

# レイリー・ベナール対流における熱輸送と レイリー数の関係についての考察

池田 諒

神戸大学 理学部 地球惑星科学科  
流体地球物理学教育研究分野

2017/03/22



## 要旨

レイリー・ベナール対流における熱輸送とレイリー数との間の関係について、理論的、数値実験的に研究を行った。まず Herring (1963) に従って自己相互作用的摂動を無視して単純化された支配方程式系を用いてレイリー・ベナール対流の数値シミュレーションを行い、ヌッセルト数  $N$  とレイリー数  $R$  との関係調べた。 $R = 4 \times 10^3$  から  $R = 10^6$  の範囲において調べたところ、Herring (1963) において主張されている  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  の関係を再現した。次に Herring (1963) で無視されていた項の効果を調べるため 2次元 Boussinesq 流体の支配方程式系の直接数値シミュレーションを行った。その結果、流れの水平領域が鉛直領域に比べて十分広い場合、 $R > 10^5$  の範囲で  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  の関係を満たさないことが分かった。このことから Herring (1963) で行われた方程式系の単純化は系の水平スケールを無視するという点において再考の余地があると言えることが分かった。さらに、 $N$  と  $R$  の間の 2つのスケーリング則  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  と  $N \sim R^{\frac{2}{7}}$  を導く議論について述べた。

# 目次

第1章	はじめに	4
第2章	Boussinesq 方程式系	6
2.1	Boussinesq 方程式系の導出	6
2.1.1	状態方程式	6
2.1.2	連続の式	7
2.1.3	運動方程式	7
2.1.4	熱力学方程式	8
2.1.5	Boussinesq 流体の支配方程式系 (まとめ)	9
2.2	Boussinesq 方程式系の無次元化	10
2.2.1	連続の式の無次元化	10
2.2.2	運動方程式の無次元化	10
2.2.3	熱力学方程式の無次元化	12
2.2.4	無次元化された Boussinesq 流体の支配方程式系 (まとめ)	14
第3章	支配方程式の導出	15
3.1	Herring (1963) における支配方程式の導出	15
3.2	Fourier 級数展開を用いた支配方程式の表現	18
3.2.1	$w$ の時間発展方程式	19

3.2.2	$\theta$ の時間発展方程式 . . . . .	21
3.2.3	$\psi$ の時間発展方程式 . . . . .	24
3.3	支配方程式の導出 II . . . . .	25
3.3.1	渦度方程式 . . . . .	26
3.3.2	熱力学方程式 . . . . .	28
3.3.3	支配方程式の無次元化 . . . . .	28
第 4 章	Herring (1963) の支配方程式について . . . . .	30
4.1	簡単化しない支配方程式との対応関係 . . . . .	30
4.2	エントロピー保存の式の導出 . . . . .	35
4.3	温度勾配と熱輸送の関係式の導出 . . . . .	38
第 5 章	数値シミュレーションの結果と考察 . . . . .	41
5.1	Herring (1963) の再現結果 . . . . .	41
5.1.1	状況設定 . . . . .	41
5.1.2	再現結果 . . . . .	42
5.2	Boussinesq 系の直接数値シミュレーション結果 . . . . .	53
5.2.1	状況設定 . . . . .	53
5.2.2	シミュレーション結果 . . . . .	53
5.3	スケーリングから導かれるヌッセルト数とレイリー数の関係式 . . . . .	56
5.3.1	$N \sim R^{\frac{1}{3}}$ の説明 . . . . .	56
5.3.2	$N \sim R^{\frac{2}{7}}$ の説明 . . . . .	57
第 6 章	結論 . . . . .	60

卒業研究	目次	3
謝辞		61
付録 A Arakawa Jacobian 法		62
付録 B 臨界レイリー数の導出		70
参考文献		73

# 第1章 はじめに

大気や海洋の現象を記述する上で対流現象について考えることは非常に重要である。対流の最も一般的な例として熱対流が挙げられる<sup>\*1</sup>。熱対流とは鉛直方向、水平方向に限らず流体が空間的な温度勾配を持つことによって生じる不安定を解消するために運動を行う現象のことである。熱対流の研究のとしてベナール (Benard) が 1900 年に行った実験が有名である。ベナールは薄い高粘性の流体層の下面を一樣に加熱することによって対流が生じた際、六角形状のセルが形成されることを発見した。このセルは今日ではベナールセルと呼ばれている。ベナールが行った実験は 1916 年にレイリー (Rayleigh) によって理論的な考察が行われ、数理モデルによって記述することが可能となった。このモデルの重要な前提として、方程式系が Boussinesq 系であること、上下の境界面の温度が時間的に一定・空間的に一樣であることである。以上の経緯からレイリーのモデルで記述された対流はベナール対流、もしくはレイリー・ベナール対流と呼ばれている。上で述べたようにベナール対流は 100 年以上の歴史を持つ古典的な問題であるが、現在でもさらに複雑な問題を考えるための例題として研究はさかんに行われている。

対流現象において、ヌッセルト数  $N$  とレイリー数  $R$  の関係が重要である。本論文では対流問題を研究するための第一歩としてレイリー・ベナール対流における熱輸送とレイリー数の関係について考察する。この関係は Herring (1963) が数値実験によって示しており、 $R > 3000$  において  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  という関係が得られている。そのためまず Herring (1963) の再現実験を行う。ここで Herring (1963) の数値実験は単純化された支配方程式を用いて行われた。そこでレイリー・ベナール対流の支配方程式を単純化を行わずに解くことで Herring (1963) 中で行われた支配方程式系の単純化が引き起こす影響について考察する。

本論文の構成は以下の通りである。2 章ではベナール対流を研究するための支配方程式系である Boussinesq 方程式系についてまとめる。3 章では Herring (1963) で使用された支配方程式系と単純化を行わない場合の支配方程式系の導出を行う。4 章では Herring (1963) における支配方程式の特徴について述べる。5 章では導出された支配方程式系を用いた数値シミュレーションの概要と結果を示し、そしてス

<sup>\*1</sup> 熱対流の他に、組成分布の偏りによる対流や力学的な仕事による対流が挙げられる。

ケーリング則を用いたヌッセルト数とレイリー数の関係についてまとめる. 6章では結論を述べる.



## 第2章 Boussinesq 方程式系

ベナール対流を研究するための支配方程式系である Boussinesq 方程式系について述べる。はじめに流体力学の基礎方程式系から Boussinesq 方程式系を導出し、続いて Herring (1963) の再現実験を行うために必要な方程式系の無次元化を行う。

### 2.1 Boussinesq 方程式系の導出

流体力学の基礎方程式に Boussinesq 近似を適用して方程式系を簡略化する。Boussinesq 近似では二つの仮定;

1. 非圧縮 (密度が圧力によって変化しない)
2. 基準状態からの摂動が微小である (摂動の 2 次以上の項は無視する) を用いている。

#### 2.1.1 状態方程式

状態方程式の一般的な表式は

$$\rho = \rho(p, T) \quad (2.1.1)$$

である。ここで、 $\rho$  は密度、 $p$  は圧力、 $T$  は温度である。そしてそれぞれの物理量について、基準状態での値に添字 R, 基準状態からの摂動に添字プライムをつけて表現することにする。密度を基準状態のまわりでテイラー展開すると、

$$\rho(p, T) = \rho(p_R, T_R) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T (p - p_R) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p (T - T_R) + \mathcal{O}((p - p_R)^2, (T - T_R)^2) \quad (2.1.2)$$

と書ける。ここで、 $\rho(p_R, T_R) \equiv \rho_R$  とおく。また、各物理量を基準状態の値と摂動の値に分けて

$$\rho = \rho_R + \rho' \quad p = p_R + p' \quad T = T_R + T' \quad (2.1.3a, b, c)$$

と書く. このとき (2.1.2) は

$$\rho' = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T p' + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' + \mathcal{O}((p - p_R)^2, (T - T_R)^2) \quad (2.1.4)$$

と書き換えることができる. ここで (2.1.4) の第一項は, 非圧縮であるという Boussinesq 近似の仮定から消去される. また微小量の二次以上の項は無視する. このとき (2.1.4) は

$$\rho' = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' \quad (2.1.5)$$

と書ける. また, ここで体膨張率  $\alpha$  を

$$\alpha \equiv -\frac{1}{\rho_R} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.1.6)$$

と定義すると

$$\rho' = -\alpha \rho_R T' \quad (2.1.7)$$

と書ける. この式が Boussinesq 流体における状態方程式である.

## 2.1.2 連続の式

連続の式の一般的な表式は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.8)$$

である. ここで  $\mathbf{v}$  は速度である. (2.1.8) に非圧縮の仮定を用いると,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.9)$$

となる. この式が Boussinesq 流体における連続の式である.

## 2.1.3 運動方程式

非圧縮性を仮定した Newton 流体における運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - g \mathbf{k} \quad (2.1.10)$$

である. ここで  $\nu$  は動粘性係数,  $g$  は重力加速度,  $\mathbf{k}$  は鉛直方向上向きの単位ベクトルである. 水平方向に一様な基準状態を考え, 基準状態はさらに静止した定常状態であるとする. このとき (2.1.10) において  $\mathbf{v} = 0$  とすると,

$$0 = -\frac{1}{\rho_R} \nabla p_R - g\mathbf{k} \quad (2.1.11)$$

となり, これは静水圧平衡の関係式である.

次に (2.1.10) の  $\rho, p$  を基準状態と摂動に分けて表す. このとき右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla p &= -\frac{1}{\rho_R + \rho'} \nabla(p_R + p') \\ &= \frac{1}{\rho_R} \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_R}\right)^{-1} \nabla(p_R + p') \\ &= \frac{1}{\rho_R} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_R} + \dots\right) \nabla(p_R + p') \\ &\simeq -\frac{1}{\rho_R} \nabla p_R - \frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_R} \left(\frac{1}{\rho_R} \nabla p_R\right) + \frac{\rho'}{\rho_R} \left(\frac{1}{\rho_R} \nabla p'\right) \\ &\simeq -\frac{1}{\rho_R} \nabla p_R - \frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_R} \left(\frac{1}{\rho_R} \nabla p_R\right) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

と書ける. ここで熱力学量の摂動が微小であるという仮定から摂動の 2 次以上の項を近似的に無視した. (2.1.10) に (2.1.12) を代入すると,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_R} \nabla p_R - \frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_R} \left(\frac{1}{\rho_R} \nabla p_R\right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - g\mathbf{k} \quad (2.1.13)$$

と書ける. そして (2.1.13) に静水圧平衡の関係式 (2.1.11) と状態方程式 (2.1.7) を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_R} \left(\frac{1}{\rho_R} \nabla p_R\right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \\ \iff \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\rho'}{\rho_R} g\mathbf{k} \\ \iff \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha g T' \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

この式が Boussinesq 流体における運動方程式である.

## 2.1.4 熱力学方程式

一般的に熱力学方程式は

$$c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) = j + \kappa \nabla^2 T \quad (2.1.15)$$

と書く. ここで  $c_v$  は定積比熱,  $J$  は単位質量あたりの流体の加熱量,  $\kappa$  は熱伝導係数である. 今, 断熱系 ( $\dot{J} = 0$ ) を考える. 水平方向に一様な基準状態を考え, 再び基準状態は静止した定常状態であるとする. このとき基準状態の熱力学方程式は (2.1.15) より

$$0 = \kappa \nabla^2 T_R = \kappa \frac{d^2 T_R}{dz^2} \quad (2.1.16)$$

である. これを  $T_R$  について解くと  $T_R$  は  $z$  の一次関数の形で

$$T_R = T_0 - \Gamma z \quad (2.1.17)$$

と書くことができる. 水平方向一様な場を考えているので, 空間微分は  $z$  成分のみが残る. ここで  $T_0$  は基準状態の基準点における温度,  $\Gamma$  は温度減率である.

次に断熱系において (2.1.15) を基準状態とそこからの摂動に分けて表すと,

$$\begin{aligned} c_v \left[ \frac{\partial}{\partial t} (T_R + T') + \mathbf{v} \cdot \nabla (T_R + T') \right] - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} &= \kappa \nabla^2 (T_R + T') \\ \iff c_v \left[ \frac{\partial}{\partial t} (T') + w \frac{dT_R}{dz} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' \right] &= \kappa \nabla^2 T' \\ \iff \frac{\partial T'}{\partial t} - \Gamma w + \mathbf{v} \cdot \nabla T' &= \frac{\kappa}{c_v} \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

と書ける. 式変形の途中で流体が非圧縮である仮定と (2.1.17) を用いた. 最後に (2.1.18) の右辺の  $\kappa/c_v$  を改めて  $\kappa$  と置きなおした式

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' - \Gamma w = \kappa \nabla^2 T' \quad (2.1.19)$$

が Boussinesq 流体における熱力学方程式である.

以上で流体力学の基礎方程式を Boussinesq 近似した方程式系 (2.1.9), (2.1.14), (2.1.19) が導かれた.

## 2.1.5 Boussinesq 流体の支配方程式系 (まとめ)

この節で導出された Boussinesq 方程式系についてまとめる:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \alpha g T' \mathbf{k}, \quad (2.1.14)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' - \Gamma w = \kappa \nabla^2 T'. \quad (2.1.19)$$

## 2.2 Boussinesq 方程式系の無次元化

Boussinesq 近似によって得られた方程式系 (2.1.9), (2.1.14), (2.1.19) を無次元化する.

上記の方程式系中の変数をそれぞれ

$$(x, y, z) = d(x^*, y^*, z^*) \quad \text{or} \quad \mathbf{r} = d \mathbf{r}^* \quad (2.2.1)$$

$$t = \frac{d^2}{\kappa} t^* \quad (2.2.2)$$

$$(u, v, w) = \frac{\kappa}{d} (u^*, v^*, w^*) \quad \text{or} \quad \mathbf{v} = \frac{\kappa}{d} \mathbf{v}^* \quad (2.2.3)$$

$$T' = \Gamma d T^* \quad (2.2.4)$$

のように代表的なスケール  $d, \kappa, \Gamma$  と無次元変数 (上付き添字\*) に分けて表記する. ここで  $(u, v, w)$  はそれぞれ速度の  $(x, y, z)$  成分である.

### 2.2.1 連続の式の無次元化

(2.1.9) を代表的スケールと無次元変数に分解すると,

$$\frac{1}{d} \frac{\kappa}{d} \nabla^* \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2.5)$$

である. したがって

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (2.2.6)$$

となり, この式 (2.2.6) が無次元化された連続の式である.

### 2.2.2 運動方程式の無次元化

後の計算のため, まず (2.1.14) の両辺に 2 度回転をとる. 各項についてみると, まず (2.1.14) の左辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2 \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

である. ここでベクトル解析の公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.2.8)$$

を用いた<sup>\*1</sup>. 次に左辺第 2 項は

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}), \quad (2.2.9)$$

右辺第 1 項は

$$-\frac{1}{\rho_R} \nabla \times \nabla \times \nabla p' = 0 \quad (2.2.10)$$

である. ここで  $\nabla \times \nabla \phi = 0$  ( $\phi$ : 任意のスカラー量) であることを用いた. そして右辺第 2 項は

$$\nabla \times \nabla \times \nu \nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla^2(\nu \nabla^2 \mathbf{v}) \quad (2.2.11)$$

である. ここで (2.2.8) を用いた. 最後に右辺第 3 項は

$$\nabla \times \nabla \times (\alpha T' g \mathbf{k}) \quad (2.2.12)$$

である. 以上をまとめた式が

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -\nabla^2(\nu \nabla^2 \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times (\alpha T' g \mathbf{k}) \\ \iff \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 \mathbf{v} &= \alpha g \nabla \times \nabla \times \mathbf{k} T' + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

である. これを無次元化すると,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial}{\partial t^*} - \frac{\nu}{d^2} \nabla^{*2} \right) \frac{1}{d^2} \nabla^{*2} \frac{\kappa}{d} \mathbf{v}^* &= \alpha g \frac{1}{d^2} \Gamma d \nabla^* \times \nabla^* \times \mathbf{k} T^* + \frac{1}{d^3} \frac{\kappa^2}{d^2} \nabla^* \times \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^*) \\ \iff \left( \frac{\kappa^2}{d^5} \frac{\partial}{\partial t^*} - \frac{\nu \kappa}{d^5} \nabla^{*2} \right) \nabla^{*2} \mathbf{v}^* &= \frac{\alpha g \Gamma}{d} \nabla^* \times \nabla^* \times \mathbf{k} T^* + \frac{\kappa^2}{d^5} \nabla^* \times \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^*) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

<sup>\*1</sup> 和の規約を用いて  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$  を証明する.

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} &= e_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_l v_m) \\ &= e_i \varepsilon_{kji} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l v_m \\ &= e_i (\delta_{jl} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l v_m \\ &= e_i (\partial_j \partial_i v_j - \partial_j \partial_j v_i) \\ &= e_i \partial_j \partial_i v_j - e_i \partial_j \partial_j v_i \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} \end{aligned}$$

本文中では連続の式  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  よりこの式の第 2 項のみが残っている. また, この証明における 3 つ目の等号で用いた式  $\varepsilon_{kji} \varepsilon_{klm} = \delta_{jl} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$  は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} &= \det \begin{bmatrix} \delta_{jl} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{bmatrix} \\ &= \delta_{jl} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \end{aligned}$$

であることを用いた.

となる. そしてこの両辺に  $d^5/\kappa^2$  を掛けると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} - \frac{\nu}{\kappa} \nabla^{*2}\right) \nabla^{*2} \mathbf{v}^* = \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\kappa^2} \nabla^* \times \nabla^* \times \mathbf{k} T^* + \nabla^* \times \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^*) \quad (2.2.15)$$

となる. ここでプラントル数  $\sigma$  とレイリー数  $R$  をそれぞれ

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.2.16)$$

$$R = \frac{\alpha \Gamma g d^4}{\kappa \nu} \quad (2.2.17)$$

とおくと (2.2.15) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t^*} - \sigma \nabla^{*2}\right) \nabla^{*2} \mathbf{v}^* &= R \sigma \nabla^* \times \nabla^* \times \mathbf{k} T^* + \nabla^* \times \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^*) \\ \iff \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t^*} - \nabla^{*2}\right) \nabla^{*2} \mathbf{v}^* &= R \nabla^* \times \nabla^* \times \mathbf{k} T^* + \frac{1}{\sigma} \nabla^* \times \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^*) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

となる. この式 (2.2.18) が無次元化された運動方程式である.

### 2.2.3 熱力学方程式の無次元化

(2.1.19) を無次元化すると,

$$\frac{\kappa}{d^2} \Gamma d \frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \Gamma \frac{\kappa}{d} w^* + \frac{\kappa}{d} \frac{1}{d} \Gamma d \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* = \kappa \frac{1}{d^2} \Gamma d \nabla^{*2} T^* \quad (2.2.19)$$

と書け, これを整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa \Gamma}{d} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \frac{\kappa \Gamma}{d} w^* + \frac{\kappa \Gamma}{d} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* &= \frac{\kappa \Gamma}{d} \nabla^{*2} T^* \\ \iff \left(\frac{\partial}{\partial t^*} - \nabla^{*2}\right) T^* &= w^* - \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

となる. この式 (2.2.20) が無次元化された熱力学方程式である.

ここでヌッセルト数  $N$  の定義もしておく. ヌッセルト数は水平平均された鉛直方向への伝導による熱フラックスに対する水平平均された鉛直方向への総熱フラックスの比である. ここで考える熱フラックス  $F$  は, 熱力学方程式 (2.1.15) において非圧縮・断熱系を考え,  $\kappa/c_v$  を  $\kappa$  と置きなおした式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (2.2.21)$$

から

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F} \quad (2.2.22)$$

の形式に書き換えることで得られる. ここで

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z),$$

$$F_x = uT - \kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.2.23)$$

$$F_y = vT - \kappa \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.2.24)$$

$$F_z = wT - \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.2.25)$$

であり, 鉛直方向への総熱フラックスは (2.2.25) である. そして鉛直方向への伝導による熱フラックス  $F_{z \text{ cond}}$  は  $T$  と  $w$  を

$$T(x, y, z, t) = T_R(z) + T'(x, y, z, t), \quad (2.2.26)$$

$$w(x, y, z, t) = w_R(z) + w'(x, y, z, t) \quad (2.2.27)$$

のように基準状態 (熱伝導のみで対流が起こっていない状態) とそこからの摂動 (対流による摂動) に分けることで

$$F_{z \text{ cond}} = w_R T_R - \kappa \frac{\partial T_R}{\partial z} \quad (2.2.28)$$

と書ける. ここで  $w_R = 0$  である. また, 水平平均を上付きバーで表現すると  $\overline{T'} = 0$ ,  $\overline{w'} = 0$  である. さらに (2.1.17) であることにも注意する. 以上よりヌッセルト数  $N$  は

$$\begin{aligned} N &\equiv \frac{\overline{F_z}}{\overline{F_{z \text{ cond}}}} = \frac{\overline{wT - \kappa \frac{\partial T}{\partial z}}}{\overline{w_R T_R - \kappa \frac{\partial T_R}{\partial z}}} = \frac{\overline{w'T' - \kappa \frac{\partial T_R}{\partial z}}}{-\kappa \frac{\partial T_R}{\partial z}} \\ &= \frac{\overline{w'T'} + \kappa \Gamma}{\kappa \Gamma} \\ &= 1 + \frac{\overline{w'T'}}{\kappa \Gamma} \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

と書くことができる \*2 .

\*2 2 つめの等式で

$$\begin{aligned} \overline{wT} &= \overline{(w_R + w')(T_R + T')} \\ &= \overline{w'(T_R + T')} \\ &= \overline{w'T_R} + \overline{w'T'} \\ &= \overline{w'T'} \end{aligned}$$

であることを用いた.



## 2.2.4 無次元化された Boussinesq 流体の支配方程式系 (まとめ)

この節で導出された無次元化された Boussinesq 方程式系についてまとめる:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0, \quad (2.2.6)$$

$$\left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t^*} - \nabla^{*2} \right) \nabla^{*2} \mathbf{v}^* = R \nabla^* \times \nabla^* \times \mathbf{k} T^* + \frac{1}{\sigma} \nabla^* \times \nabla^* \times (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^*), \quad (2.2.18)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t^*} - \nabla^{*2} \right) T^* = w^* - \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^*. \quad (2.2.20)$$

## 第3章 支配方程式の導出

### 3.1 Herring (1963) における支配方程式の導出

前章で導いた無次元化された Boussinesq 方程式系を再掲する. ただし記述を簡単にするため上付き添字 \* は省略する.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \mathbf{v} = R \nabla \times \nabla \times \mathbf{k} T + \frac{1}{\sigma} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (3.1.2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) T = w - \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (3.1.3)$$

これらの式に含まれる無次元化された温度の摂動部分  $T$  を以下のように分けて表す.

$$T = \psi(z, t) + \theta(x, y, z, t) \quad (3.1.4)$$

ここで,  $\psi(z, t)$  は熱伝導状態の水平平均されたゆがみ,  $\theta(r, t)$  はそのゆがんだ値からの温度のゆらぎである. また, 境界条件として

$$\psi(0, t) = \psi(1, t) = 0 \quad (3.1.5)$$

$$\theta(x, y, 0, t) = \theta(x, y, 1, t) = \bar{\theta} = 0 \quad (3.1.6)$$

を与える. ここで上付きバーは水平平均を表す. そして水平方向の境界条件は周期的であるとする. また,  $\theta$  の水平平均は定義により内部領域でゼロである.

熱力学方程式 (3.1.3) に (3.1.4) を代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi + \theta) - \nabla^2 (\psi + \theta) = w - \nabla \cdot \{ (\psi + \theta) \mathbf{v} \} \quad (3.1.7)$$

となる<sup>\*1</sup>. この式を展開して整理すると

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \{ (\psi + \theta) \mathbf{v} \} - w = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \nabla^2 \theta \quad (3.1.8)$$

<sup>\*1</sup> ここで  $\nabla \cdot (\mathbf{v} T) = T \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla T$  に連続の式  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  を用いると  $\mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\mathbf{v} T)$  となることを利用した.

となる. この式の各物理量の水平平均をとり整理すると<sup>\*2</sup>,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\{(\psi + \theta)u\}} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\{(\psi + \theta)v\}} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\{(\psi + \theta)w\}} - \bar{w} \\ = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

と書ける. ここで定義より  $\bar{\psi} = \psi$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\bar{w} = 0$ <sup>\*3</sup> であることと境界条件, 周期境界条件を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\{(\psi + \theta)w\}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ \iff \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\psi w} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\theta w} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

ここで  $\overline{\psi w}$  は  $\overline{\psi w} = \psi \bar{w} = 0$  と書けるので

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta} \quad (3.1.11)$$

が得られる. この式が温度摂動の水平平均された部分  $\psi$  についての方程式である.

次に  $\theta$  についての式を導く. (3.1.8) と (3.1.11) の両辺についての差をとると,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\psi + \theta)\mathbf{v}\} - w - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta} = \nabla^2 \theta \quad (3.1.12)$$

と書ける. ここで (3.1.12) の左辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{(\psi + \theta)\mathbf{v}\} &= \psi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi + \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) \\ &= w \frac{\partial \psi}{\partial z} + \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

と書けるので (3.1.12) は

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \theta + w \frac{\partial \psi}{\partial z} + \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) - w - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta} = 0 \\ \iff \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \theta + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) w - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta} + \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

<sup>\*2</sup> ここで微分と水平平均の順序を入れ替えても良いことを用いた.

<sup>\*3</sup>  $\bar{w} = 0$  であることを示す. 周期境界条件より  $\bar{u} = 0$ ,  $\bar{v} = 0$  なので連続の式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \\ \iff \frac{\partial}{\partial z} \bar{w} = 0 \\ \iff \bar{w} = \text{const} \end{aligned}$$

したがって境界条件  $\bar{w}(0, t) = 0$  より  $\bar{w} = 0$  である.

と書ける. この式を, 鉛直方向の単位ベクトル  $k$  を用いて整理すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\theta = \left(1 - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)w - \nabla \cdot (\mathbf{v}\theta - k\overline{w\theta}) \quad (3.1.15)$$

となる. この式が  $\theta$  についての式である.

最後に  $w$  についての式を導く. 運動方程式 (3.1.2) の  $z$  成分に注目すると,

$$\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\nabla^2 w = R\{\nabla \times (\nabla \times kT)\}_z + \frac{1}{\sigma}\{\nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})\}_z \quad (3.1.16)$$

と書ける. ここで右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} \{\nabla \times (\nabla \times kT)\}_z &= \left[ \nabla \times \left( \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{j} \right) \right]_z \\ &= -\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ &= -\nabla_1^2 T \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

と書ける. ここで

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.1.18)$$

と定義した. したがって (3.1.16) は

$$\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\nabla^2 w = -R\nabla_1^2 T + \frac{1}{\sigma}\{\nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})\}_z \quad (3.1.19)$$

と書ける. この式に  $T = \psi + \theta$  を代入すると,  $\psi$  は  $x, y$  に依存しないため,

$$\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\nabla^2 w = -R\nabla_1^2 \theta + \frac{1}{\sigma}\{\nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})\}_z \quad (3.1.20)$$

となる.

まとめると, 以下に再掲する  $z$  成分についての運動方程式 (3.1.20), 温度摂動の水平平均部分についての熱力学方程式 (3.1.11), 温度摂動の水平平均からのゆらぎ部分についての熱力学方程式 (3.1.15) が得られた:

$$\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\nabla^2 w = -R\nabla_1^2 \theta + \frac{1}{\sigma}\{\nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})\}_z, \quad (3.1.20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\theta = \beta w - \nabla \cdot (\mathbf{v}\theta - k\overline{w\theta}), \quad (3.1.15')$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{w\theta}. \quad (3.1.11)$$

ここで

$$\beta \equiv \left(1 - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \quad (3.1.21)$$

と定義した.

そして (3.1.20), (3.1.15') について自己相互作用的な摂動に関する項を無視すると, Herring (1963) 中の方程式系 (9), (10), (11)

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 w = -R \nabla_1^2 \theta \quad (3.1.22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \theta = \beta w \quad (3.1.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi = -\frac{\partial}{\partial z} w \theta \quad (3.1.11)$$

が得られた.

## 3.2 Fourier 級数展開を用いた支配方程式の表現

数値計算を簡略化するために, Fourier 級数展開を用いて前節で導かれた方程式系の変形を行う.

Herring (1963) 中の (9), (10), (11) 式

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 w = -R \nabla_1^2 \theta, \quad (3.1.22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \theta = \beta w, \quad (3.1.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi = -\frac{\partial}{\partial z} w \theta, \quad (3.1.11)$$

に含まれる  $w, \theta, \psi$  を, 境界条件を考慮して以下のように Fourier 級数展開する:

$$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{n, \alpha} f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z, \quad (3.2.1)$$

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \sum_{n, \alpha} f_\alpha(x, y) \theta_n^\alpha \sin n\pi z, \quad (3.2.2)$$

$$\psi(z, t) = \sum_n \psi_n \sin n\pi z. \quad (3.2.3)$$

ここで  $f_\alpha(x, y)$  は水平方向における適切な周期境界条件のもとで演算子  $\nabla_1^2$  によって作られる任意の正規直交関数

$$\nabla_1^2 f_\alpha(x, y) = -\pi^2 \alpha^2 f_\alpha(x, y) \quad (3.2.4)$$

であり,

$$\overline{f_\alpha f_{\alpha'}} = \delta_{\alpha\alpha'} \quad (3.2.5)$$

に従う。

### 3.2.1 $w$ の時間発展方程式

(9) に (3.2.1) と (3.2.2) を代入すると,

$$\left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z = -R \nabla_1^2 \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x, y) \theta_n^\alpha \sin n\pi z \quad (3.2.6)$$

となる。

ここで,  $w(\mathbf{r}, t)$  に  $\nabla^2$  を作用させることは

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z &= w_n^\alpha \left( \nabla_1^2 f_\alpha(x, y) \sin n\pi z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f_\alpha(x, y) \sin n\pi z \right) \\ &= w_n^\alpha \{ -\pi^2 \alpha^2 f_\alpha(x, y) \sin n\pi z - \pi^2 n^2 f_\alpha(x, y) \sin n\pi z \} \\ &= -\pi^2 (\alpha^2 + n^2) f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

と書けることから,  $-\pi^2 (\alpha^2 + n^2)$  を掛けることに等しい.  $\theta(\mathbf{r}, t)$  に  $\nabla^2$  を作用させる場合も同様である. このことと (3.2.4) を用いると (3.2.6) は

$$\begin{aligned} \sum_{n,\alpha} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 (\alpha^2 + n^2) \right) \{ -\pi^2 (\alpha^2 + n^2) \} f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z \\ = - \sum_{n,\alpha} R \pi^2 \alpha^2 f_\alpha(x, y) \theta_n^\alpha \sin n\pi z \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

と書くことができる。

そしてこの式の両辺に  $f_{\alpha'}(x, y)$  を掛けて水平平均をとる ( $x, y$  について水平の全領域で積分する) と, (3.2.5) より  $\alpha$  についての和は  $\alpha = \alpha'$  のときのみ値が残り,

$$\begin{aligned} \sum_n \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 (\alpha'^2 + n^2) \right) \{ -\pi^2 (\alpha'^2 + n^2) \} w_n^{\alpha'} \sin n\pi z \\ = - \sum_n R \pi^2 \alpha'^2 \theta_n^{\alpha'} \sin n\pi z \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

となる. 次にこの式に  $\sin n'\pi z$  を掛けて  $z$  について鉛直の全領域 (0 から 1) で積分すると, 三角関数の直交性より  $n$  についての和は  $n = n'$  のときのみ値が残り,

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 (\alpha'^2 + n'^2)\right) \{-\pi^2 (\alpha'^2 + n'^2)\} w_{n'\alpha'} = -R\pi^2 \alpha'^2 \theta_{n'\alpha'} \quad (3.2.10)$$

となる<sup>\*4</sup>. この式を整理して両辺を  $\pi^4$  で割ると,

$$\left(\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} + n'^2 + \alpha'^2\right) \frac{1}{\pi^2} w_{n'\alpha'} = -\frac{R}{\pi^4} \frac{\pi^2 \alpha'^2 \theta_{n'\alpha'}}{\{-\pi^2 (n'^2 + \alpha'^2)\}} \quad (3.2.11)$$

と書ける. ここで

$$\lambda = \frac{R}{\pi^4} \quad (3.2.12)$$

$$\tau = \pi^2 t \quad (3.2.13)$$

$$\omega_n = \frac{w_n}{\pi^2} \quad (3.2.14)$$

と置き, 記述を簡単にするため上付き添字'を省略すると,

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \omega_n^\alpha = \frac{\lambda \alpha^2}{n^2 + \alpha^2} \theta_n^\alpha \quad (3.2.15)$$

<sup>\*4</sup> 三角関数の直交性について確認する.

$$\int_0^1 (\sin n\pi z)(\sin n'\pi z) dz = -\int_0^1 \frac{1}{2} (\cos(n+n')\pi z - \cos(n-n')\pi z) dz$$

$n \neq n'$  のとき

$$\begin{aligned} & -\int_0^1 \frac{1}{2} (\cos(n+n')\pi z - \cos(n-n')\pi z) dz \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n+n')\pi} \sin(n+n')\pi z - \frac{1}{(n-n')\pi} \sin(n-n')\pi z \right]_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$n = n'$  のとき

$$\begin{aligned} & -\int_0^1 \frac{1}{2} (\cos(n+n')\pi z - \cos(n-n')\pi z) dz \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{2} (\cos(n+n')\pi z - \cos 0) dz \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n+n')\pi} \sin(n+n')\pi z - z \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^1 (\sin n\pi z)(\sin n'\pi z) dz = \frac{1}{2} \delta_{nn'}$$

となる. 以上で Fourier 級数展開された  $w$  の時間発展方程式 (Herring (1963) の (13) 式) が導かれた.

### 3.2.2 $\theta$ の時間発展方程式

(10) に (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) を代入すると,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x, y) \theta_n^\alpha \sin n\pi z = \beta \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x, y) \theta_n^\alpha \sin n\pi z \\ & = \left( 1 - \frac{\partial}{\partial z} \sum_n \psi_{n'} \sin n'\pi z \right) \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

となる. ここで (3.2.7) より

$$\begin{aligned} & \sum_{n,\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2(\alpha^2 + n^2) \right) f_\alpha(x, y) \theta_n^\alpha \sin n\pi z \\ & = \left( 1 - \frac{\partial}{\partial z} \sum_n \psi_{n'} \sin n'\pi z \right) \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

と書ける. 次にこの式の右辺を展開すると,

$$\begin{aligned} & \sum_{n,\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2(\alpha^2 + n^2) \right) f_\alpha(x, y) \theta_n^\alpha \sin n\pi z \\ & = \sum_{n,\alpha} f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z - \sum_{n,n',\alpha} n' \pi w_n^\alpha \psi_{n'} f_\alpha(x, y) (\sin n\pi z) (\cos n'\pi z) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

となる. ここで両辺に  $f_{\alpha'}$  を掛けて水平平均をとると, (3.2.5) より  $\alpha = \alpha'$  のときのみ値が残り,

$$\begin{aligned} & \sum_n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2(\alpha'^2 + n^2) \right) \theta_n^{\alpha'} \sin n\pi z \\ & = \sum_n w_n^{\alpha'} \sin n\pi z - \sum_{n,n'} n' \pi w_n^{\alpha'} \psi_{n'} (\sin n\pi z) (\cos n'\pi z) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$



となる. そしてこの式に  $\sin n''\pi z$  を掛けて  $z$  について全範囲 (0 から 1) で積分すると, 三角関数の直交性より (3.2.19) の左辺と右辺第 1 項は  $n = n''$  のとき, 右辺第 2 項は  $n = n'' + n'$  または  $n = n'' - n'$  のときのみ値が残り,

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2(\alpha'^2 + n''^2) \right) \theta_{n''}^{\alpha'} \quad (3.2.20)$$

$$(\text{右辺第 1 項}) = \frac{1}{2} w_{n''}^{\alpha'} \quad (3.2.21)$$

$$(\text{右辺第 2 項}) = -\frac{\pi}{4} \sum_{n'} n' \psi_{n'} (w_{n''+n'}^{\alpha'} + w_{n''-n'}^{\alpha'}) \quad (3.2.22)$$

となる<sup>\*5</sup>. ここで  $n''$  を  $n$ ,  $\alpha'$  を  $\alpha$ ,  $n'$  を  $p$  と置き換えてこれらの式をまとめて書くと,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2(n^2 + \alpha^2) \right) \theta_n^\alpha = w_n^\alpha - \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \psi_p (w_{n+p}^\alpha + w_{n-p}^\alpha) \quad (3.2.23)$$

となる. ここで  $p = 0$  の場合は定義より  $\psi$  は常にゼロとなるため  $p = 1$  からの和をとることとした.

<sup>\*5</sup> (3.2.19) の右辺第 2 項に  $\sin n''\pi z$  を掛けて  $z$  について積分すると,

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \sum_{n,n'} n' \pi w_n^{\alpha'} \psi_{n'} (\sin n\pi z) (\cos n'\pi z) (\sin n''\pi z) dz \\ & = - \sum_{n,n'} n' \pi w_n^{\alpha'} \psi_{n'} \int_0^1 (\sin n\pi z) (\cos n'\pi z) (\sin n''\pi z) dz \end{aligned}$$

となる. 積分の部分にのみ注目すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\sin n\pi z) (\cos n'\pi z) (\sin n''\pi z) dz \\ & = \int_0^1 (\sin n\pi z) \frac{1}{2} \{ \sin(n'' + n')\pi z + \sin(n'' - n')\pi z \} dz \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin n\pi z) \{ \sin(n'' + n')\pi z \} dz + \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin n\pi z) \{ \sin(n'' - n')\pi z \} dz \end{aligned}$$

となり, ここで \*4 の結果を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sin n\pi z) \{ \sin(n'' + n')\pi z \} dz & = \frac{1}{2} \delta_{n n''+n'} \\ \int_0^1 (\sin n\pi z) \{ \sin(n'' - n')\pi z \} dz & = \frac{1}{2} \delta_{n n''-n'} \end{aligned}$$

と書ける. したがって

$$\int_0^1 (\sin n\pi z) (\cos n'\pi z) (\sin n''\pi z) dz = \frac{1}{4} \delta_{n n''+n'} + \frac{1}{4} \delta_{n n''-n'}$$

である. 以上より右辺第 2 項は (3.2.22) と書けることが分かる.

ここで (3.2.23) の右辺に含まれる  $w_{n-p}^\alpha$  は  $p$  の値によって符号が変化し,  $w_{n-p}^\alpha = \sigma(n-p)w_{|n-p|}^\alpha$  と書ける<sup>\*6</sup>. ここで  $\sigma(n)$  は符号関数で,  $n > 0$  のとき  $\sigma(n) = 1$ ,  $n < 0$  のとき  $\sigma(n) = -1$  と定義される. したがって (3.2.23) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \pi^2(n^2 + \alpha^2)\right) \theta_n^\alpha = w_n^\alpha - \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p\psi_p(w_{n+p}^\alpha + \sigma(n-p)w_{|n-p|}^\alpha) \quad (3.2.24)$$

と書くことができる. 最後にこの式の両辺を  $\pi^2$  で割ると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \theta_n^\alpha = \omega_n^\alpha - \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p\psi_p(\omega_{n+p}^\alpha + \sigma(n-p)\omega_{|n-p|}^\alpha) \quad (3.2.25)$$

となり, Fourier 級数展開された  $\theta$  の時間発展方程式 (Herring (1963) の (14) 式) が導かれた.

---

<sup>\*6</sup>  $w_{n-p}^\alpha = \sigma(n-p)w_{|n-p|}^\alpha$  と書けることを確認する. 任意の関数  $f(z)$  を  $z = 0, 1$  で 0 となる直交関数系で展開する. 直交関数系として  $\sin(n\pi z)$  ( $n$  は自然数) を用いると,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin(n\pi z) \quad (a)$$

と書ける. 一方直交関数系として  $\sin(n\pi z)$  ( $-n$  は自然数) を用いると,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{-n} \sin(-n\pi z) \quad (b)$$

と書ける. (b) は

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -w_{-n} \sin(n\pi z) \quad (c)$$

と変形することができ, この式が (a) と等値とすると,

$$w_n = -w_{-n} \text{ または } w_n = \sigma(n)w_{|n|} \quad (d)$$

と書ける.

### 3.2.3 $\psi$ の時間発展方程式

(11) に (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) を代入すると,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sum_n \psi_n \sin n\pi z \\
&= - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\left[ \sum_{n',\alpha'} f_{\alpha'}(x,y) w_{n'}^{\alpha'} \sin n'\pi z \right] \left[ \sum_{n,\alpha} f_{\alpha}(x,y) \theta_n^{\alpha} \sin n\pi z \right]} \\
&\iff \sum_n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n^2 \right) \psi_n \sin n\pi z \\
&= - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\sum_{n,n',\alpha,\alpha'} f_{\alpha}(x,y) f_{\alpha'}(x,y) w_{n'}^{\alpha'} \theta_n^{\alpha} (\sin n\pi z) (\sin n'\pi z)} \\
&\iff \sum_n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n^2 \right) \psi_n \sin n\pi z \\
&= - \sum_{n,n',\alpha,\alpha'} \frac{\partial}{\partial z} \overline{f_{\alpha}(x,y) f_{\alpha'}(x,y) w_{n'}^{\alpha'} \theta_n^{\alpha} (\sin n\pi z) (\sin n'\pi z)} \quad (3.2.26)
\end{aligned}$$

と書ける. ここで (3.2.5) より  $\alpha'$  について和をとると,  $\alpha' = \alpha$  のときのみ値が残る,

$$\sum_n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n^2 \right) \psi_n \sin n\pi z = - \sum_{n,n',\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \overline{w_{n'}^{\alpha} \theta_n^{\alpha} (\sin n\pi z) (\sin n'\pi z)} \quad (3.2.27)$$

となる. すると右辺中の水平平均されている部分に水平成分が一切含まれなくなるので上付きバーを消去しても値は変わらない. したがって

$$\begin{aligned}
& \sum_n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n^2 \right) \psi_n \sin n\pi z = - \sum_{n,n',\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \{ w_{n'}^{\alpha} \theta_n^{\alpha} (\sin n\pi z) (\sin n'\pi z) \} \\
&\iff \sum_n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n^2 \right) \psi_n \sin n\pi z \\
&= - \sum_{n,n',\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left[ w_{n'}^{\alpha} \theta_n^{\alpha} \left( -\frac{1}{2} \right) \{ \cos(n+n')\pi z - \cos(n-n')\pi z \} \right] \quad (3.2.28)
\end{aligned}$$

と書ける. 次にこの式の右辺の  $z$  微分を実行すると,

$$\begin{aligned}
& \sum_n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n^2 \right) \psi_n \sin n\pi z \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n,n',\alpha} w_{n'}^{\alpha} \theta_n^{\alpha} \{ -(n+n')\pi \sin(n+n')\pi z + (n-n')\pi \sin(n-n')\pi z \} \quad (3.2.29)
\end{aligned}$$

となる.

次に (3.2.29) の両辺に  $\sin n''\pi z$  を掛けて  $z$  について鉛直の全領域 (0 から 1) で積分すると, 三角関数の直交性より (3.2.29) の左辺は  $n = n''$  のとき, 右辺第 1 項は  $n = n'' - n$  のとき, 右辺第 2 項は  $n = n'' + n$  のときのみ値が残り,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n''^2 \right) \psi_{n''} = \frac{\pi}{4} \sum_{n', \alpha} w_{n'}^\alpha \{ \theta_{n''-n'}^\alpha (-n'') + \theta_{n''+n'}^\alpha n'' \} \quad (3.2.30)$$

となる\*7. ここで (3.2.30) の  $n''$  を  $n$  に,  $n'$  を  $p$  と置き換えると

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n^2 \right) \psi_n = \frac{\pi n}{2} \sum_{p, \alpha} w_p^\alpha \{ \theta_{n+p}^\alpha - \theta_{n-p}^\alpha \} \quad (3.2.31)$$

となる. さらに\*6 より  $\theta_{n-p}^\alpha = \sigma(n-p)\theta_{|n-p|}^\alpha$  と書くことができ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 n^2 \right) \psi_n = \frac{\pi n}{2} \sum_{p, \alpha} w_p^\alpha \{ \theta_{n+p}^\alpha - \sigma(n-p)\theta_{|n-p|}^\alpha \} \quad (3.2.32)$$

となる. 最後に両辺を  $\pi^2$  で割り,  $-\sigma(n-p)\theta_{|n-p|}^\alpha = \sigma(p-n)\theta_{|n-p|}^\alpha$  となることを用いると

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 \right) \psi_n = \frac{\pi n}{2} \sum_{p, \alpha} \omega_p^\alpha \{ \theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n)\theta_{|n-p|}^\alpha \} \quad (3.2.33)$$

が得られる. 以上で Fourier 級数展開された  $\psi$  の時間発展方程式 (Herring (1963) の (15) 式) が導かれた.

### 3.3 支配方程式の導出 II

Herring (1963) では自己相互作用的摂動に関わる項を無視することで簡単化された方程式系を用いて数値シミュレーションを行った. ここでは簡単化を行わずに Boussinesq 流体の支配方程式の数値シミュレーションを行うための方程式系を改めて導出する. Herring (1963) は 3 次元系を扱ったが, 直接数値シミュレーションの計算コストのため 2 次元系を扱うことにする.

\*7 \*4 より

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sin n\pi z)(\sin n''\pi z) dz &= \frac{1}{2} \delta_{nn''} \\ \int_0^1 \{ \sin(n+n')\pi z \} (\sin n''\pi z) dz &= \frac{1}{2} \delta_{n+n', n''} = \frac{1}{2} \delta_{n, n''-n'} \\ \int_0^1 \{ \sin(n-n')\pi z \} (\sin n''\pi z) dz &= \frac{1}{2} \delta_{n-n', n''} = \frac{1}{2} \delta_{n, n''+n'} \end{aligned}$$

となることを用いた.

### 3.3.1 渦度方程式

2.1 節で得られた方程式系

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha g T' \mathbf{k} \quad (2.1.14)$$

から渦度方程式を導く.  $x, z$  成分からなる 2 次元の系を考えることにする. 運動方程式 (2.1.14) を各成分について書くと,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho_R} \nabla p' + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + \alpha g T' \mathbf{k} \quad (3.3.2)$$

となる. ここで渦度  $\zeta$  が

$$\zeta \equiv \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.3.3)$$

と定義されることを用いるために (3.3.1) を  $z$  で微分した式と (3.3.2) を  $x$  で微分した式の差をとる.

まず (3.3.1) と (3.3.2) の左辺第 1 項同士を計算すると,

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.3.4)$$

となる. ここで以下のように定義した流線関数  $\Psi$  を導入する:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.3.5)$$

これを用いると (3.3.4) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) \quad (3.3.6)$$

となる. この式より

$$\zeta = \nabla^2 \Psi \quad (3.3.7)$$

であることを確認しておく.

次に (3.3.1) と (3.3.2) の左辺第 2 項同士を計算すると,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v} \cdot \nabla u) - \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \nabla w) \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\
&= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\
&= u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \tag{3.3.8}
\end{aligned}$$

となる. 最後の等式で連続の式 (2.1.9) を用いた. この式に (3.3.5) を用いると

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\
&= \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \\
&= \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \Psi) \tag{3.3.9}
\end{aligned}$$

となる. さらに, 以下のように定義されるヤコビアン  $J$ :

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x} \tag{3.3.10}$$

を用いると (3.3.9) は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \Psi) = -J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \tag{3.3.11}$$

同様に (3.3.1) と (3.3.2) の右辺第 1 項同士を計算すると, これらの項は打ち消し合う. 次に (3.3.1) と (3.3.2) の右辺第 2 項同士を (3.3.5) を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \right\} \\
&= \nu \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \\
&= \nu \nabla^4 \Psi \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

となる.

最後に (3.3.2) の右辺第 3 項は単に  $x$  で微分して, (3.3.6), (3.3.11), (3.3.12) とまとめて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Psi) = J(\Psi, \nabla^2\Psi) + \nu\nabla^4\Psi - \alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} \quad (3.3.13)$$

が得られる. これが渦度方程式である.

### 3.3.2 熱力学方程式

2.1 節で得られた熱力学方程式

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T' - \Gamma w = \kappa \nabla^2 T' \quad (2.1.19)$$

を, 流線関数  $\Psi$  を用いて表現する. (2.1.19) に (3.3.5) を代入し, (3.3.10) を用いると,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + w \frac{\partial T'}{\partial z} - \Gamma w = \kappa \nabla^2 T' \\ \iff & \frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T'}{\partial z} + \Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \kappa \nabla^2 T' \\ \iff & \frac{\partial T'}{\partial t} = J(\Psi, T') - \Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

が得られる.

### 3.3.3 支配方程式の無次元化

2.2 節と同様にして上で得られた方程式系 (3.3.13), (3.3.14) を無次元化する. (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) より,  $\Psi$  は無次元量  $\Psi^*$  を用いて

$$\Psi = \kappa \Psi^* \quad (3.3.15)$$

と書ける.

(3.3.13) を無次元化すると,

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial}{\partial t^*} \frac{\kappa}{d^2} (\nabla^{*2} \Psi^*) = \frac{1}{d^2} \frac{1}{d^2} \kappa^2 J^*(\Psi^*, \nabla^{*2} \Psi^*) + \nu \frac{1}{d^4} \kappa \nabla^{*4} \Psi^* - \alpha g \frac{\Gamma d}{d} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \\ \iff & \frac{\partial}{\partial t^*} (\nabla^{*2} \Psi^*) = J^*(\Psi^*, \nabla^{*2} \Psi^*) + \frac{\nu}{\kappa} \nabla^{*4} \Psi^* - \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\kappa^2} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

となる. さらに (2.2.16), (2.2.17) を用いると,

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\nabla^{*2}\Psi^*) = J^*(\Psi^*, \nabla^{*2}\Psi^*) + \sigma\nabla^{*4}\Psi^* - R\sigma\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (3.3.17)$$

が得られる. 同様に (3.3.14) を無次元化すると,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa\Gamma d}{d^2}\frac{\partial T^*}{\partial t^*} &= \frac{\kappa\Gamma d}{d^2}J^*(\Psi^*, T^*) - \Gamma\frac{\kappa}{d}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^*} + \kappa\frac{\Gamma d}{d^2}\nabla^{*2}T^* \\ \iff \frac{\partial T^*}{\partial t^*} &= J^*(\Psi^*, T^*) - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x^*} + \nabla^{*2}T^* \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

となる.

以上をまとめると, 対流をシミュレーションするための支配方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Psi) = J(\Psi, \nabla^2\Psi) + \sigma\nabla^4\Psi - R\sigma\frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.3.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = J(\Psi, T) - \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \nabla^2T \quad (3.3.20)$$

である. ここで無次元量であることを表す添字\*は省略した.



## 第4章 Herring (1963) の支配方程式について

### 4.1 簡単化しない支配方程式との対応関係

3.1 節で述べたように, Herring (1963) では

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 w = -R \nabla_1^2 \theta + \frac{1}{\sigma} \{\nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})\}_z \quad (3.1.20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \theta = \beta w - \nabla \cdot (\mathbf{v} \theta - \mathbf{k} \overline{w \theta}) \quad (3.1.15')$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{w \theta} \quad (3.1.11)$$

から自己相互作用的な摂動を無視することによって簡単化した方程式系

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 w = -R \nabla_1^2 \theta \quad (3.1.22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \theta = \beta w \quad (3.1.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{w \theta} \quad (3.1.11)$$

を用いて数値計算を行っている. この節では, ここで無視された項が 3.3 節で導いた方程式系におけるどの項に対応するかを考える. そのために, 3.3 節で導いた方程式系

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) = J(\Psi, \nabla^2 \Psi) + \sigma \nabla^4 \Psi - R \sigma \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.3.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = J(\Psi, T) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \nabla^2 T \quad (3.3.20)$$

について 3.2 節と同様に Fourier 級数展開を用いて表現してみる.

以下のように  $\Psi$  と  $T$  を Fourier 級数展開する:

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{\alpha, n} \hat{\Psi}(\alpha, n, t) e^{i\pi\alpha x} \sin n\pi z, \quad (4.1.1)$$

$$T(x, z, t) = \sum_{\alpha, n} \hat{T}(\alpha, n, t) e^{i\pi\alpha x} \sin n\pi z. \quad (4.1.2)$$

これを (3.3.19), (3.3.20) にそれぞれ代入する.

まず (3.3.19) は

$$(\text{左辺}) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ - \sum_{\alpha, n} \pi^2 (\alpha^2 + n^2) \hat{\Psi}(\alpha, n, t) e^{i\pi\alpha x} \sin n\pi z \right] \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺第1項}) &= \sum_{\alpha, n, \alpha', n'} \left\{ i\pi\alpha \hat{\Psi}(\alpha, n, t) e^{i\pi\alpha x} \sin n\pi z \right\} \\ &\quad \times \left\{ -n'\pi^2 (\alpha'^2 + n'^2) \hat{\Psi}(\alpha', n', t) e^{i\pi\alpha' x} \cos n'\pi z \right\} \\ &\quad - \left\{ n\pi \hat{\Psi}(\alpha, n, t) e^{i\pi\alpha x} \cos n\pi z \right\} \\ &\quad \times \left\{ -i\pi\alpha' \pi^2 (\alpha'^2 + n'^2) \hat{\Psi}(\alpha', n', t) e^{i\pi\alpha' x} \sin n'\pi z \right\} \\ &= -i\pi^4 \sum_{\alpha, n, \alpha', n'} (\alpha'^2 + n'^2) \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \hat{\Psi}(\alpha', n', t) e^{i\pi(\alpha+\alpha')x} \\ &\quad \times (\alpha n' \sin n\pi z \cos n'\pi z - \alpha' n \cos n\pi z \sin n'\pi z) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$(\text{右辺第2項}) = \sigma \sum_{\alpha, n} \pi^4 (\alpha^2 + n^2)^2 \hat{\Psi}(\alpha, n, t) e^{i\pi\alpha x} \sin n\pi z \quad (4.1.5)$$

$$(\text{右辺第3項}) = -R\sigma \sum_{\alpha, n} i\pi\alpha \hat{T}(\alpha, n, t) e^{i\pi\alpha x} \sin n\pi z \quad (4.1.6)$$

となる. ここで, (4.1.4) は  $(\alpha, n)$  と  $(\alpha', n')$  を入れ替えても等値であり, また入れ替え前と入れ替え後をそれぞれ  $1/2$  倍して和をとったものも等値であることから

$$\begin{aligned} (4.1.4) &= \frac{1}{2} (4.1.4) + \frac{1}{2} (-i\pi^4) \sum_{\alpha, n, \alpha', n'} (\alpha^2 + n^2) \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \hat{\Psi}(\alpha', n', t) e^{i\pi(\alpha+\alpha')x} \\ &\quad \times (\alpha' n \sin n'\pi z \cos n\pi z - \alpha n' \cos n'\pi z \sin n\pi z) \\ &= -\frac{i\pi^4}{2} \sum_{\alpha, n, \alpha', n'} \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \hat{\Psi}(\alpha', n', t) e^{i\pi(\alpha+\alpha')x} \{ (\alpha'^2 + n'^2) - (\alpha^2 + n^2) \} \\ &\quad \times (\alpha n' \sin n\pi z \cos n'\pi z - \alpha' n \cos n\pi z \sin n'\pi z) \\ &= -\frac{i\pi^4}{2} \sum_{\alpha, n, \alpha', n'} \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \hat{\Psi}(\alpha', n', t) e^{i\pi(\alpha+\alpha')x} \{ (\alpha'^2 + n'^2) - (\alpha^2 + n^2) \} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\alpha n' + \alpha' n}{2} \sin(n - n')\pi z + \frac{\alpha n' - \alpha' n}{2} \sin(n + n')\pi z \right\} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

と変形することができる. 次に (4.1.3), (4.1.7), (4.1.5), (4.1.6) にそれぞれ  $e^{-i\pi\alpha''z} \sin n''\pi z$  を掛け,  $x$  方向に 0 から  $L$  まで,  $z$  方向に 0 から 1 まで積分する. 3.2 節の\*4 を参考にすると

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \int_0^1 dz (4.1.3) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ - \sum_{\alpha, n} \pi^2 (\alpha^2 + n^2) \Psi(\alpha, n, t) L \delta_{\alpha, \alpha''} \frac{1}{2} \delta_{n, n''} \right] \\ &= - \frac{L}{2} \pi^2 (\alpha''^2 + n''^2) \frac{d\Psi(\alpha'', n'', t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \int_0^1 dz (4.1.7) &= - \frac{i\pi^4}{2} \sum_{\alpha, n, \alpha', n'} \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \hat{\Psi}(\alpha', n', t) L \delta_{\alpha + \alpha', \alpha''} \{ (\alpha'^2 + n'^2) - (\alpha^2 + n^2) \} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\alpha n' + \alpha' n}{2} \frac{1}{2} \delta_{n - n', n''} + \frac{\alpha n' - \alpha' n}{2} \frac{1}{2} \delta_{n + n', n''} \right\} \\ &= - \frac{i\pi^4 L}{8} \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \sum_{\alpha, n} \{ A(n - n'') + A(n'' - n) \} \\ &= - \frac{i\pi^4 L}{8} \sum_{\alpha, n} (\alpha''^2 - 2\alpha\alpha'' - 2nn'' + n''^2) (\alpha''n - \alpha n'') \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \\ &\quad \times \left\{ \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) - \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) \right\} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\int_0^L dx \int_0^1 dz (4.1.5) = \frac{\sigma L \pi^4}{2} (\alpha''^2 + n''^2)^2 \hat{\Psi}(\alpha'', n'', t) \quad (4.1.10)$$

$$\int_0^L dx \int_0^1 dz (4.1.6) = - \frac{iR\sigma L \pi}{2} \alpha'' \hat{T}(\alpha'', n'', t) \quad (4.1.11)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} A(n - n'') &= \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) \{ (\alpha'' - \alpha)^2 + (n - n'')^2 - \alpha^2 - n^2 \} \times \\ &\quad \{ (\alpha(n - n'') + (\alpha'' - \alpha)n) \} \\ &= \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) (\alpha''^2 - 2\alpha\alpha'' - 2nn'' + n''^2) (\alpha''n - \alpha n'') \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned} A(n'' - n) &= \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) \{ (\alpha'' - \alpha)^2 + (n'' - n)^2 - \alpha^2 - n^2 \} \times \\ &\quad \{ (\alpha(n'' - n) - (\alpha'' - \alpha)n) \} \\ &= - \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) (\alpha''^2 - 2\alpha\alpha'' - 2nn'' + n''^2) (\alpha''n - \alpha n'') \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

である. これらの式をまとめて整理すると,

$$\left\{ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2 (\alpha''^2 + n''^2) \right\} \hat{\Psi}(\alpha'', n'', t) = \frac{i\pi^4}{4\sigma} \sum_{\alpha, n} B + \frac{iR}{\pi} \frac{\alpha''}{\alpha''^2 + n''^2} \hat{T}(\alpha'', n'', t) \quad (4.1.14)$$

という方程式が得られる. ここで

$$B = \frac{(\alpha''^2 - 2\alpha\alpha'' - 2nn'' + n''^2)(\alpha''n - \alpha n'')}{\alpha''^2 + n''^2} \times \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \left\{ \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) - \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) \right\} \quad (4.1.15)$$

である.

(4.1.14) をさらに

$$\lambda = \frac{R}{\pi^4} \quad (3.2.12)$$

$$\tau = \pi^2 t \quad (3.2.13)$$

$$\omega_n = \frac{w_n}{\pi^2} \quad (3.2.14)$$

$$\hat{w} = -i\pi\alpha''\hat{\Psi} \quad (4.1.16)$$

を用いて変形すると<sup>\*1</sup>,

$$\left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \tau} + n''^2 + \alpha''^2 \right) \hat{w}(\alpha'', n'', t) = \frac{i\pi^2}{4\sigma} \sum_{\alpha, n} B' + \frac{\lambda\alpha''^2}{n''^2 + \alpha''^2} \hat{T}(\alpha'', n'', t) \quad (4.1.17)$$

となった. ここで

$$B' = \frac{(\alpha''^2 - 2\alpha\alpha'' - 2nn'' + n''^2)(\alpha''n - \alpha n'')}{\alpha''^2 + n''^2} \times \hat{w}(\alpha, n, t) \left\{ \hat{w}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) - \hat{w}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) \right\} \quad (4.1.18)$$

である.

同様に (3.3.20) についても Fourier 級数展開を用いて表現すると,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \pi^2(\alpha''^2 + n''^2) \right\} \hat{T}(\alpha'', n'', t) = -i\pi\alpha''\hat{\Psi}(\alpha'', n'', t) + \frac{i\pi^2}{4} \sum_{\alpha, n} C \quad (4.1.19)$$

<sup>\*1</sup> (4.1.16) となることは

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{\alpha, n} \hat{\Psi}(\alpha, n, t) e^{i\pi\alpha x} \sin n\pi z, \quad (4.1.1)$$

$$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{n, \alpha} f_\alpha(x, y) w_n^\alpha \sin n\pi z, \quad (3.2.1)$$

$$w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.3.5)$$

から分かる.

となる. ここで

$$C = (\alpha''n - \alpha n'') \left[ \hat{\Psi}(\alpha, n, t) \left\{ \hat{T}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) - \hat{T}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) \right\} - \hat{T}(\alpha, n, t) \left\{ \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) - \hat{\Psi}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) \right\} \right] \quad (4.1.20)$$

である. さらに (4.1.19) を (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14), (4.1.16) を用いて変形すると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + n''^2 + \alpha''^2 \right) \hat{T}(\alpha'', n'', t) = \hat{\omega}(\alpha'', n'', t) - \frac{\pi}{4\alpha''} \sum_{\alpha, n} C' \quad (4.1.21)$$

となった. ここで

$$C = (\alpha''n - \alpha n'') \left[ \hat{\omega}(\alpha, n, t) \left\{ \hat{T}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) - \hat{T}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) \right\} - \hat{T}(\alpha, n, t) \left\{ \hat{\omega}(\alpha'' - \alpha, n - n'', t) - \hat{\omega}(\alpha'' - \alpha, n'' - n, t) \right\} \right] \quad (4.1.22)$$

である.

(4.1.17), (4.1.21) <sup>\*2</sup> を 3.2 節で導いた方程式系:

$$\left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2 \right) \omega_n^\alpha = \frac{\lambda \alpha^2}{n^2 + \alpha^2} \theta_n^\alpha, \quad (3.2.15)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2 \right) \theta_n^\alpha = \omega_n^\alpha - \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \psi_p (\omega_{n+p}^\alpha + \sigma(n-p) \omega_{|n-p|}^\alpha), \quad (3.2.25)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 \right) \psi_n = \frac{\pi n}{2} \sum_{p, \alpha} \omega_p^\alpha \{ \theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n) \theta_{|n-p|}^\alpha \} \quad (3.2.33)$$

と比較する. まず (4.1.17) は  $\hat{\omega}(\alpha'', n'', t)$  を  $\omega_n^\alpha$ ,  $\hat{T}(\alpha'', n'', t)$  を  $\theta_n^\alpha$  と置き換え, さらに  $\alpha''$  を  $\alpha$ ,  $n''$  を  $n$  と置き換えることで, 右辺第 1 項を除いて (3.2.15) と対応関係があることが分かる. この右辺第 1 項が Herring (1963) における自己相互作用的な摂動項に対応する. 次に (4.1.21) は, 上に述べた置き換えに加えて  $\hat{T}(\alpha = 0, n, t) = \psi_n$  と置き換えることで (3.2.25), (3.2.33) と対応関係があることが分かる. ただし (3.2.25) との対応関係についてはさらに  $\alpha$  の総和をとらないという簡単化も行っている. また  $\alpha = 0$ , つまり対流の水平スケールが無敵大のとき, 渦度に対応する  $\omega_n^\alpha$  がゼロとなることに注意する.

<sup>\*2</sup> これらの式が Saltzman (1962) と整合的であることを確認した.

## 4.2 エントロピー保存の式の導出

温度摂動の式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\theta = \beta w \quad (3.1.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = -\frac{\partial}{\partial z}w\theta \quad (3.1.11)$$

を用いてエントロピー保存の式を導出する. ここで

$$\beta \equiv \left(1 - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \quad (3.1.21)$$

である.

まず, (3.1.23) に  $\theta$  を掛けた式

$$\theta \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\theta = \beta w\theta \quad (4.2.1)$$

と (3.1.11) に  $\psi$  を掛けた式

$$\psi \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = -\psi \frac{\partial}{\partial z}w\theta \quad (4.2.2)$$

の両辺の和をとり整理すると

$$\theta \frac{\partial\theta}{\partial t} + \psi \frac{\partial\psi}{\partial t} - \theta \nabla^2\theta - \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \psi \frac{\partial}{\partial z}w\theta + w\theta \frac{\partial\psi}{\partial z} = w\theta \quad (4.2.3)$$

となる. ここで (3.1.21) を用いた.

次に (4.2.3) の各項の体積積分をとる. ここで, 積分範囲として  $x$  方向は 0 から代表的長さ  $L_x$ ,  $y$  方向は 0 から代表的長さ  $L_y$ ,  $z$  方向は 0 から 1 を用いる. まず (4.2.3) の左辺第 1, 2 項は

$$\begin{aligned} \int_V \left(\theta \frac{\partial\theta}{\partial t} + \psi \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) dV &= \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (|\theta|^2 + |\psi|^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{|\theta|^2 + |\psi|^2\}_v \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

と書ける. ここで下付き添字  $v$  は体積積分を表す. 次に (4.2.3) の左辺第 3, 4 項は

$$-\int_V \left(\theta \nabla^2\theta + \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) dV = -\int_V \left(\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \theta \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) dV \quad (4.2.5)$$

となる. (4.2.5) の右辺についてそれぞれの項を計算すると,

$$\begin{aligned}\int_V \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dV &= \int \left[ \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_0^{L_x} dy dz - \int \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx dy dz \\ &= -\{|\nabla \theta|_x^2\}_v\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned}\int_V \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} dV &= \int \left[ \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]_0^{L_y} dx dz - \int \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dx dy dz \\ &= -\{|\nabla \theta|_y^2\}_v\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned}\int_V \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dV &= \int \left[ \theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_0^1 dx dy - \int \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dx dy dz \\ &= -\{|\nabla \theta|_z^2\}_v\end{aligned}\quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned}\int_V \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} dV &= \int \left[ \psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_0^1 dx dy - \int \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dx dy dz \\ &= -\{|\nabla \psi|_z^2\}_v \\ &= -\{|\nabla \psi|^2\}_v\end{aligned}\quad (4.2.9)$$

となる. ここでそれぞれの計算について1つめの等号後の第1項は周期境界条件と境界条件によってゼロとなることを用いた. 以上より (4.2.5) は

$$-\int_V \left( \theta \nabla^2 \theta + \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) dV = \{|\nabla \psi|^2 + |\nabla \theta|^2\}_v\quad (4.2.10)$$

と書けた. 次に (4.2.3) の左辺第5, 6項の体積積分を行う. まず

$$\begin{aligned}\int_V w \theta \frac{\partial \psi}{\partial z} dV &= \int [w \theta \psi]_0^1 dx dy - \int_V \psi \frac{\partial (w \theta)}{\partial z} dV \\ &= -\int_V \psi \frac{\partial (w \theta)}{\partial z} dV\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

となることを用いると

$$\int_V \left( \psi \frac{\partial}{\partial z} \overline{w \theta} + w \theta \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dV = \int_V \left( \psi \frac{\partial}{\partial z} \overline{w \theta} - \psi \frac{\partial}{\partial z} w \theta \right) dV\quad (4.2.12)$$

と書ける. この式を  $x, y$  成分について積分を実行すると,

$$\begin{aligned}\int_V \left( \psi \frac{\partial}{\partial z} \overline{w \theta} - \psi \frac{\partial}{\partial z} w \theta \right) dV &= \int \left( L_x L_y \psi \frac{\partial}{\partial z} \overline{w \theta} - L_x L_y \psi \frac{\partial}{\partial z} w \theta \right) dz \\ &= 0\end{aligned}\quad (4.2.13)$$

となる. ここで (4.2.12) の右辺第 2 項の  $w\theta$  については,  $x, y$  成分について積分することで水平平均された値となることを用いた.

以上の計算より, (4.2.3) の両辺を体積積分した結果

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{|\theta|^2 + |\psi|^2\}_v + \{|\nabla\psi|^2 + |\nabla\theta|^2\}_v = \{w\theta\}_v \quad (4.2.14)$$

が得られた. この式が Herring (1963) 中に示されているエントロピー保存の式 (12) である<sup>\*3</sup>.

ここで自己相互作用的な摂動として無視した項がエントロピー保存の式に影響しないことも確認しておく. 上記の議論で無視していた項を無視しない場合, (4.2.3) には  $-\theta\nabla \cdot (\mathbf{v}\theta - \mathbf{k}\overline{w\theta})$  という項が残る. この項を体積積分すると,

$$-\int_V \theta\nabla \cdot (\mathbf{v}\theta) dV + \int_V \theta\nabla \cdot (\mathbf{k}\overline{w\theta}) dV \quad (4.2.15)$$

と書ける. それぞれの項について計算すると, まず第 1 項は

$$\begin{aligned} -\int_V \theta\nabla \cdot (\mathbf{v}\theta) dV &= -\int_V \nabla \cdot \left( \mathbf{v} \cdot \frac{1}{2}\theta^2 \right) dV \\ &= \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}\theta^2 u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}\theta^2 v \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2}\theta^2 w \right) \right] dV \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

と書ける. ここで最後の式変形では境界条件を用いた. 次に (4.2.15) の第 2 項は

$$\begin{aligned} \int_V \theta\nabla \cdot (\mathbf{k}\overline{w\theta}) dV &= \int_V \theta \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta} dV \\ &= \int_V L_x L_y \overline{\theta} \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta} dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

となる. 2 つめの変形では  $x, y$  成分について積分したため  $\theta$  は水平平均された値となることを用いた. 以上より自己相互作用的な摂動を無視することはエントロピーの保存に影響しないことが確認された.

<sup>\*3</sup> Herring (1963) の原文中では (12) の左辺第 1 項が  $|\theta|$  となっているが正しくは本文の通り  $|\theta|^2$  である.



### 4.3 温度勾配と熱輸送の関係式の導出

温度摂動の時間発展方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2\right) \psi_n = \frac{\pi n}{2} \sum_{p,\alpha} \omega_p^\alpha \{\theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n)\theta_{|n-p|}^\alpha\} \quad (3.2.33)$$

から温度勾配と熱輸送の関係式を導く. まず (3.2.33) の両辺を  $n$  で割ると

$$\left(\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \tau} + n\right) \psi_n = \frac{\pi}{2} \sum_{p,\alpha} \omega_p^\alpha \{\theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n)\theta_{|n-p|}^\alpha\} \quad (4.3.1)$$

となる. ここで

$$\beta_n = -\pi n \psi_n \quad (4.3.2)$$

とおくと<sup>\*4</sup>

$$\left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + 1\right) \beta_n = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{p,\alpha} \omega_p^\alpha \{\theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n)\theta_{|n-p|}^\alpha\} \quad (4.3.3)$$

となる. 次に両辺を  $n$  について和をとると

$$\sum_n \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + 1\right) \beta_n = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{n,p,\alpha} \omega_p^\alpha \{\theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n)\theta_{|n-p|}^\alpha\} \quad (4.3.4)$$

と書ける. ここで右辺に注目して変形を行う. すると

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -\frac{\pi^2}{2} \sum_{n,\alpha,p=1} \omega_p^\alpha \{\theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n)\theta_{|n-p|}^\alpha\} \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \sum_\alpha \sum_n \left[ \left( \sum_{p=1}^{n-1} + \sum_{p=n}^{\infty} \right) \omega_p^\alpha \{\theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n)\theta_{|n-p|}^\alpha\} \right] \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \sum_\alpha \sum_n \left[ \sum_{p=1}^{n-1} \omega_p^\alpha (\theta_{n+p}^\alpha - \theta_{n-p}^\alpha) + \sum_{p=n}^{\infty} \omega_p^\alpha (\theta_{n+p}^\alpha + \theta_{p-n}^\alpha) \right] \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

<sup>\*4</sup>

$$\beta(z) = 1 - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.1.21)$$

と

$$\psi(z, t) = \sum_n \psi_n \sin n\pi z \quad (3.2.3)$$

より

$$\beta = 1 - \pi n \sum_n \psi_n \cos n\pi z$$

となることを用いた.

と書ける. さらにこの式で  $n$  と  $p$  の和をとる順番を入れ替えると

$$\begin{aligned} &= -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=p+1}^{\infty} \omega_p^{\alpha} (\theta_{n+p}^{\alpha} - \theta_{n-p}^{\alpha}) + \sum_{n=1}^p \omega_p^{\alpha} (\theta_{n+p}^{\alpha} + \theta_{p-n}^{\alpha}) \right] \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p^{\alpha} \left[ \sum_{n=p+1}^{\infty} (\theta_{n+p}^{\alpha} - \theta_{n-p}^{\alpha}) + \sum_{n=1}^p (\theta_{n+p}^{\alpha} + \theta_{p-n}^{\alpha}) \right] \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

と書ける. ここで (4.3.6) の大括弧の中に注目する. まず第 1 項と第 3 項はまとめることができ, まとめた後  $n+p$  を  $n$  と置き換えると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n+p}^{\alpha} = \sum_{n=p+1}^{\infty} \theta_n^{\alpha} \quad (4.3.7)$$

と書ける. 次に第 2 項は  $n-p$  を  $n$  と置き換えて

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{\alpha} \quad (4.3.8)$$

と書ける. そして第 4 項は一度書き下してまとめ方を変えると

$$\sum_{n=1}^{p-1} \theta_n^{\alpha} \quad (4.3.9)$$

と書ける<sup>\*5</sup>. (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9) より (4.3.6) は

$$-\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p^{\alpha} \left[ \sum_{n=p+1}^{\infty} \theta_n^{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{\alpha} + \sum_{n=1}^{p-1} \theta_n^{\alpha} \right] \quad (4.3.10)$$

と変形できる. さらにこの式の大括弧の中に注目すると,  $\theta_p^{\alpha}$  以外は打ち消されることが分かる. したがって (4.3.10) は

$$(4.3.10) = -\frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p^{\alpha} (-\theta_p^{\alpha}) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p^{\alpha} \theta_p^{\alpha} \quad (4.3.11)$$

となる.

<sup>\*5</sup> (4.3.6) の大括弧中の第 4 項を展開して再びまとめると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p \theta_{p-n}^{\alpha} &= \theta_{p-1}^{\alpha} + \theta_{p-2}^{\alpha} + \theta_{p-2}^{\alpha} + \cdots + \theta_1^{\alpha} + \theta_0^{\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{p-1} \theta_n^{\alpha} \end{aligned}$$

と書き換えられる. ここで  $\theta$  の定義より  $\theta_0 = 0$  であることを用いた.

以上をまとめると (4.3.4) は

$$\sum_n \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + 1 \right) \beta_n = \frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p^{\alpha} \theta_p^{\alpha} \quad (4.3.12)$$

となる. 最後に右辺の  $p$  を  $n$  と置き換えることで Herring (1963) の (16) 式

$$\sum_n \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + 1 \right) \beta_n = \frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{\alpha} \theta_n^{\alpha} \quad (4.3.13)$$

が得られた. この式の左辺は水平平均された温度摂動の勾配の時間変化, 右辺は対流による熱輸送を表している.

## 第5章 数値シミュレーションの結果と考察

### 5.1 Herring (1963) の再現結果

#### 5.1.1 状況設定

Herring (1963) の再現を行うために, 以下の方程式系

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \omega_n^\alpha = \frac{\lambda \alpha^2}{n^2 + \alpha^2} \theta_n^\alpha, \quad (3.2.15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \theta_n^\alpha = \omega_n^\alpha - \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \psi_p (\omega_{n+p}^\alpha + \sigma(n-p) \omega_{|n-p|}^\alpha), \quad (3.2.25)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2\right) \psi_n = \frac{\pi n}{2} \sum_{p,\alpha}^{\infty} \omega_p^\alpha \{\theta_{n+p}^\alpha + \sigma(p-n) \theta_{|n-p|}^\alpha\} \quad (3.2.33)$$

を Adams-Bashforth 法<sup>\*1</sup> を用いて解く. ここで,  $\alpha$  はある特定の値に定めて計算を行うことにする. はじめに (3.2.25), (3.2.33) について, 計算効率を上げるために以下で述べるような式変形を行う.  $\alpha$  は定数とするため以下では省略する.

(3.2.25), (3.2.33) にそれぞれ

$$\beta_n = -\pi n \psi_n \quad (4.3.2)$$

を代入すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \theta_n = \omega_n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p (\omega_{n+p} + \sigma(n-p) \omega_{|n-p|}), \quad (5.1.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2\right) \beta_n = -\frac{\pi^2 n^2}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p \{\theta_{n+p} + \sigma(p-n) \theta_{|n-p|}\} \quad (5.1.2)$$

<sup>\*1</sup> 大関 (2006), 岩山 (2016) を参照した.

となる. ここで 4.3 節の\*4 より  $\beta_n$  は  $\cos n\pi z$  に依存する. このことから奇数モードでは  $\beta_n$  が値を持たないことが分かる. したがって (5.1.1) において  $p$  を  $2p$ , (5.1.2) において  $n$  を  $2n$  に置き換えることが可能である. 置き換えを行うと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \theta_n = \omega_n + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_{2p} (\omega_{n+2p} + \sigma(n-2p)\omega_{|n-2p|}), \quad (5.1.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 4n^2\right) \beta_{2n} = -2\pi^2 n^2 \sum_{p=1}^{\infty} \omega_p \{\theta_{2n+p} + \sigma(p-2n)\theta_{|2n-p|}\} \quad (5.1.4)$$

が得られる. 今回の実験では (3.2.25), (3.2.33) の代わりに (5.1.3), (5.1.4) を解くことにする.

考えている系は, 鉛直方向に幅 1 の間隔をあけた 2 枚の無限に広い平板間の Boussinesq 系である. 基準状態の温度勾配  $\Gamma$  は -1 であり, 温度  $T$  は下部平板 ( $z = 0$ ) では常に 0, 上部平板では常に -1 である. また, 切断モードは  $n = 80$  である. 境界条件として, 水平方向には周期境界条件, 鉛直方向には  $\theta(z = 0, 1) = 0, \psi(z = 0, 1) = 0, \partial^m w / \partial z^m = 0$  を与える. ここで  $m$  は偶数である. また, プラントル数は  $\sigma = 1$  で一定とした. 摂動の初期条件は適宜変更したため各々の図の説明において述べることにする.

## 5.1.2 再現結果

### (i) 熱輸送の時間変動

図 5.1 はヌッセルト数  $N$  <sup>\*2</sup> の時間変化である. 赤色の実線で  $R = 4 \times 10^3$ , 緑色の実線で  $R = 10^4$ , 青色の実線で  $R = 10^5$  のときの値を示した. 初期条件として  $w_1 = 1.0$  を与え, 他には摂動を与えなかった. また, 時間差分間隔  $dt$  は  $dt = 10^{-5}$  とした. このような条件を与えたとき,  $N$  の定常状態での値は Herring (1963) の値と概ね一致した. 具体的な定常状態での値は,  $R = 4 \times 10^3$  のとき  $N \sim 3.0$ ,  $R = 10^4$  のとき  $N \sim 5.2$ ,  $R = 10^5$  のとき  $N \sim 13.8$  である. 初期条件として与える摂動を小さくすると定常状態に達するまでの時間が遅くなる傾向にある.

<sup>\*2</sup> ヌッセルト数とは鉛直方向への伝導による熱フラックスに対する総熱フラックスの比である. 従って対流が起こっていない場合のヌッセルト数は  $N = 1$  である.

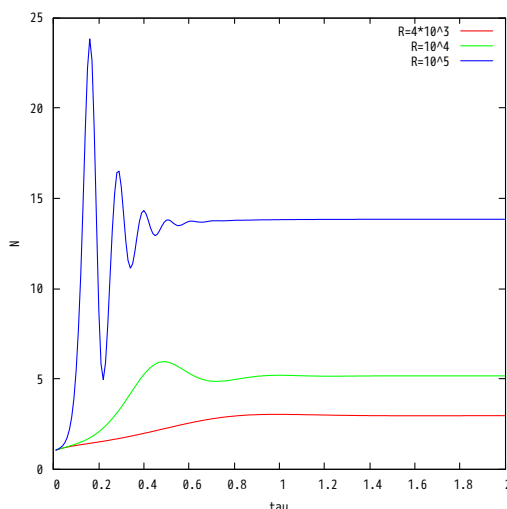


図 5.1:  $\tau$  と  $N$  の関係. 横軸に  $\tau$ , 縦軸に  $N$  をとった. 赤色の実線が  $R = 4 \times 10^3$ , 緑色の実線が  $R = 10^4$ , 青色の実線が  $R = 10^5$  のときの値である.

## (ii) $w, \theta$ の鉛直分布

図 5.2, 5.5, 5.8, 5.11, 5.14, 5.17 は  $w, \theta$  の鉛直分布である. 初期条件として, 全てのモードについて  $w_n = 1.0 \times 10^{-2}, \theta_n = 1.0 \times 10^{-2}, \beta_n = 1.0 \times 10^{-2}$  を与えた.  $R, \alpha$  の値についてはそれぞれ図のキャプションに記した.  $w, \theta$  は規格化を行っており, 規格化の値は Herring (1963) と同じ値を用いた. その値についても図のキャプションに記した. Herring (1963) と比較すると,  $w$  は Herring (1963) と一致する結果が得られたが  $\theta$  は全ての図について約 4.5 倍大きな値を得た. そこで図 5.1 と同様の初期値を与えたところ, やはり同じ結果を得た.

これらの図から分かる  $w, \theta$  の特徴は以下の通りである. 全体として言えることとして境界領域では  $w, \theta$  とともに 0 であり, 境界から遠ざかるにつれて急激に大きな値となることが挙げられる. そして  $w$  については領域の中央,  $\theta$  については境界領域から少し離れた位置で最大となる. そして, 同じ  $R$  を与えて  $\alpha$  のみを変化させたとき,  $\alpha$  が大きくなるにつれて  $w$  が最大となるときの境界からの距離が小さくなるのが分かる. また, 図 5.2 から図 5.11 までは, それぞれの  $R$  について熱輸送が最大となる  $\alpha$  の値を与えているが, このとき  $w$  は  $R$  が増加するにつれて小さく,  $\theta$  は  $R$  が増加するにつれて大きくなるのが分かる.

(ii)  $\bar{T}$ ,  $\beta$  の鉛直分布

図 5.3, 5.4, 5.6, 5.7, 5.9, 5.10, 5.12, 5.13, 5.15, 5.16, 5.18, 5.19 は平均温度  $\bar{T}$ ,  $\beta$  の鉛直分布である. 初期条件として, 全てのモードについて  $w_n = 1.0 \times 10^{-2}$ ,  $\theta_n = 1.0 \times 10^{-2}$ ,  $\beta_n = 1.0 \times 10^{-2}$  を与えた.  $R, \alpha$  の値についてはそれぞれ図のキャプションに記した.  $\beta$  は規格化を行っており, 規格化の値は Herring (1963) と同じ値, すなわちそれぞれの  $R$  におけるヌッセルト数の最大値  $N_{\max}$  を用いた. その値も図のキャプションに記した. (3.1.21) より,  $\bar{T}$  と  $\beta$  は対応関係があることに注意する. これらの図は Herring (1963) と一致する結果が得られた.

これらの図から分かる  $\bar{T}, \beta$  の特徴は以下の通りである.  $\beta$  は  $R$  が低いとき中央領域でわずかに負となる. そして  $R$  が大きくなるにつれて  $\beta$  が負である領域は境界付近に集まり, 中央領域ではわずかに正となる. それに伴い  $\bar{T}$  は  $R$  が大きくなるにつれて境界付近で変化が少なく, 中央領域で急激な変化を起こす. しかし  $\alpha$  が大きい場合はその傾向は失われ, 比較的境界に近い領域から温度勾配を持つことが分かる.

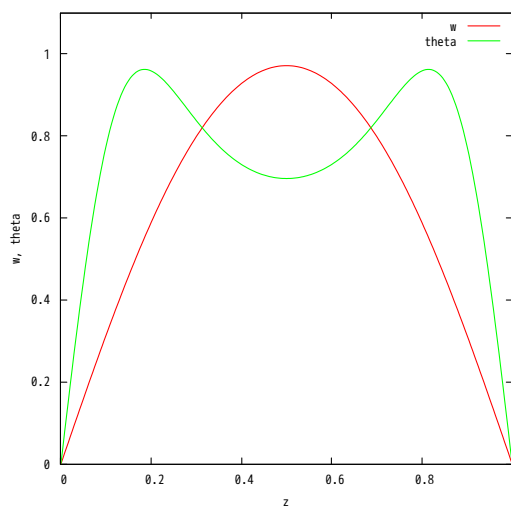


図 5.2:  $R = 4 \times 10^3, \alpha = 0.8$  のときの  $w, \theta$  と  $z$  の関係. 赤色の実線は  $w$ , 緑色の実線は  $\theta$  を縦軸にとった. 横軸は  $z$  である.  $w$  は  $4.22 \times 10^{-2}w$ ,  $\theta$  は  $4.07\theta$  となるよう規格化を行った.

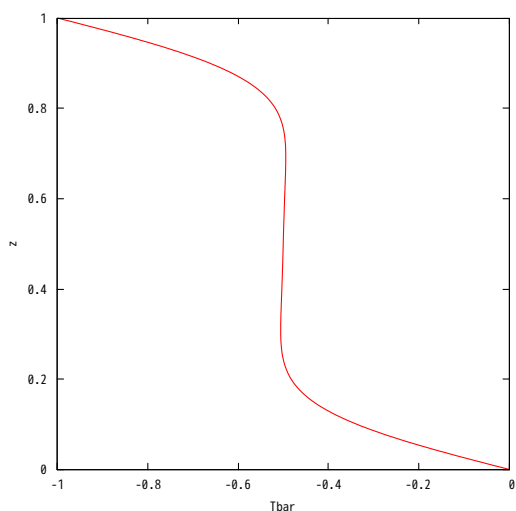


図 5.3:  $R = 4 \times 10^3, \alpha = 0.8$  のときの平均温度  $\bar{T}$  と  $z$  の関係.  $\bar{T}$  を横軸,  $z$  を縦軸にとった.

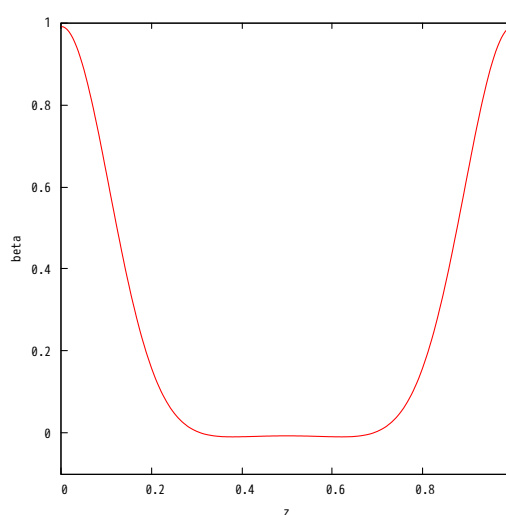


図 5.4:  $R = 4 \times 10^3, \alpha = 0.8$  のときの平均温度勾配  $\beta$  と  $z$  の関係.  $z$  を横軸,  $\beta$  を縦軸にとった.  $\beta$  はこのときのヌッセルト数  $N = 3.92$  で規格化した.



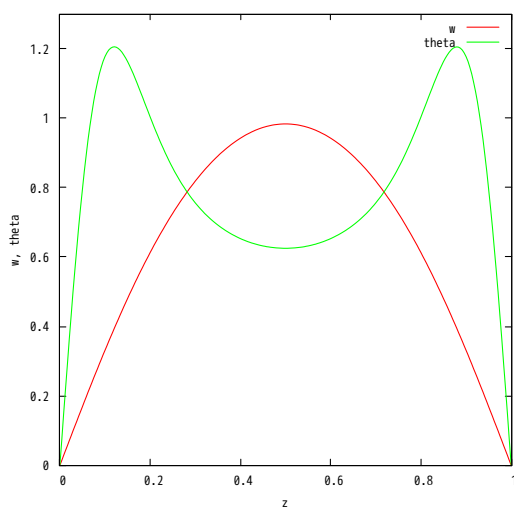


図 5.5:  $R = 10^4, \alpha = 1.0$  のときの  $w, \theta$  と  $z$  の関係. 赤色の実線は  $w$ , 緑色の実線は  $\theta$  を縦軸にとった. 横軸は  $z$  である.  $w$  は  $2.05 \times 10^{-2}w$ ,  $\theta$  は  $5.16\theta$  となるよう規格化を行った.

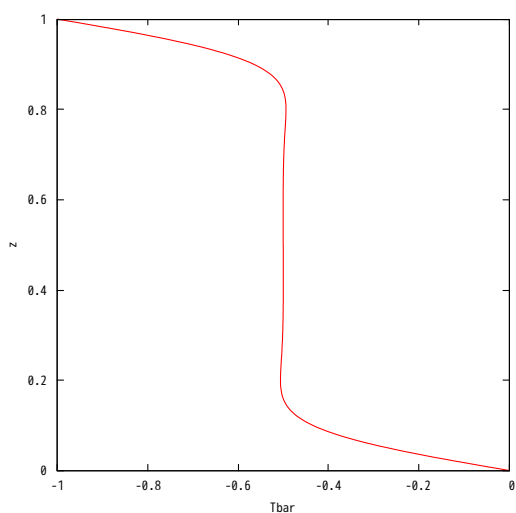


図 5.6:  $R = 10^4, \alpha = 1.0$  のときの平均温度  $\bar{T}$  と  $z$  の関係.  $\bar{T}$  を横軸,  $z$  を縦軸にとった.

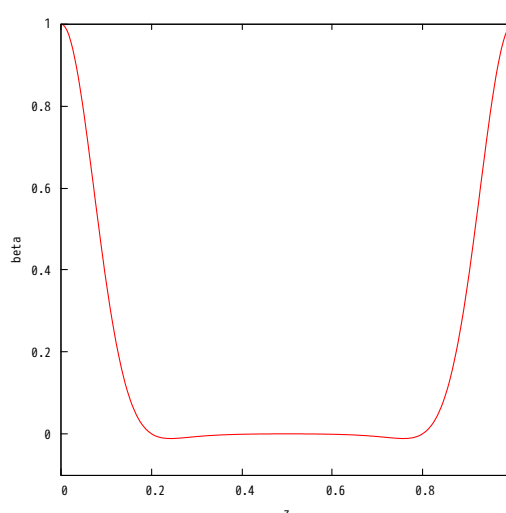


図 5.7:  $R = 10^3, \alpha = 1.0$  のときの平均温度勾配  $\beta$  と  $z$  の関係.  $z$  を横軸,  $\beta$  を縦軸にとった.  $\beta$  はこのときのヌッセルト数  $N = 5.82$  で規格化した.

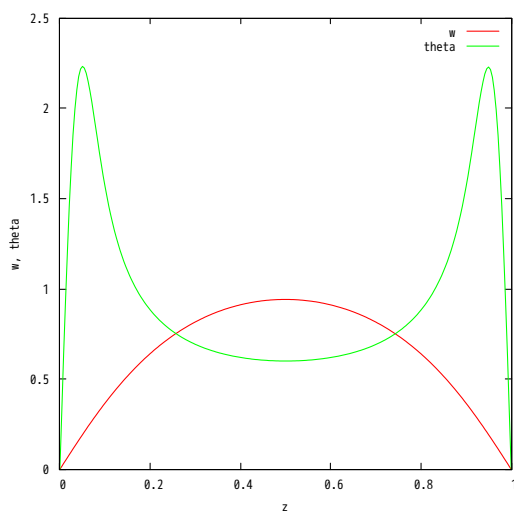


図 5.8:  $R = 10^5, \alpha = 1.5$  のときの  $w, \theta$  と  $z$  の関係. 赤色の実線は  $w$ , 緑色の実線は  $\theta$  を縦軸にとった. 横軸は  $z$  である.  $w$  は  $4.33 \times 10^{-3}w$ ,  $\theta$  は  $9.42\theta$  となるよう規格化を行った.

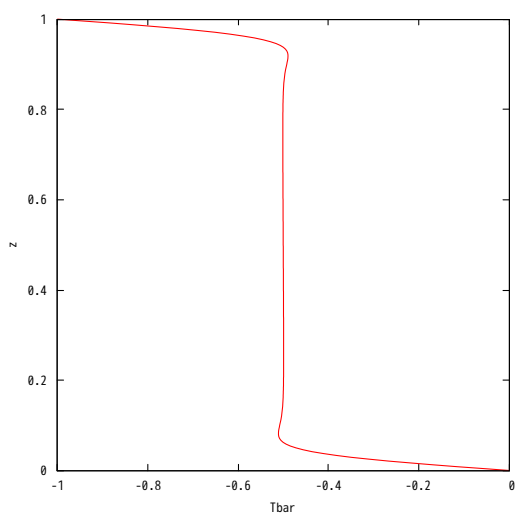


図 5.9:  $R = 10^5, \alpha = 1.5$  のときの平均温度  $\bar{T}$  と  $z$  の関係.  $\bar{T}$  を横軸,  $z$  を縦軸にとった.

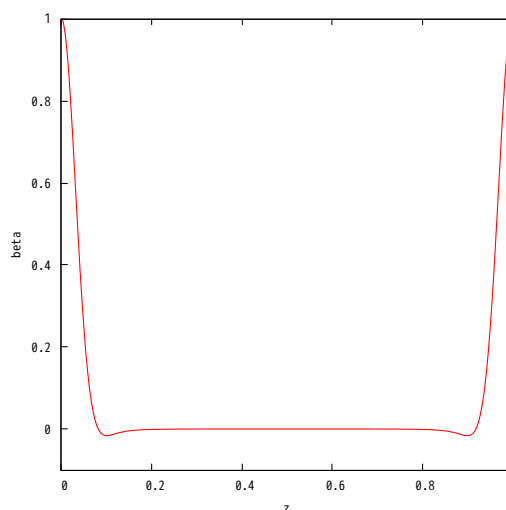


図 5.10:  $R = 10^5, \alpha = 1.5$  のときの平均温度勾配  $\beta$  と  $z$  の関係.  $z$  を横軸,  $\beta$  を縦軸にとった.  $\beta$  はこのときのヌッセルト数  $N = 13.82$  で規格化した.

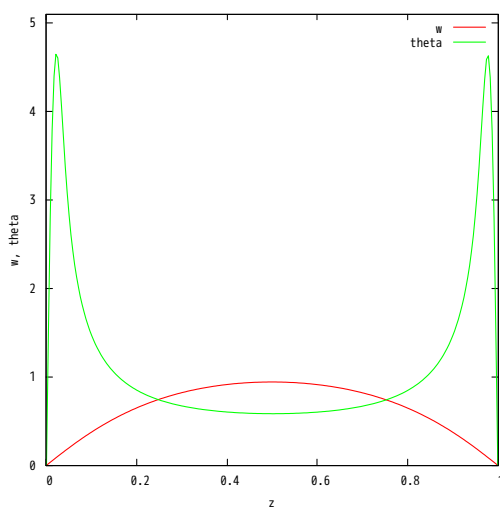


図 5.11:  $R = 10^6$ ,  $\alpha = 1.5$  のときの  $w, \theta$  と  $z$  の関係. 赤色の実線は  $w$ , 緑色の実線は  $\theta$  を縦軸にとった. 横軸は  $z$  である.  $w$  は  $8.98 \times 10^{-4}w$ ,  $\theta$  は  $19.4\theta$  となるよう規格化を行った.

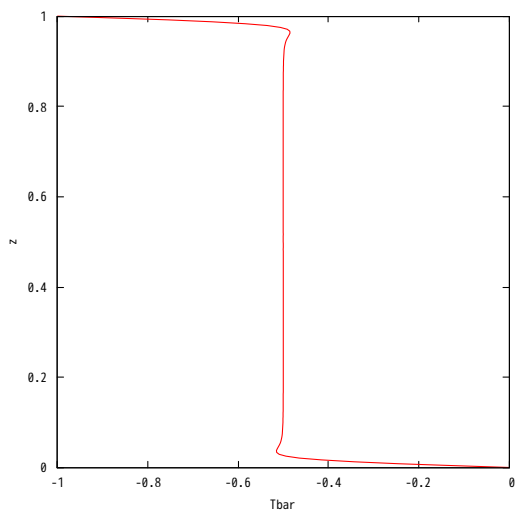


図 5.12:  $R = 10^6$ ,  $\alpha = 1.5$  のときの平均温度  $\bar{T}$  と  $z$  の関係.  $\bar{T}$  を横軸,  $z$  を縦軸にとった.

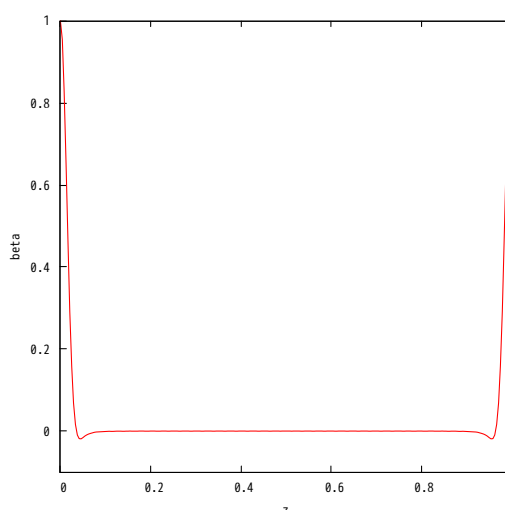


図 5.13:  $R = 10^6$ ,  $\alpha = 1.5$  のときの平均温度勾配  $\beta$  と  $z$  の関係.  $z$  を横軸,  $\beta$  を縦軸にとった.  $\beta$  はこのときのヌッセルト数  $N = 31.48$  で規格化した.

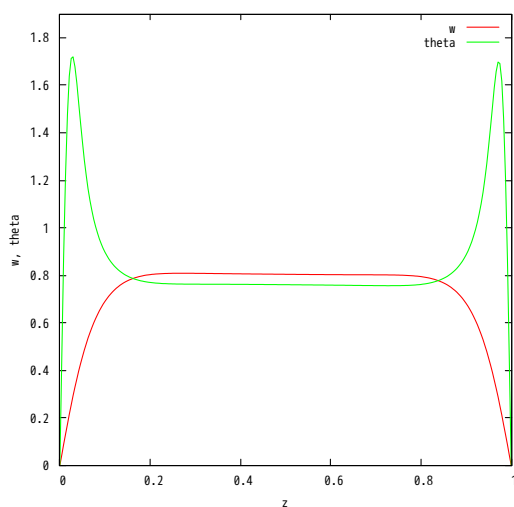


図 5.14:  $R = 10^6, \alpha = 6.0$  のときの  $w, \theta$  と  $z$  の関係. 赤色の実線は  $w$ , 緑色の実線は  $\theta$  を縦軸にとった. 横軸は  $z$  である.  $w$  は  $3.22 \times 10^{-3}w$ ,  $\theta$  は  $8.57\theta$  となるよう規格化を行った.

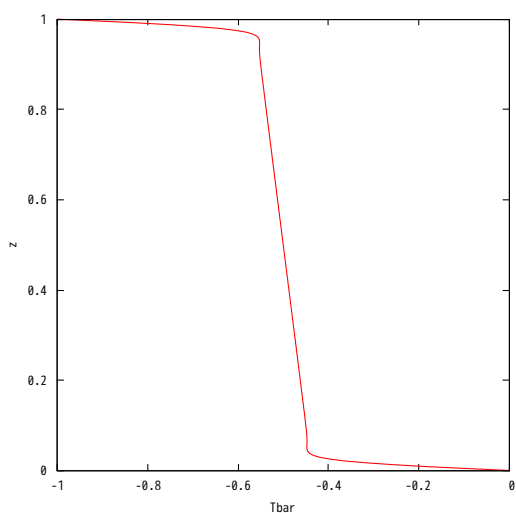


図 5.15:  $R = 10^6, \alpha = 6.0$  のときの平均温度  $\bar{T}$  と  $z$  の関係.  $\bar{T}$  を横軸,  $z$  を縦軸にとった.

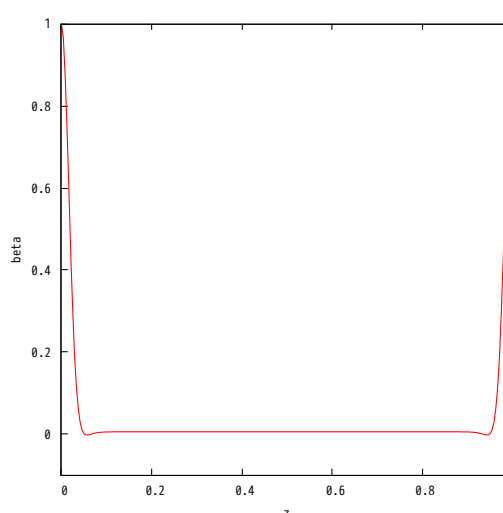


図 5.16:  $R = 10^6, \alpha = 6.0$  のときの平均温度勾配  $\beta$  と  $z$  の関係.  $z$  を横軸,  $\beta$  を縦軸にとった.  $\beta$  はこのときのヌッセルト数  $N = 22.3$  で規格化した.

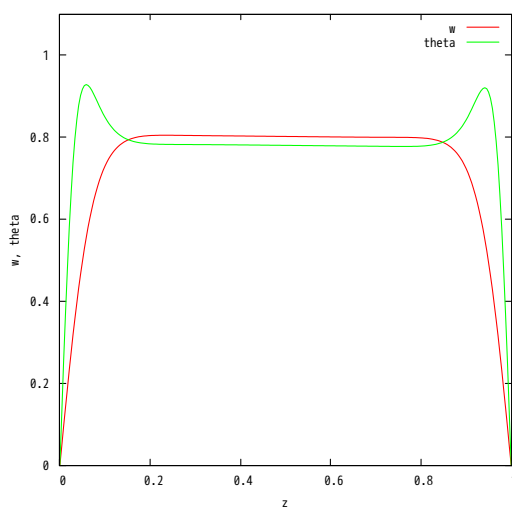


図 5.17:  $R = 10^6, \alpha = 9.0$  のときの  $w, \theta$  と  $z$  の関係. 赤色の実線は  $w$ , 緑色の実線は  $\theta$  を縦軸にとった. 横軸は  $z$  である.  $w$  は  $1.06 \times 10^{-2}w$ ,  $\theta$  は  $12.9\theta$  となるよう規格化を行った.

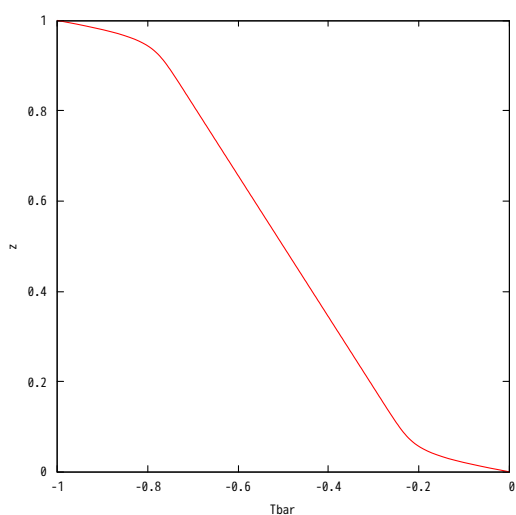


図 5.18:  $R = 10^6, \alpha = 9.0$  のときの平均温度  $\bar{T}$  と  $z$  の関係.  $\bar{T}$  を横軸,  $z$  を縦軸にとった.

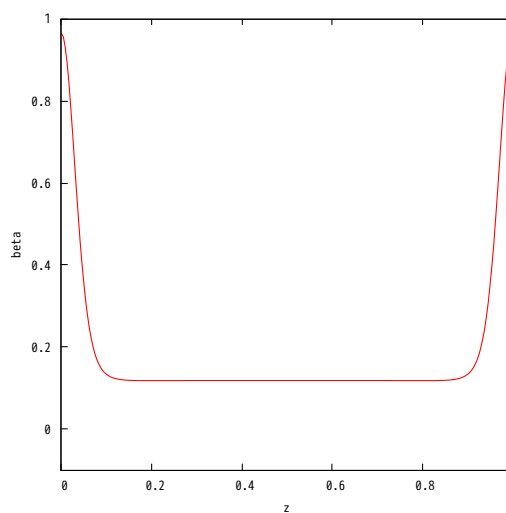


図 5.19:  $R = 10^6, \alpha = 9.0$  のときの平均温度勾配  $\beta$  と  $z$  の関係.  $z$  を横軸,  $\beta$  を縦軸にとった.  $\beta$  はこのときのヌッセルト数  $N = 5.40$  で規格化した.

(iv)  $\beta_n$  のモード変化

図 5.20 は  $\alpha = 1.5$  と定めたとき  $\beta_n$  が持つ各モードでの値をそれぞれの  $R$  について示したものである. この結果は Herring (1963) と概ね一致した. この図から, 低いモードにおいて  $\beta_n$  が 2 に近づくことが分かる.

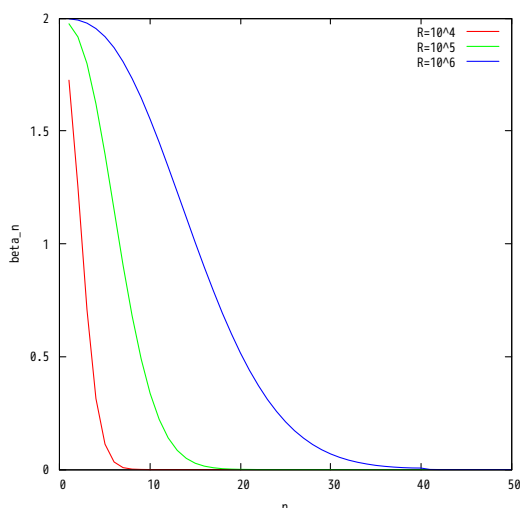


図 5.20:  $n$  と  $\bar{\beta}_n$  の関係. 横軸は  $n$ , 縦軸は  $\bar{\beta}_n$  である. 赤色の実線は  $R = 10^4$ , 緑色の実線は  $R = 10^5$ , 青色の実線は  $R = 10^6$  での値である.

(v) ヌッセルト数の最大値  $N_{\max}$ 

図 5.21 は  $\alpha$  の関数としての  $N$  の分布である. この図についても Herring (1963) と概ね一致した. この図から ヌッセルト数の最大値  $N_{\max}$  が分かる.  $R$  が大きくなるにつれて  $N_{\max}$  となる  $\alpha$  の値が大きくなる傾向があることが分かる. また,  $R$  が大きくなるにつれてより大きな  $\alpha$  でも対流による熱輸送が起こることも分かる.

$N_{\max}$  と  $R$  の関係を図 5.22 に示した.  $R = R_c (= 657.5), 4 \times 10^3, 10^4, 5 \times 10^5, 10^6$  の場合についてプロットした. プロットした点は  $N_{\max} = 0.31R^{\frac{1}{3}}$  の関係に概ね一致するが, 臨界レイリー数  $R_c$  付近ではこの関係を満たさず,  $N_{\max}$  がやや小さくなることが分かる.

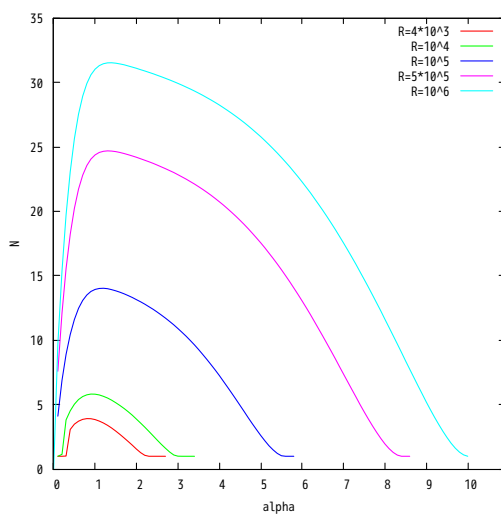


図 5.21:  $\alpha$  と  $N$  の関係. 横軸は  $\alpha$ , 縦軸は  $N$  である. 赤色の実線は  $R = 4 \times 10^3$ , 緑色の実線は  $R = 10^4$ , 青色の実線は  $R = 10^5$ , 桃色の実線は  $R = 5 \times 10^5$ , 水色の実線は  $R = 10^6$  での値である.

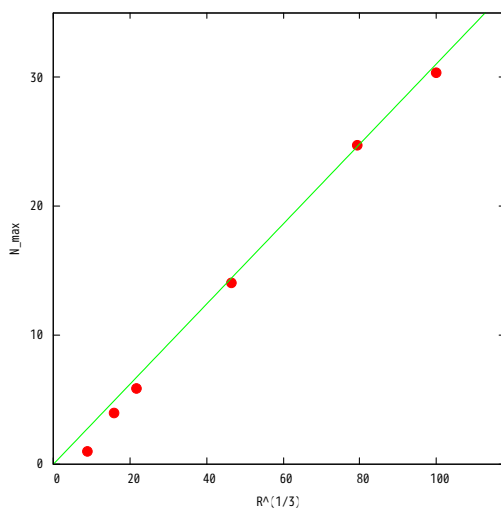


図 5.22:  $R$  と  $N_{\max}$  の関係. 横軸に  $R^{\frac{1}{3}}$ , 縦軸に  $N_{\max}$  をとった. 赤い点は計算結果, 緑色の実線は  $N = 0.31R^{\frac{1}{3}}$  である.

## 5.2 Boussinesq 系の直接数値シミュレーション結果

### 5.2.1 状況設定

3.3 節で導出した方程式系

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Psi) = J(\Psi, \nabla^2\Psi) + \sigma\nabla^4\Psi + R\sigma\frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.3.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = J(\Psi, T) - \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \nabla^2 T \quad (3.3.20)$$

を解く. 空間差分は中央差分を用いた格子点法, 時間差分は Adams-Bashforth 法, 移流項のヤコビアンは Arakawa Jacobian <sup>\*3</sup> を用いた.

考えている系は鉛直 2 次元であることを除いて 5.1 節と同様である.  $x$  方向の長さを 2, 4, 8 と変化させた.  $t = 0$  で静止しているとする. 格子点の解像度とタイムステップの大きさについてはそれぞれの図に記す.

### 5.2.2 シミュレーション結果

計算領域の水平長さ  $x$  が鉛直長さ  $z$  の 2, 4, 8 倍であるときのヌッセルト数  $N$  の時間変化を図 5.23, 5.24, 5.25 に示した. そしてそれぞれの場合についての  $R$  と  $N$  の関係を図 5.26 に示した. これらの図からまず, 水平長さが鉛直長さの 2 倍であるとき図 5.22 と同様の  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  という傾向を得た. Herring (1963) では  $N \simeq 0.31R^{\frac{1}{3}}$  であるのに対して直接数値シミュレーションでは  $N \simeq 0.26R^{\frac{1}{3}}$  となる. つまり, Herring (1963) の計算よりも直接数値シミュレーションは小さな  $N$  を与える. これは Herring (1963) が最大熱輸送を示したものであるのに対して本節の結果が必ずしも最大の熱輸送を示したものではないことによるものである. したがって Herring (1963) で消去された項は熱輸送の  $R$  依存性に対して大きな影響を持たないと考えられる. 一方水平長さが鉛直長さに対して 4, 8 倍であるとき, 高レイリー数  $R > 10^5$  において  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  の関係から外れていることが分かる. これは Herring (1963) において水平波数  $\alpha$  を一定としたことが熱輸送とレイリー数の関係を正しく示さない原因であると言えよう.

<sup>\*3</sup> Arakawa (1966), 竹村 (2008) を参照した.



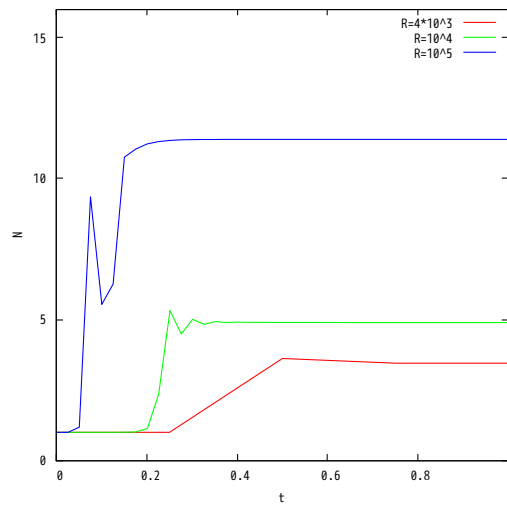


図 5.23:  $x : z = 2 : 1$  での  $t$  と  $N$  の関係. 横軸に  $t$ , 縦軸に  $N$  をとった. 赤色の実線が  $R = 4 \times 10^3$ , 緑色の実線が  $R = 10^4$ , 青色の実線が  $R = 10^5$  のときの値である.  $R = 5 \times 10^5$  において解像度は  $256 \times 128$ , タイムステップは  $dt = 10^{-6}$ ,  $R = 10^5$  において解像度は  $128 \times 64$ , タイムステップは  $dt = 10^{-6}$ , それ以下の  $R$  において解像度は  $64 \times 32$ , タイムステップは  $dt = 10^{-4}$  である.

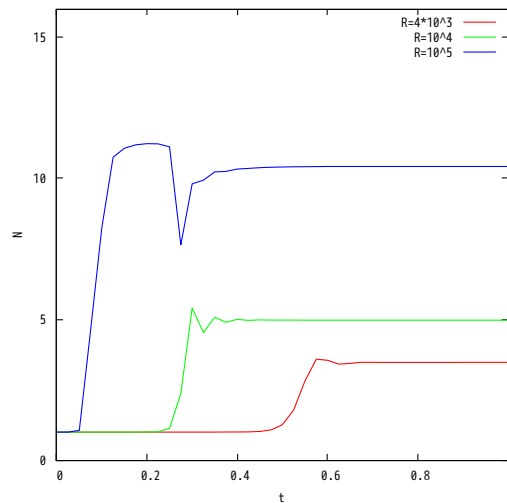


図 5.24:  $x : z = 4 : 1$  での  $t$  と  $N$  の関係. 横軸に  $t$ , 縦軸に  $N$  をとった. 赤色の実線が  $R = 4 \times 10^3$ , 緑色の実線が  $R = 10^4$ , 青色の実線が  $R = 10^5$  のときの値である.  $R = 5 \times 10^5$  において解像度は  $512 \times 128$ , タイムステップは  $dt = 10^{-6}$ ,  $R = 10^5$  において解像度は  $256 \times 64$ , タイムステップは  $dt = 10^{-6}$ , それ以下の  $R$  において解像度は  $128 \times 32$ , タイムステップは  $dt = 10^{-4}$  である.

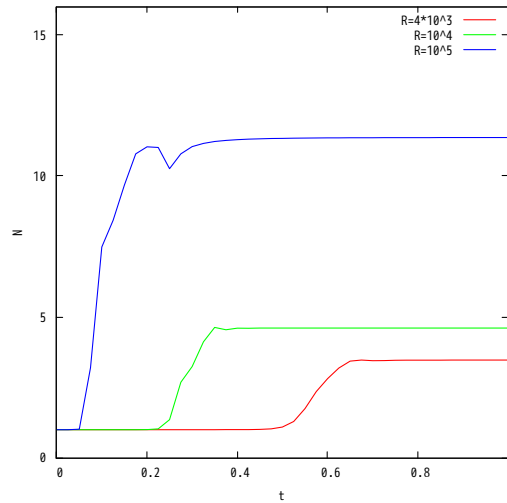


図 5.25:  $x : z = 8 : 1$  での  $t$  と  $N$  の関係. 横軸に  $t$ , 縦軸に  $N$  をとった. 赤色の実線が  $R = 4 \times 10^3$ , 緑色の実線が  $R = 10^4$ , 青色の実線が  $R = 10^5$  のときの値である.  $R = 5 \times 10^5$  において解像度は  $1024 \times 128$ , タイムステップは  $dt = 10^{-6}$ ,  $R = 10^5$  において解像度は  $512 \times 64$ , タイムステップは  $dt = 10^{-6}$ , それ以下の  $R$  において解像度は  $256 \times 32$ , タイムステップは  $dt = 10^{-4}$  である.

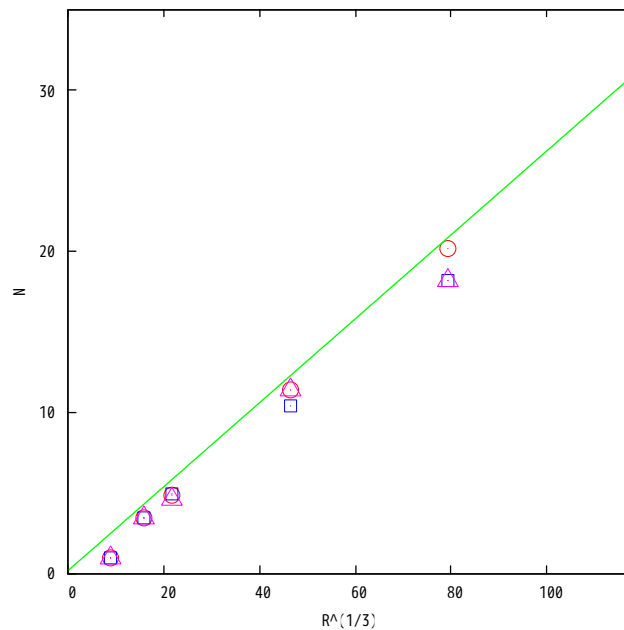


図 5.26:  $x : z = 2 : 1, 4 : 1, 8 : 1$  での  $R$  と  $N$  の関係. 横軸に  $R^{\frac{1}{3}}$ , 縦軸に  $N$  をとった. 赤色の丸印は  $x : z = 2 : 1$  のデータ, 青色の四角印は  $x : z = 4 : 1$  のデータ, 桃色の三角印は  $x : z = 8 : 1$  のデータをつないだものである. 緑色の実線は  $N = 0.26R^{\frac{1}{3}}$  である.

## 5.3 スケーリングから導かれるヌッセルト数とレイリー数の関係式

これまで数値シミュレーションを用いてヌッセルト数とレイリー数の間にある関係を調べてきた. この節ではそれらの関係が持つ物理的な意味について述べる.

### 5.3.1 $N \sim R^{\frac{1}{3}}$ の説明

Castaing *et al.* (1989) の議論を参考にして, Herring (1963) で数値的に示された関係  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  を示す. (4.3.13) の右辺から, ヌッセルト数  $N$  は

$$N \sim \frac{wT'}{\kappa\Gamma} = \frac{Hd}{\kappa\Delta T} \quad (5.3.1)$$

と書ける. ここで  $w, T'$  は次元を持った量で,  $wT' \equiv H$  と置いた. また,  $\Delta T$  は下部平板の温度  $T_{\text{bottom}}$  と上部平板の温度  $T_{\text{top}}$  の差  $T_{\text{bottom}} - T_{\text{top}}$  である. この式に

$$N \sim R^x \quad (5.3.2)$$

とスケーリングした式を代入すると

$$H \sim \frac{\kappa\Delta T}{d} R^x \quad (5.3.3)$$

となる.

次に境界層について考える. 境界層 (厚さ  $\lambda$ ) では対流が起こっていないと考えると, 熱伝導状態において  $N = 1$  であることから, 境界層における下部平板からの熱フラックス  $H$  は

$$H \sim \frac{\kappa\Delta T}{\lambda} \quad (5.3.4)$$

となる. ここで (5.3.1) を用いた. この式を再び (5.3.1) に代入すると,

$$N \sim \frac{d}{\lambda} \quad (5.3.5)$$

となり, 熱輸送は平板の間隔と境界層との比となることが分かる. また, 境界層と内部領域の境界線を境に対流が発生すると考えるため, 境界層におけるレイリー数  $R_{bl}$  は臨界レイリー数  $R_c$  に等しい. 従って (2.2.17) より

$$R_{bl} = \frac{\alpha g \Delta T \lambda^3}{\kappa \nu} = \frac{\lambda^3}{d^3} R \sim R_c \quad (5.3.6)$$

と書ける. そして  $R_c \sim R$  であるため,

$$\lambda \sim dR^{-\frac{1}{3}} \quad (5.3.7)$$

となる. よって (5.3.5) と (5.3.7) より

$$N \sim R^{\frac{1}{3}} \quad (5.3.8)$$

が導かれた.

### 5.3.2 $N \sim R^{\frac{2}{7}}$ の説明

前節で示した内容に対し, Castaing *et al.* (1989) では  $N \sim R^{\frac{2}{7}}$  の関係が満たされることを主張している. そこでこの節では Castaing *et al.* (1989) で述べられているスケーリングの方法について説明する.

まずスケーリング指数を以下のように定義する:

$$N \sim R^x, \quad (5.3.2)$$

$$\frac{T'_c}{T'} \sim R^\gamma, \quad (5.3.9)$$

$$\frac{u_c d}{\nu} \sim R^\epsilon. \quad (5.3.10)$$

ここで  $T'_c$  は内部領域における温度摂動,  $u_c$  は内部領域における速度摂動である. そして

$$H \sim u_c T'_c \quad (5.3.11)$$

という仮定を行う. また,  $u_c$  は次元的には

$$u_c \sim \sqrt{\alpha g T'_c d} \quad (5.3.12)$$

である.

(5.3.9), (5.3.12) より,

$$\begin{aligned} u_c^2 &\sim \alpha g T'_c d \\ &\sim \alpha g T' d R^\gamma \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

となり, さらに (2.2.16) と (2.2.17), (5.3.10) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{u_c^2 d^2}{\kappa \nu} &\sim R^{1+\gamma} \\ \iff \frac{1}{\kappa} R^{2\epsilon} &\sim \frac{1}{\nu} R^{1+\gamma} \\ \iff \sigma R^{2\epsilon} &\sim R^{1+\gamma} \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

が得られる. ここでプラントル数  $\sigma$  は一定とすると,

$$2\epsilon = 1 + \gamma \quad (5.3.15)$$

の関係が得られた. 一方 (5.3.3) を (5.3.9), (5.3.10), (5.3.11) を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} u_c T'_c &\sim \frac{\kappa T'}{d} R^\chi \\ \iff \frac{\nu}{d} R^\epsilon T' R^\gamma &\sim \frac{\kappa T'}{d} R^\chi \\ \iff \sigma R^{\epsilon+\gamma} &\sim R^\chi \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

となり,  $\sigma$  を一定として (5.3.15) を用いると

$$\gamma = \frac{2}{3} \left( \chi - \frac{1}{2} \right) \quad (5.3.17)$$

の関係が得られた.

Castaing *et al.* (1989) の理論では, 境界層と内部領域との中間に混合層を考える. 混合層では境界層から上昇する熱い流体が中央領域のぬるい流体と混ざりながら  $w_h$  の速度で上昇する. このとき上昇する流体は粘性力と浮力が釣りあった状態であり, (2.1.14) より

$$\frac{\nu w_h}{\lambda^2} \sim \alpha g T' \quad (5.3.18)$$

という関係式が得られる. したがって混合層での速度摂動  $w_h$  は

$$w_h \sim \frac{\alpha g T' \lambda^2}{\nu} \quad (5.3.19)$$

である. さらに, 内部領域においてもこの速度が維持されるとすると,

$$u_c \sim \frac{\alpha g T' \lambda^2}{\nu} \quad (5.3.20)$$

と書ける.

ここで, (2.2.16), (2.2.17), (5.3.2), (5.3.5) より

$$\begin{aligned} R^{1-2\chi} &= \frac{\alpha g T' d^3 \lambda^2}{\kappa \nu d^2} \\ &= \frac{\alpha g T' \lambda^2 d}{\nu} \sigma \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

と書けることから, (5.3.20) は (5.3.10) を用いて

$$R^\epsilon \sim \sigma R^{1-2\chi} \quad (5.3.22)$$

となる. そして  $\sigma$  が一定であるとする

$$\epsilon = 1 - 2\chi \quad (5.3.23)$$

の関係が得られる.

以上より, (5.3.15), (5.3.17), (5.3.23) からなる連立方程式を解くことで  $\chi, \gamma, \epsilon$  の値が求まり,  $\chi = \frac{2}{7}$ , つまり

$$N \sim R^{\frac{2}{7}} \quad (5.3.24)$$

が導かれた.

ただし Castaing *et al.* (1989) の議論では,  $4 \times 10^7 < R < 6 \times 10^{12}$  の範囲でこのスケーリング則が成り立つことを主張しているため, 本研究で行った数値シミュレーションにおけるレイリー数の範囲とは異なることに注意する.

## 第6章 結論

本研究では、レイリー・ベナール対流の数値シミュレーションを行い、レイリー数とヌッセルト数の関係について調べた。シミュレーションにはレイリー・ベナール対流を記述する完全な支配方程式系と Herring (1963) で使用された自己相互作用的な摂動の項を無視した方程式系の2種類の方程式系を用いて、それぞれの計算結果からヌッセルト数とレイリー数の関係の比較を行った。また、Herring (1963) で無視された項がレイリー・ベナール対流を記述する完全な支配方程式系においてどの項に対応するかについて考察した。

Herring (1963) に沿った数値シミュレーションの結果は、概ね Herring (1963) と一致する結果が得られたが温度摂動  $\theta$  については全ての条件について約 4.5 倍大きな値を得た。そしてヌッセルト数の最大値  $N_{\max}$  とレイリー数  $R$  との間に Herring (1963) で述べられている  $N_{\max} = 0.31R^{\frac{1}{3}}$  という関係のあることが確認された。

また、完全な支配方程式系においてもヌッセルト数  $N$  と  $R$  の関係を調べた。その結果 Herring (1963) では考慮されていない流れの領域の縦横比を変化させたとき、比が小さい場合は  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  の関係が維持されることが確認された。ただしこの場合は  $N_{\max}$  を考えていないため、ヌッセルト数は Herring (1963) の結果と比較してやや小さい値をとることが分かった。一方で比が大きいときには  $N \sim R^{\frac{1}{3}}$  の関係が成り立たないことが分かった。これは Herring (1963) では水平スケールを一定としていたことに原因があると考えられる。

## 謝辞

本研究を行うにあたり, 林祥介教授には研究テーマを決めるにあたっての指針を示して頂き, 岩山隆寛准教授には研究内容に関して細部に至る指導をして頂きました。そして高橋芳幸准教授には研究の基礎となる数値計算の技術などについての指導をして頂きました。また, 流体地球物理学教育研究分野の皆様には研究内容だけでなく日々の研究室生活で必要となるさまざまな情報についてアドバイスを頂いたり情報交換させて頂いたりしました。皆様に心よりお礼を申し上げます。



## 付録A Arakawa Jacobian 法

対流のシミュレーションを行う際に用いる数値計算のための技術の一つである Arakawa Jacobian 法についてまとめておく<sup>\*1</sup>。Arakawa Jacobian 法とは、以下の方程式系

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Psi) = J(\Psi, \nabla^2\Psi) + \sigma\nabla^4\Psi - R\sigma\frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.3.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = J(\Psi, T) - \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \nabla^2 T \quad (3.3.20)$$

を差分を用いて数値的に解く際、以下で述べる形式に変形したヤコビアンを用いる方法である。

(3.3.19) のヤコビアンについて考える。(3.3.7) を用いると、

$$J(\Psi, \nabla^2\Psi) = J(\Psi, \zeta) = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \quad (A.1)$$

と書けるが、以下のように変形しても同値である：

$$\begin{aligned} J(\Psi, \zeta) &= \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial\zeta}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi \frac{\partial\zeta}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (A.2)$$

上記のような形式のヤコビアンを用いて数値計算を行う手法を Arakawa Jacobian 法と呼ぶ。

この方法を用いることが渦度方程式 (3.3.19) においてエンストロフィー  $Q$  とエネルギー  $E$  の保存に影響を及ぼさないことについて以下で確認する。考える状況は、 $x$  方向が 0 から 2,  $z$  方向が 0 から 1 の鉛直断面  $S$  であり、 $x$  方向の境界条件は周期境界条件、 $z$  方向の境界条件は

$$\zeta(z=0, 1) = 0, \quad \Psi(z=0, 1) = 0 \quad (A.3)$$

<sup>\*1</sup> Arakawa (1966), 竹村 (2008) を参照した。

である。このとき、 $Q$  と  $E$  はそれぞれ

$$Q = \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \quad (\text{A.4})$$

$$E = \int_0^1 dz \int_0^2 dx (u^2 + w^2) \quad (\text{A.5})$$

と書ける。

まず、(3.3.19) において粘性項と浮力項を無視し移流項のみを考えた式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) = J(\Psi, \zeta) \quad (\text{A.6})$$

が確かに  $Q$  と  $E$  の保存を導くことを確認する<sup>\*2</sup>。(A.6) の両辺に  $\zeta$  を掛けて  $S$  について面積分を行うと、

$$\int_0^1 dz \int_0^2 dx \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \int_0^1 dz \int_0^2 dx \zeta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \quad (\text{A.7})$$

となる。それぞれの項について計算を行うと、まず左辺は

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \int_0^2 dx \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \\ &= \frac{dQ}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。次に右辺は

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \int_0^2 dx \zeta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) &= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \right\} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} \\ &= \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_0^1 dx - \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right]_0^2 dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となる。最後の等式では境界条件を用いた。したがって

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (\text{A.10})$$

となり (A.6) が  $Q$  の保存を導くことが確認された。

<sup>\*2</sup> 移流項はエンストロフィーやエネルギーの生成、消滅を引き起こさない。

一方, (A.6) の両辺に  $\Psi$  を掛けて  $S$  について面積分を行うと,

$$\int_0^1 dz \int_0^2 dx \Psi \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \int_0^1 dz \int_0^2 dx \Psi \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \quad (\text{A.11})$$

となる. それぞれの項について計算を行うと, まず左辺は

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz \int_0^2 dx \Psi \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \zeta) - \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 dz \int_0^2 dx (\Psi \zeta) - \int_0^1 dz \int_0^2 dx \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 dz \int_0^2 dx (\Psi \zeta) \\ &\quad - \int_0^1 \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_0^2 dz + \int_0^1 dz \int_0^2 dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ &\quad - \int_0^2 \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right]_0^1 dx + \int_0^1 dz \int_0^2 dx \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

となる. ここで境界条件より (A.12) の右辺第 2, 4 項はゼロとなることを用いてさらに計算すると,

$$\begin{aligned} (\text{A.12}) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 dz \int_0^2 dx (\Psi \zeta) \\ &\quad + \int_0^1 dz \int_0^2 dx \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \int_0^1 dz \int_0^2 dx \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 dz \int_0^2 dx (\Psi \zeta) + \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left\{ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 dz \int_0^2 dx (\Psi \zeta) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 dz \int_0^2 dx (w^2 + u^2) \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 dz \int_0^2 dx (\Psi \zeta) + \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

となる. ここで,  $E$  の定義 (A.5) より

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^1 dz \int_0^2 dx (u^2 + w^2) & (A.5) \\
&= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left\{ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
&= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right\} \\
&= \int_0^1 \left[ \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_0^2 dz - \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left( \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \\
&\quad + \int_0^2 \left[ \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right]_0^1 dx - \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left( \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \\
&= - \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left\{ \left( \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) + \left( \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \right\} \\
&= - \int_0^1 dz \int_0^2 dx (\Psi \nabla^2 \Psi) \\
&= - \int_0^1 dz \int_0^2 dx (\Psi \zeta) & (A.14)
\end{aligned}$$

と書けることを用いると, (A.13) は

$$(A.13) = -\frac{dE}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \quad (A.15)$$

となり, (A.11) の左辺が計算された. 次に (A.11) の右辺を計算すると,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dz \int_0^2 dx \Psi \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \\
&= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\} \\
&= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) - \zeta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \\
&= \int_0^1 dz \int_0^2 dx \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) \right\} \right] \\
&= \int_0^2 \left[ \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) \right]_0^1 dx - \int_0^1 \left[ \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \Psi^2 \right) \right]_0^2 dz \\
&= 0 & (A.16)
\end{aligned}$$

となる. 最後の等式では境界条件を用いた. したがって

$$-\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = 0 \quad (A.17)$$

となり (A.6) が  $E$  の保存を導くことが確認された.

次に (A.6) を差分化した式が確かに  $Q$  と  $E$  の保存を導くことを確認する. ここで行う差分化は,  $x$  方向を幅  $\Delta x$ ,  $z$  方向を幅  $\Delta z$  の微小領域に分割した場合の中央差分を用い, それぞれの格子点の座標を  $(i, j)$  で表現することにする.

はじめに Arakawa Jacobian 法を用いずに差分化した場合を考える. このとき (A.1) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ &= \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\Delta z} - \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta z} \frac{\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ &\equiv J_{i,j}^1 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

と差分化できる. これを用いた (A.7) の右辺の表現は

$$\begin{aligned} & \int dz \int dx \zeta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \\ &= \sum_{i,j} \zeta_{i,j} J_{i,j}^1 \\ &= \frac{1}{4\Delta x \Delta z} \sum_{i,j} \zeta_{i,j} \{ (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}) - (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1})(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}) \} \\ &= \frac{1}{4\Delta x \Delta z} \sum_{i,j} \zeta_{i,j} \{ \Psi_{i+1,j} \zeta_{i,j+1} - \Psi_{i+1,j} \zeta_{i,j-1} - \Psi_{i-1,j} \zeta_{i,j+1} + \Psi_{i-1,j} \zeta_{i,j-1} \\ &\quad - \Psi_{i,j+1} \zeta_{i+1,j} + \Psi_{i,j+1} \zeta_{i-1,j} + \Psi_{i,j-1} \zeta_{i+1,j} - \Psi_{i,j-1} \zeta_{i-1,j} \} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

である. この式は 0 でないある値となるため, (A.7), (A.8) より

$$\frac{dQ}{dt} \neq 0 \quad (\text{A.20})$$

となり, エンストロフィーが保存されないことが分かる. つまり (A.18) は正しい差分近似でないことが分かる.

次に Arakawa Jacobian 法を用いて (A.2) のように差分化した場合を考える. (A.2) の右辺第 2 項を差分で表現すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \\ &= \left( \Psi_{i+1,j} \frac{\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i+1,j-1}}{2\Delta z} - \Psi_{i-1,j} \frac{\zeta_{i-1,j+1} - \zeta_{i-1,j-1}}{2\Delta z} \right) / 2\Delta x \\ &\quad - \left( \Psi_{i,j+1} \frac{\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - \Psi_{i,j-1} \frac{\zeta_{i+1,j-1} - \zeta_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right) / 2\Delta z \\ &\equiv J_{i,j}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

となる. 同様に (A.2) の右辺第 3 項を差分で表現すると

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \\
&= \left( \zeta_{i,j+1} \frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - \zeta_{i,j-1} \frac{\Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right) / 2\Delta z \\
&\quad - \left( \zeta_{i+1,j} \frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1}}{2\Delta z} - \zeta_{i-1,j} \frac{\Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1}}{2\Delta z} \right) / 2\Delta x \\
&\equiv J_{i,j}^3 \tag{A.22}
\end{aligned}$$

となる. したがって (A.18), (A.21), (A.22) を用いて (A.2) は

$$J(\Psi, \zeta) = \frac{1}{3} (J_{i,j}^1 + J_{i,j}^2 + J_{i,j}^3) \tag{A.23}$$

と書ける. これを用いた (A.7) の右辺の表現は

$$\begin{aligned}
& \int dz \int dx \zeta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{i,j} \zeta_{i,j} (J_{i,j}^1 + J_{i,j}^2 + J_{i,j}^3) \\
&= \frac{1}{12\Delta x \Delta z} \sum_{i,j} \zeta_{i,j} \{ (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}) - (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1})(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}) \\
&\quad + \Psi_{i+1,j}(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i+1,j-1}) - \Psi_{i-1,j}(\zeta_{i-1,j+1} - \zeta_{i-1,j-1}) \\
&\quad - \Psi_{i,j+1}(\zeta_{i+1,j+1} - \zeta_{i-1,j+1}) + \Psi_{i,j-1}(\zeta_{i+1,j-1} - \zeta_{i-1,j-1}) \\
&\quad + \zeta_{i,j+1}(\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i-1,j+1}) - \zeta_{i,j-1}(\Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j-1}) \\
&\quad - \zeta_{i+1,j}(\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1}) + \zeta_{i-1,j}(\Psi_{i-1,j+1} - \Psi_{i-1,j-1}) \} \tag{A.24}
\end{aligned}$$

である. この式を整理すると.

$$\begin{aligned}
(A.24) = & \frac{1}{12\Delta x \Delta z} \sum_{i,j} \zeta_{i,j} \{ (\Psi_{i+1,j} \zeta_{i,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} \zeta_{i,j-1}) \\
& - (\Psi_{i+1,j} \zeta_{i,j-1} - \Psi_{i+1,j+1} \zeta_{i,j+1}) \\
& - (\Psi_{i-1,j} \zeta_{i,j+1} - \Psi_{i-1,j-1} \zeta_{i,j-1}) \\
& + (\Psi_{i-1,j} \zeta_{i,j-1} - \Psi_{i-1,j+1} \zeta_{i,j+1}) \\
& - (\Psi_{i,j+1} \zeta_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j+1} \zeta_{i-1,j}) \\
& + (\Psi_{i,j+1} \zeta_{i-1,j} - \Psi_{i+1,j+1} \zeta_{i+1,j}) \\
& + (\Psi_{i,j-1} \zeta_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j-1} \zeta_{i-1,j}) \\
& - (\Psi_{i,j-1} \zeta_{i-1,j} - \Psi_{i+1,j-1} \zeta_{i+1,j}) \\
& + (\Psi_{i+1,j} \zeta_{i+1,j+1} - \Psi_{i,j-1} \zeta_{i-1,j-1}) \\
& - (\Psi_{i+1,j} \zeta_{i+1,j-1} - \Psi_{i,j+1} \zeta_{i-1,j+1}) \\
& - (\Psi_{i-1,j} \zeta_{i-1,j+1} - \Psi_{i,j-1} \zeta_{i+1,j-1}) \\
& + (\Psi_{i-1,j} \zeta_{i-1,j-1} - \Psi_{i,j+1} \zeta_{i+1,j+1}) \} \quad (A.25)
\end{aligned}$$

となる. 括弧で2項ずつにまとめたが, これは各格子点について和をとると打ち消し合う項である. 例えば (A.25) の1つめの括弧についてみると, ある格子点  $(i, j)$  での括弧内第1項の値は

$$\zeta_{i,j} \Psi_{i+1,j} \zeta_{i,j+1} \quad (A.26)$$

であり, またある格子点  $(i, j+1)$  での括弧内第2項の値は

$$\zeta_{i,j+1} \Psi_{i+1,j} \zeta_{i,j} \quad (A.27)$$

であり, 打ち消し合うことが分かる. 和をとった際に境界の格子点についての項が残るが, これらの項は境界条件より0となる. したがって (A.25) の1つめの括弧は  $j$  について和をとったときに打ち消し合い0となることが分かった. 他の括弧内の2項についても同様に打ち消し合い, したがって (A.7), (A.8), (A.24), (A.25) より

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (A.28)$$

となる. 以上より Arakawa Jacobian 法を用いて差分化を行ったときエンストロフィーの保存が導かれることが分かった.

ここで, エンストロフィーの保存は  $J_{i,j}^1$  と  $J_{i,j}^3$  の和をとることで導くことができ, 一方  $J_{i,j}^2$  のみを用いて導くこともできることに注意する. このことからヤコビアンを3つに分割する必要がないように思われるが, 同様の計算を行いエネルギーの保存も導くことでその必要性が確認される. エネルギーの保存は  $J_{i,j}^1$  と  $J_{i,j}^2$  の和, また

は  $J_{i,j}^3$  のみを用いて導くことができる. したがってエンストロフィーとエネルギーの両方を保存させるためには (A.23) のように差分化を行うことが必要である.

ここまで渦度方程式 (3.3.19) について Arakawa jacobian 法を用いることが適切であることについて述べてきたが, エネルギー方程式 (3.3.20) についても同様であることについて述べておく. 渦度方程式と同様に移流項のみを考えると, 渦度方程式におけるエンストロフィー, エネルギーに対応するある物理量の保存式

$$\int dz \int dx T \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\int dz \int dx \Psi \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.30})$$

が成り立つことを確認する必要がある. これは渦度方程式の場合から  $\zeta$  と  $T$  を置き換えることで確認できるため計算は省略する.



## 付録B 臨界レイリー数の導出

熱伝導状態の系に微小な摂動を与えたとき対流が発生するための条件を導く。つまり臨界レイリー数の導出を行う<sup>\*1</sup>。まず Herring(1963) の (13), (14) 式

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \omega_n^\alpha = \frac{\lambda \alpha^2}{n^2 + \alpha^2} \theta_n^\alpha, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \theta_n^\alpha = \omega_n^\alpha - \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \psi_p (\omega_{n+p}^\alpha + \sigma(n-p) \omega_{|n-p|}^\alpha) \quad (14)$$

から  $\theta_n^\alpha$  を消去し,  $\omega_n^\alpha$  について解く。ここで, 微小な摂動を考えるため (14) の非線形項 (右辺第 2 項) は無視することにする。  $\theta_n^\alpha$  を消去すると,

$$\left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + n^2 + \alpha^2\right) \frac{n^2 + \alpha^2}{\lambda \alpha^2} \omega_n^\alpha = \omega_n^\alpha \quad (B.1)$$

と書ける。ここで  $\omega_n^\alpha = A e^{-i\Lambda\tau}$  とおいて (8.1) に代入する。ただし  $A$  は任意の定数,  $\Lambda$  は複素数である。代入して整理した結果以下の式が得られる:

$$\left(-\frac{i\Lambda}{\sigma} + n^2 + \alpha^2\right) (-i\Lambda + n^2 + \alpha^2) (n^2 + \alpha^2) A e^{-i\Lambda\tau} = \lambda \alpha^2 A e^{-i\Lambda\tau}. \quad (B.2)$$

次にこの式の両辺を  $A e^{-i\Lambda\tau}$  で割り, さらに  $\left(\frac{i\Lambda^*}{\sigma} + n^2 + \alpha^2\right)$  を掛ける。ここで  $\Lambda^*$  は  $\Lambda$  の複素共役である。計算の結果

$$\begin{aligned} \left[ (n^2 + \alpha^2)^2 + (n^2 + \alpha^2) \left(\frac{i\Lambda^*}{\sigma} - \frac{i\Lambda}{\sigma}\right) + \frac{|\Lambda|^2}{\sigma^2} \right] (-i\Lambda + n^2 + \alpha^2) (n^2 + \alpha^2) \\ = \lambda \alpha^2 \left( n^2 + \alpha^2 + \frac{i\Lambda^*}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (B.3)$$

が得られる。ここで  $\Lambda$  の実部を  $\Lambda_R$ , 虚部を  $\Lambda_I$  とおいてさらに計算すると<sup>\*2</sup>,

$$\begin{aligned} \left[ (n^2 + \alpha^2)^2 + (n^2 + \alpha^2) \frac{2\Lambda_I}{\sigma} + \frac{\Lambda_R^2 + \Lambda_I^2}{\sigma^2} \right] (-i\Lambda_R + \Lambda_I + n^2 + \alpha^2) (n^2 + \alpha^2) \\ = \lambda \alpha^2 \left( n^2 + \alpha^2 + \frac{i\Lambda_R + \Lambda_I}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (B.4)$$

<sup>\*1</sup> 地球環境を学ぶための流体力学 (2001) を参照した。

<sup>\*2</sup>  $\Lambda = \Lambda_R + i\Lambda_I$ ,  $\Lambda^* = \Lambda_R - i\Lambda_I$  と書ける。

と書ける. この式の虚部を取り出すと,

$$\left[ (n^2 + \alpha^2)^2 + (n^2 + \alpha^2) \frac{2\Lambda_I}{\sigma} + \frac{\Lambda_R^2 + \Lambda_I^2}{\sigma^2} \right] (n^2 + \alpha^2) (-i\Lambda_R) = \lambda \alpha^2 \frac{i\Lambda_R}{\sigma} \quad (\text{B.5})$$

となり, 整理すると

$$\begin{aligned} \Lambda_R \left[ \left\{ (n^2 + \alpha^2)^2 + (n^2 + \alpha^2) \frac{2\Lambda_I}{\sigma} + \frac{\Lambda_R^2 + \Lambda_I^2}{\sigma^2} \right\} (n^2 + \alpha^2) + \frac{\lambda \alpha^2}{\sigma} \right] &= 0 \\ \iff \Lambda_R \left[ \left\{ \left( (n^2 + \alpha^2) + \frac{\Lambda_I}{\sigma} \right)^2 + \frac{\Lambda_R^2}{\sigma^2} \right\} (n^2 + \alpha^2) + \frac{\lambda \alpha^2}{\sigma} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

となる. この式の左辺についてみると, 大括弧の中はすべて正定値となっていることが分かる<sup>\*3</sup>. したがってこの等式が成り立つためには  $\Lambda_R = 0$  である必要がある.  $\omega_n^\alpha = Ae^{-i\Lambda\tau}$  と仮定していたため,  $\omega_n^\alpha = Be^{i(kx+ly-\omega t)}$  のような式と比較することで  $\Lambda_R = 0$  の場合  $\omega_n^\alpha$  には進行する解が存在しないことが分かる.

次に  $\Lambda_I$  について考える.  $\Lambda_I = 0$  の場合と  $\Lambda_I \neq 0$  の場合が考えられ, まず  $\Lambda_I \neq 0$  の場合  $\omega_n^\alpha$  は成長する解または減衰する解となる. この解は任意の初期条件を与えることで成長する解となる. 一方  $\Lambda_I = 0$  の場合,  $\omega_n^\alpha$  は定数となる. ここでは境界安定性の問題を考えるため,  $\Lambda_I = 0$  の場合を考えることにする.

以上より  $\Lambda = 0$  である. これを (B.2) に用いると,

$$(n^2 + \alpha^2)^3 = \lambda \alpha^2 \quad (\text{B.7})$$

が得られる. そして (3.2.12) より  $\lambda = R/\pi^4$  を用いると

$$\frac{(n^2 + \alpha^2)^3}{\alpha^2} = \frac{R}{\pi^4} \quad (\text{B.8})$$

となる. そして  $n = 1$  のモードを考えることにすると,

$$\frac{\pi^4(1 + \alpha^2)^3}{\alpha^2} = R \quad (\text{B.9})$$

となる. この  $R$  が臨界レイリー数である.  $R$  がこの値より小さい場合, 対流は支持されない.

(B.9) をグラフに描くと図 8.1 のようになる.  $\frac{dR}{d\alpha} = 0$  となるときレイリー数は最小となり, そのときのレイリー数を臨界レイリー数  $R_c$  と呼ぶ. 計算すると  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき  $R_c \sim 657.5$  となる.

<sup>\*3</sup>  $\sigma, \lambda$  は正の値のみをとる.

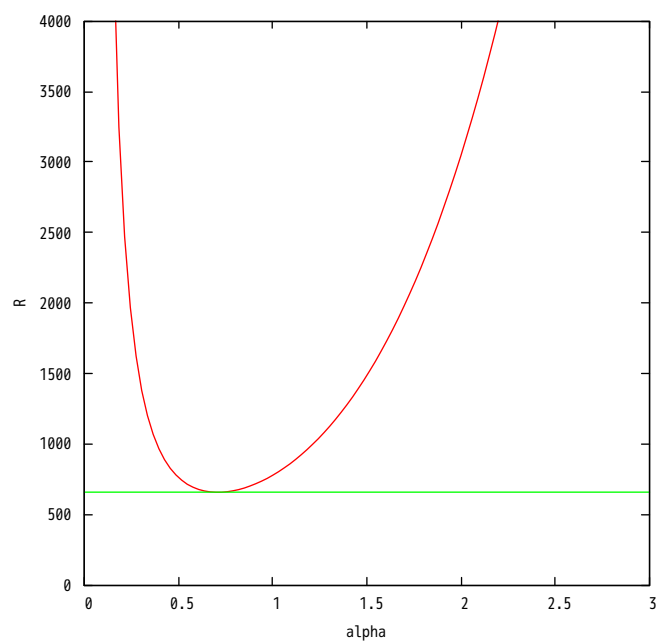


図 B.1:  $R$  と  $\alpha$  の関係. 横軸に  $\alpha$ , 縦軸に  $R$  をとった. 緑色の実線は  $R = 657.5$  を表す.

## 参考文献

- [1] Herring, J. R., 1963: Investigation of problems in thermal convection. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 325-338.
- [2] Saltzman, B., 1962: Finite amplitude free convection as an initial value problem — I. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 329-341.
- [3] Castaing, B., Gunaratne, G., Heslot, F., Kadanoff, L., Libchaber, A., Thomae, S., Wu, X.-Z., Zaleski, S., Zanetti, G., 1989: Scaling of hard thermal turbulence in Reileigh-Benard convection. *J. Fluid. Mech.*, **204**, 1-30.
- [4] Arakawa, A., 1966: Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion. *J. Comput. Phys.*, **1**, 119-143.
- [5] 九州大学大学院総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻 編, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, 212-223 pp.
- [6] 大関 誠, 2006: 「スペクトルモデル入門」 気象研究ノート 第 211 号, 日本気象学会, 14-15 pp.
- [7] 竹村 和人, 2008: 2次元ベナール・レイリー型対流の数値シミュレーション, 神戸大学卒業論文, 87-95 pp.
- [8] 岩山 隆寛, 2016: 地球惑星科学実習 B: 常微分方程式の数値解法,  
URL: <http://www2.kobe-u.ac.jp/iwayama/teach/experiment/2016/ode.pdf>