 水平拡散がある場合,  $60 \leq n$  の高波数の領域でも, (a), (b), (c) でほとんど違いがないことが (d) からわかる. (i) の (c) と (ii) の (c) を比べても, 高波数側でのエネルギースペクトルの大きさが約  $10^5$  倍違うことがわかる.

(i) 東西風

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後



(ii) 流線関数

(a) 500 日後

(b) 750 日後

(c) 1000 日後

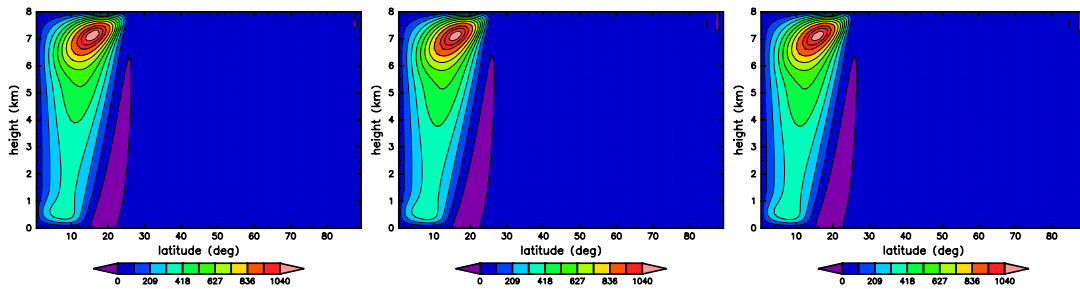
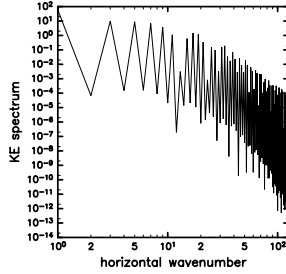


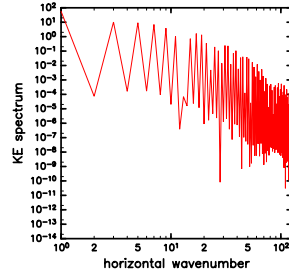
図 C.2: 水平拡散を入れた場合の実験で得られた (a) 500 日後, (b) 750 日後, (c) 1000 日後における (i) 東西風と (ii) 流線関数. 東西風の等値線間隔は,  $5 \text{ m s}^{-1}$  であり, 流線関数の等値線間隔は,  $104.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  である.

(i) 水平拡散なし

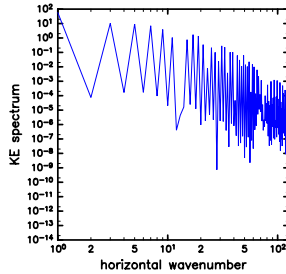
(a) 500 日



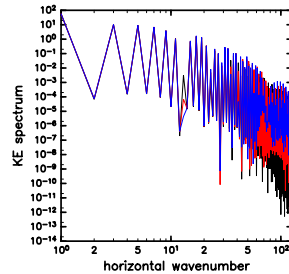
(b) 750 日



(c) 1000 日

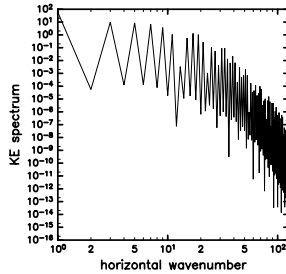


(d) 500, 750, 1000 日

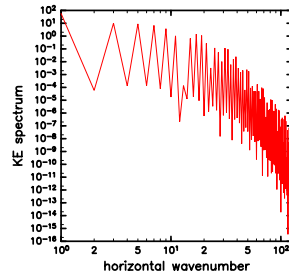


(ii) 水平拡散あり

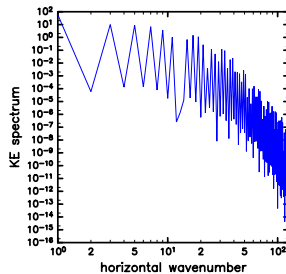
(a) 500 日



(b) 750 日



(c) 1000 日



(d) 500, 750, 1000 日

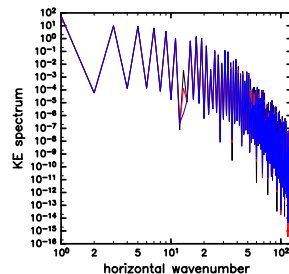


図 C.3: (i) 水平拡散がない場合, (ii) 水平拡散がある場合の運動エネルギーの水平スペクトル  $E_n(z, t)$ . (a), (b), (c) は各時刻における結果であり, (d) は (a), (b), (c) を重ねて描いたものである. 全ての図で両軸は対数軸である. また, これらは,  $z = 4 \text{ km}$  での結果である.

最後に, (i) 水平拡散なしで 1000 日後の結果, (b) 水平拡散なしで 800-1000 日の時間平均, (c) 水平拡散ありで 1000 日後の結果, (d) Held and Hou (1980) の結果を比較する, これは, 図 C.4 に描画されている.

まず流線関数から確認する. (i) 水平拡散がない場合の 1000 日後の結果に現れていた高波数成分は, (ii) の 800-1000 日で時間平均した結果で弱くなる. (iii) 水平拡散がある場合の流線関数では, (ii) のものより, 高波数成分が目立たない. (iii) で, 流線関数が最大値をとる領域 (緯度  $10 - 15^\circ$ , 高度 7km) は, (ii) のものよりより小さく, (iv) Held and Hou (1980) のものにより近い.

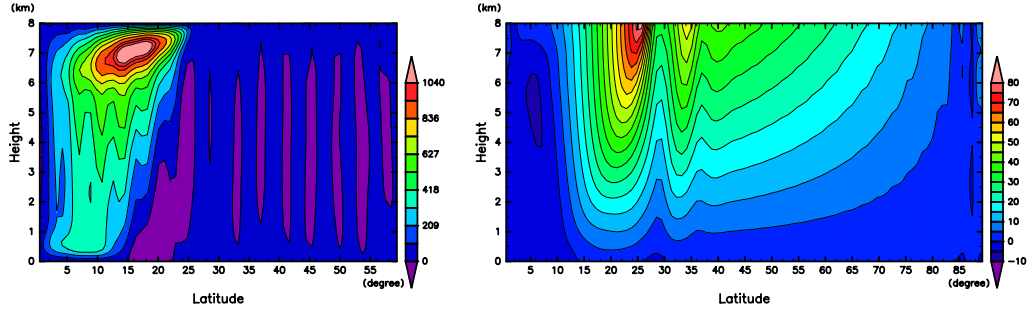
次に東西風分布を確認する. 水平拡散がない場合に, 高緯度側で顕著な高波数成分は, (iii) には存在しないことがわかる. 緯度  $30 - 35^\circ$  での東西風は, (iii) 水平拡散がある結果の方が, (i), (ii) 水平拡散がない結果より南北方向に均されたようになっている. これも, 水平拡散を入れたことによりもたらされたことであると考えられる.

## まとめと考察

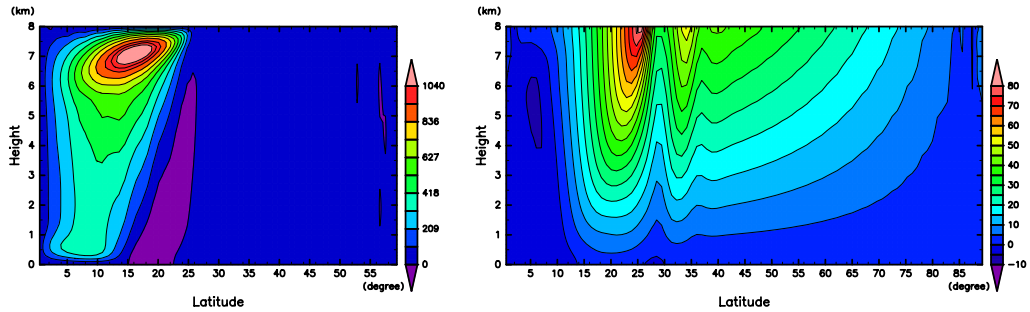
本付録では, 水平拡散を入れた場合の Held and Hou (1980) の数値実験を行った. 3.1 節に示した水平拡散がない場合に得られる結果に比べて, 高波数成分が抑えられることが東西風, 流線関数, 運動エネルギーの南北スペクトルからわかった. 水平拡散がある場合の定常解は, 水平拡散がない場合の 800-1000 日時間平均結果よりも, わずかに Held and Hou (1980) の定常解に似ている. これは, 流線関数の最大値をとる領域の大きさなどから判断した.

一方で,  $30 - 35^\circ$  にできる東西風の南北構造は, 図 C.4 にあるように, 水平拡散がある場合と Held and Hou (1980) の結果でも明確に異なる. 等値線間隔で比較すると, 水平拡散がない場合の結果で最も狭く, 次いで Held and Hou (1980) であり, 水平拡散がある場合の結果では, 一番広い. このことから,  $30 - 35^\circ$  における東西風は, 水平拡散もしくは数値拡散の影響を強く受けている可能性がある. したがって, (水平拡散がなく, 鉛直拡散はかなり小さい) 非粘性極限において, この領域の細かい構造を調べる場合は, 数値拡散の影響を受けないスペクトルモデルの方が適しているかもしれない.

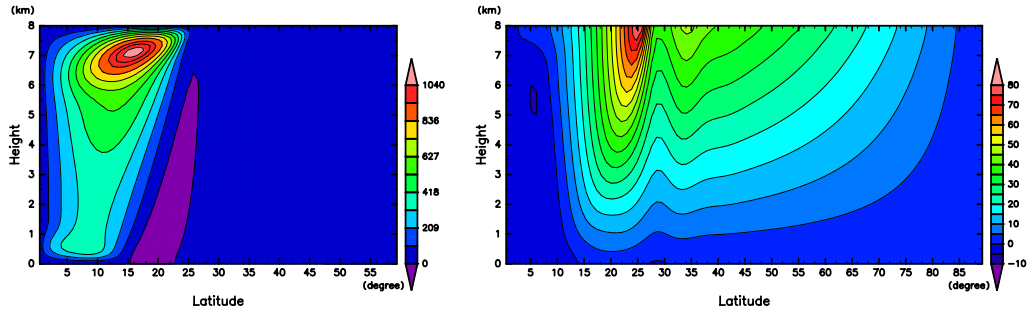
(i) 水平拡散なし, 1000 日



(ii) 水平拡散なし, 800-1000 日時間平均



(iii) 水平拡散あり, 1000 日



(iv) Held and Hou (1980) の結果

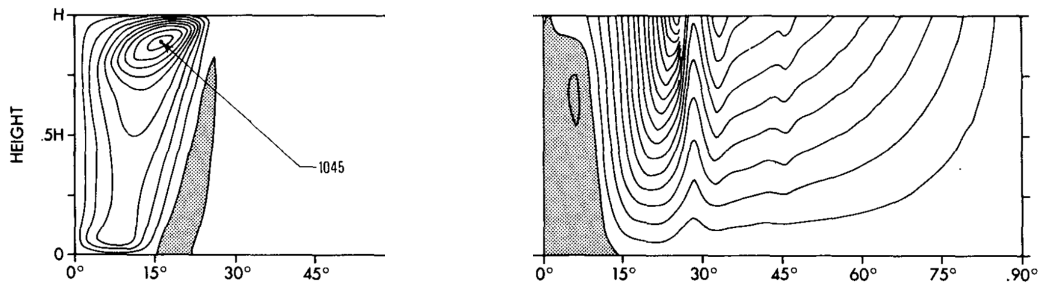


図 C.4: (i)-(iv) の設定における流線関数と東西風. 流線関数の等値線間隔は,  $104.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  であり, 東西風の等値線間隔は,  $5 \text{ m s}^{-1}$  である.

## 参考文献

- [1] Fang, M., and K. K. Tung, 1999: Time-dependent nonlinear hadley circulation, *J. Atmos. Sci.*, 56: pp. 1797-1807.
- [2] Held, I. M., and A. Y. Hou, 1980: Nonlinear axially symmetric circulations in a nearly inviscid atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 37: pp. 515-533.
- [3] Ishioka, K., N. Yamamoto, and M. Fujita, 2022: A formulation of a three-dimensional spectral model for the primitive equations, *J. Meteor. Soc. Japan*, 100: pp. 445-469.
- [4] Koshyk, J. N., and K. Hamilton, 2001: The Horizontal Kinetic Energy Spectrum and Spectral Budget Simulated by a High-Resolution Troposphere-Stratosphere-Mesosphere GCM, *J. Atmos. Sci.*, 58: pp.329-348.
- [5] Lindzen, R. S., and A. Y. Hou, 1988: Hadley circulations for zonally averaged heating centered off the equator, *J. Atmos. Sci.*, 45: pp. 2416-2427.
- [6] Lucas, C., I. Rudeva, H. Nguyen, G. Boschat, and P. Hope, 2021: Variability and changes to the mean meridional circulation in isentropic coordinates, *Climate Dynamics*, 58: pp. 257-276.
- [7] Qian, W., K. Wu, and H. Liang, 2015: Arctic and Antarctic cells in the troposphere, *Theoretical and Applied Climatology*, 125: pp. 1-12.
- [8] 石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版会.
- [9] 高橋 芳幸, 櫻村 博基, 竹広 真一, 石渡 正樹, 納多 哲史, 小高 正嗣, 堀之内 武, 林 祥介, DCPAM 開発グループ, 2018: 惑星大気モデル DCPAM. <http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/>
- [10] 竹広真一, 小高正嗣, 石岡圭一, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2006: 階層的地球流体スペクトルモデル集 SPMODEL, 日本流体力学会誌「ながれ」, 25 巻 5 号, pp. 485-486.

[11] 吉田茂生, 2020: 直交多項式.

[http://dyna.geo.kyushu-u.ac.jp/~yoshida/japanese/science-notes/orthogonal\\_polynomials/polynomials.pdf](http://dyna.geo.kyushu-u.ac.jp/~yoshida/japanese/science-notes/orthogonal_polynomials/polynomials.pdf)