Bénard 対流の線形論

村上真也

2014/07/24

はじめに

- 目次
- 前置き
- 熱伝導と熱対流
- Bénard 対流とは
- Bénard (1900) の実験 装置
- Bénard 対流の模式図
- Bénard 対流の実験
- Bénard 対流の実験
- この節のまとめ

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他



目次

はじめに

- ●目次
- 前置き
- 熱伝導と熱対流
- Bénard 対流とは
- Bénard (1900) の実験 装置
- Bénard 対流の模式図
- Bénard 対流の実験
- Bénard 対流の実験
- この節のまとめ

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論:序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

前置き

はじめに

- 目次
- 前置き
- 熱伝導と熱対流
- Bénard 対流とは
- Bénard (1900) の実験 装置
- Bénard 対流の模式図
- Bénard 対流の実験
- Bénard 対流の実験
- この節のまとめ

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

本日の発表資料の元になったノートは

村上, 2014: Bénard 対流のノート

で, このノートの前半は主に Drazin and Reid (2004) を, 後半は

地球流体電脳倶楽部理論グループ, 1993?:地球流体理論マニュアル基礎理論参照編 平板間のブシネスク流体の対流.

を参考にした. また, 部分的に原著論文 (Pellew & Southwell, 1940; Reid & Harris, 1958) を参照した.

熱伝導と熱対流

はじめに

- 目次
- 前置き
- 熱伝導と熱対流
- Bénard 対流とは
- Bénard (1900) の実験 装置
- Bénard 対流の模式図
- Bénard 対流の実験
- Bénard 対流の実験
- この節のまとめ

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

等温な流体を下側から温めると何が起こるか?

定性的な言いかたをすると,

- 少しだけ温めると、「熱伝導」により熱が運ばれる。
 - 下が暖かく,上が冷たい状態.温度勾配が一定になる.
- ガンガン温めると、流体の運動により熱が運ばれる(「熱対流」).
 - 。 暖かい流体が上昇し,冷たい流体が下降する「対流セル」ができる.

Bénard 対流とは

はじめに

- 目次
- 前置き
- 熱伝導と熱対流
- Bénard 対流とは
- Bénard (1900) の実験 装置
- Bénard 対流の模式図
- Bénard 対流の実験
- Bénard 対流の実験
- この節のまとめ

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論:序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

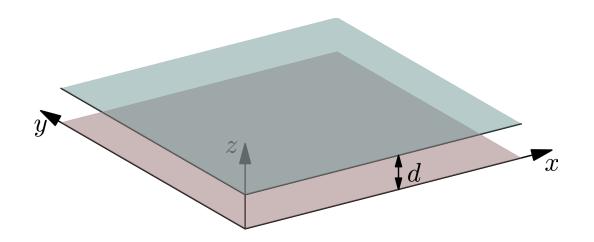
弱非線形論: free-free

まとめ

その他

Thomson(1882), Bénard (1900) による実験, Rayleigh (1916) による解析.

- 平らな板の上の薄い流体層が、下端から一様に温められている 状態を考える。
 - 。 一定の温度に保つ.
- Rayleigh 数が臨界 Rayleigh 数を越えると不安定が起こる.
 - 臨界 Rayleigh 数は境界条件によって変わる.



大気セミナー 20140724

Bénard (1900) の実験装置

はじめに

- ●目次
- 前置き
- 熱伝導と熱対流
- Bénard 対流とは
- Bénard (1900) の実験 装置
- Bénard 対流の模式図
- Bénard 対流の実験
- Bénard 対流の実験
- この節のまとめ

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

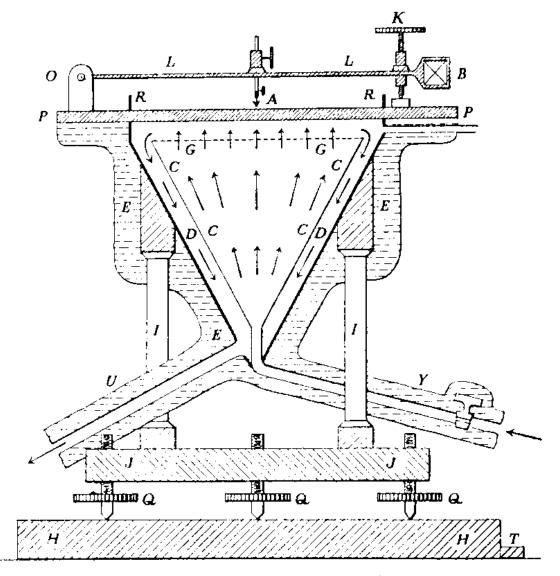
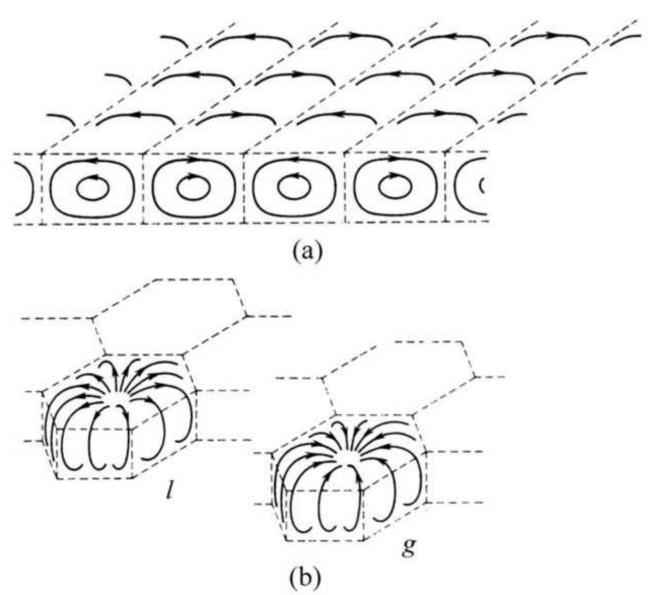


Fig. 10. The original apparatus of Bénard.

Chandrasekhar (1961) より転載.

T'

Bénard 対流の模式図

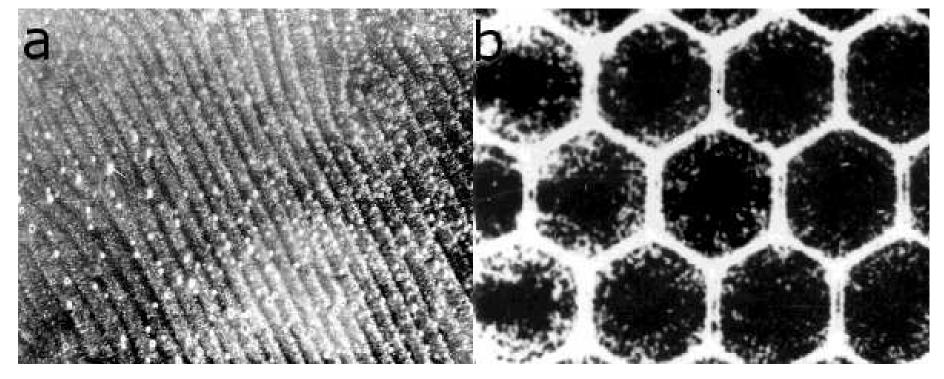


- (a) 2次元ロール状対流
- (b) 六角形セル状対流

Getling (2012)

大気セミナー 20140724

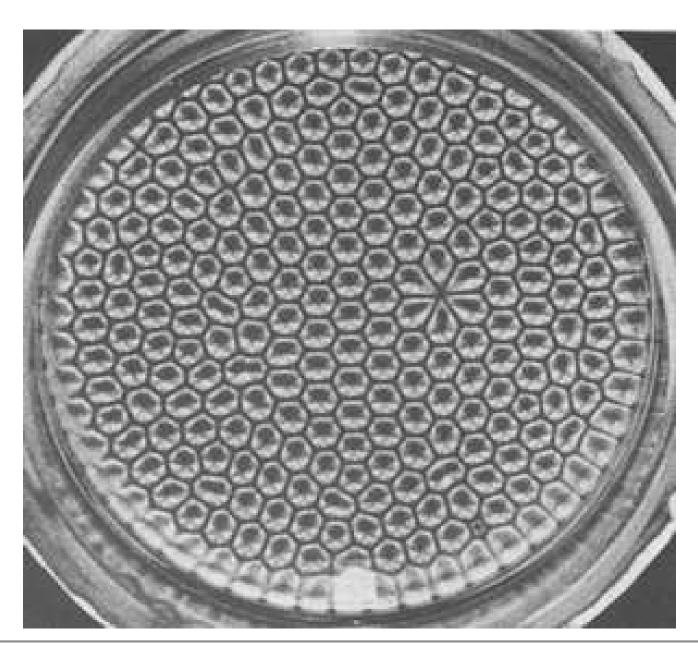
Bénard 対流の実験



Getling (2012)

大気セミナー 20140724 9 / 70

Bénard 対流の実験



Van Dyke (1982) ?

大気セミナー 20140724 10 / 70

この節のまとめ

はじめに

- 目次
- 前置き
- 熱伝導と熱対流
- Bénard 対流とは
- Bénard (1900) の実験 装置
- Bénard 対流の模式図
- Bénard 対流の実験
- Bénard 対流の実験
- この節のまとめ

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

平板上の薄い流体層を下端から一様に温める.

- ゆっくり温めると熱伝導により熱が運ばれる.
- 激しく温める (Rayleigh 数が臨界 Rayleigh 数を越える) と熱対流 が起きる.
 - パターンは色々ある。
 - 二次元ロール状
 - 三角形型
 - 四角形型
 - 六角形型
 - etc.

大気セミナー 20140724

はじめに

Boussinesq 近似

- 状態方程式
- 流体の支配方程式系
- 連続の式の近似
- 運動方程式の近似
- エネルギーの式の近似
- この節のまとめ

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

Boussinesq 近似

大気セミナー 20140724

12 / 70

状態方程式

はじめに

Boussinesq 近似

- 状態方程式
- 流体の支配方程式系
- 連続の式の近似
- 運動方程式の近似
- エネルギーの式の近似
- この節のまとめ

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

状態方程式を次式で近似的に与える1.

$$\rho_* = \rho_0 \{ 1 - \alpha(\theta_* - \theta_0) \} \tag{1}$$

ここで ρ_* は密度, θ_* は温度, $\alpha:=-\frac{1}{\rho_*}\left(\frac{\partial \rho_*}{\partial p_*}\right)_{\theta_*}$ は体膨張率である.

$$\frac{\rho_* - \rho_0}{\rho_0} = \alpha(\theta_0 - \theta_*) \ll 1, \quad \text{when} \quad \theta_0 - \theta_* \le 10 K$$
 (2)

ここで、理想気体について $\alpha \approx 3 \times 10^{-3}~K^{-1}$ 、典型的な液体について $\alpha \approx 5 \times 10^{-4}~K^{-1}$ である².

 $^{1} \rho_{*}(p_{*},\theta_{*})$ を Taylor 展開をすれば,

$$\rho_*(p_*, \theta_*) \approx \rho_*(p_0, \theta_0) + \left(\frac{\partial \rho_*}{\partial p_*}\right)_{\theta_*} (p_* - p_0) + \left(\frac{\partial \rho_*}{\partial \theta_*}\right)_{p_*} (\theta_* - \theta_0)$$

$$\approx \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho_*}{\partial p_*}\right)_{\theta_*} (\theta_* - \theta_0).$$

²Drazin and Reid (2004)

流体の支配方程式系

はじめに

Boussinesq 近似

- 状態方程式
- 流体の支配方程式系
- 連続の式の近似
- 運動方程式の近似
- エネルギーの式の近似
- この節のまとめ

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t_*} + \frac{\partial (\rho_* u_{j*})}{\partial x_{j*}} = 0, \tag{3}$$

$$\rho_* \frac{Du_{i*}}{Dt_*} = -g\rho_* \delta_{i3} + \frac{\partial \sigma_{ij*}}{\partial x_{j*}},\tag{4}$$

$$\sigma_{ij*} = -p_* \delta_{ij} + \mu_* \left(\frac{\partial u_{i*}}{\partial x_{j*}} + \frac{\partial u_{j*}}{\partial x_{i*}} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{k*}}{\partial x_{k*}} \delta_{ij} \right) + \lambda_* \frac{\partial u_{k*}}{\partial x_{k*}} \delta_{ij},$$
(5)

$$\rho \frac{DE_*}{Dt_*} = \frac{\partial}{\partial x_{j*}} \left(k_* \frac{\partial \theta_*}{\partial x_{j*}} \right) - p_* \frac{\partial u_{j*}}{\partial x_{j*}} + \Phi_*, \tag{6}$$

$$\Phi_* = \frac{1}{2}\mu_* \left(\frac{\partial u_{i*}}{\partial x_{j*}} + \frac{\partial u_{j*}}{\partial x_{i*}}\right)^2 + \left(\lambda_* - \frac{2}{3}\mu_*\right) \left(\frac{\partial u_{k*}}{\partial x_{k*}}\right)^2. \tag{7}$$

このへんは飛ばして,この節のまとめへ.

連続の式の近似

はじめに

Boussinesq 近似

- 状態方程式
- 流体の支配方程式系
- 連続の式の近似
- 運動方程式の近似
- エネルギーの式の近似
- この節のまとめ

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

 $(\rho_* - \rho_0)/\rho_0 = \alpha_*(\theta_0 - \theta_*)$ なので, $\frac{\partial \rho_*}{\partial t_*}$ も $O(\alpha)$ である. よって,

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t_*} + (\boldsymbol{u}_* \cdot \nabla_*) \rho_* + \rho_* \nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_* = 0$$
(8)

$$\nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_* = 0 \tag{9}$$

となる. 従って, 応力テンソル σ_{ij} は,

$$\sigma_{ij*} = -p_* \delta_{ij} + \mu_* \left(\frac{\partial u_{i*}}{\partial x_{j*}} + \frac{\partial u_{j*}}{\partial x_{i*}} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{k*}}{\partial x_{k*}} \delta_{ij} \right) + \lambda \frac{\partial u_{k*}}{\partial x_{k*}} \delta_{ij}, \tag{10}$$

$$= -p_* \delta_{ij} + \mu_* \left(\frac{\partial u_{i*}}{\partial x_{j*}} + \frac{\partial u_{j*}}{\partial x_{i*}} \right) \tag{11}$$

と簡略化される.

運動方程式の近似

はじめに

Boussinesq 近似

- 状態方程式
- 流体の支配方程式系
- 連続の式の近似
- 運動方程式の近似
- エネルギーの式の近似
- この節のまとめ

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

運動方程式は、浮力項以外で ρ_* , μ_* を定数とみなすと、

$$\rho_* \frac{D\boldsymbol{u}_*}{Dt_*} = -g\rho_* \boldsymbol{k} - \nabla_* p_* + \mu_* \nabla_*^2 \boldsymbol{u}_*, \tag{12}$$

$$\rho_0 \frac{D u_*}{D t_*} = -g \rho_0 \{1 - \alpha_* (\theta_* - \theta_0)\} k - \nabla_* p_* + \mu_* \nabla_*^2 u_*,$$
 (13)

$$\frac{D\boldsymbol{u}_*}{Dt_*} = -\nabla_* \left(\frac{p_*}{\rho_0} + gz_*\right) + \alpha_* g(\theta_* - \theta_0) \boldsymbol{k} + \nu \nabla_*^2 \boldsymbol{u}_* \tag{14}$$

となる. ここで, $\nu := \mu_*/\rho_0$.

エネルギーの式の近似

はじめに

Boussinesq 近似

- 状態方程式
- 流体の支配方程式系
- 連続の式の近似
- 運動方程式の近似
- エネルギーの式の近似
- この節のまとめ

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

オーダーを考えると, Φ_* は無視できる. 一方で, 圧縮に伴う加熱は無視できない:

$$\frac{D\rho_*}{Dt} + \rho_* \nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_* = 0, \qquad \nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_* = -\frac{1}{\rho_*} \frac{D\rho_*}{Dt_*}, \tag{15}$$

$$p_* \nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_* = -\frac{p_*}{\rho_*} \frac{D\rho_*}{Dt_*} = -\frac{p_*}{\rho_*} \frac{D}{Dt_*} \rho_0 \{1 - \alpha_* (\theta_* - \theta_0)\}$$

$$= -\frac{\rho_0}{\rho_*} p_* \frac{D}{Dt_*} (-\alpha_* \theta_*) \approx \alpha_* p_* \frac{D\theta_*}{Dt_*}. \tag{16}$$

理想気体に対して, $p_* = (C_p - C_v)\rho_*\theta_*$, $\alpha_* = 1/\theta_*$ となるので,

$$\rho_* \frac{DE_*}{Dt_*} + p_* \nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_* = \rho_* \frac{DC_{v} \theta_*}{Dt_*} + \alpha_* (C_{p} - C_{v}) \rho_* \theta_* \frac{D\theta_*}{Dt_*} = \rho_* C_{p} \frac{D\theta_*}{Dt}$$
(17)

$$\frac{D\theta_*}{Dt_*} = \frac{k}{\rho_* C_{\rm p}} \Delta_* \theta_* \approx \frac{k}{\rho_0 C_{\rm p}} \Delta_* \theta_* =: \kappa \Delta_* \theta_* \tag{18}$$

この節のまとめ

はじめに

Boussinesq 近似

- 状態方程式
- 流体の支配方程式系
- 連続の式の近似
- 運動方程式の近似
- エネルギーの式の近似
- この節のまとめ

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

● Navier-Stokes 方程式の Boussinesq 近似を導出した.

 \circ 運動方程式において, 浮力項以外で ho_* , μ_* を定数とみなす.

Boussinesq 近似方程式系は,

$$\nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_* = 0, \tag{19}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_*}{Dt_*} = -\nabla_* \left(\frac{p_*}{\rho_0} + gz_*\right) + \alpha g(\theta_* - \theta_0)\boldsymbol{k} + \nu \Delta_* \boldsymbol{u}, \quad (20)$$

$$\frac{D\theta_*}{Dt_*} = \kappa \Delta_* \theta_*. \tag{21}$$

 u_* :速度ベクトル,

 θ_* :温度,

 $\nu = \mu_*/\rho_0$: 粘性係数,

 κ : 熱伝導率,

g:重力加速度

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

支配方程式の導出

大気セミナー 20140724

力学的境界条件

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 擾乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

上端 $z_* = d$ と下端 $z_* = 0$ で境界条件を与える.

• 運動学的条件

$$w_*|_{z_*=0,d} = 0 (22)$$

• 応力 $(\mu_*\partial u_*/\partial z_*, \mu_*\partial v_*/\partial z_*)$ なし (自由表面)

$$-\frac{\partial}{\partial z_*} \left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} \right) \bigg|_{z_* = 0, d} = \frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} \bigg|_{z_* = 0, d} = 0$$
 (23)

• 剛体壁すべりなし ($u_* = 0, v_* = 0$, rigid)

$$-\left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*}\right)\Big|_{z_*=0,d} = \left.\frac{\partial w_*}{\partial z_*}\right|_{z_*=0,d} = 0 \tag{24}$$

• 上端応力なし、下端すべりなし

温度境界条件

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

上端 $z_* = d$ と下端 $z_* = 0$ で境界条件を与える.

• 温度固定

$$\theta_*|_{z_*=0} = \theta_0, \quad \theta_*|_{z_*=d} = \theta_1,$$
 (25)

• 熱フラックス固定

$$\left. \frac{\partial \theta_*}{\partial z_*} \right|_{z_* = 0, d} = -F \tag{26}$$

• 下端で温度固定, 熱フラックス固定

今回は上下端で温度固定の場合*のみ*を考える.

熱伝導解

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 擾乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

運動なし ($u_*=0$) で定常な解,「熱伝導解」を考える. $u_*=0$ だから,

$$0 = -\nabla_* \left(\frac{p_*}{\rho_0} + g z_* \right) + g \alpha (\theta_* - \theta_0) \boldsymbol{k}, \tag{27}$$

$$0 = \kappa \Delta_* \theta_* \tag{28}$$

が解くべき式である. 解は

$$\theta_* - \theta_0 = -\beta z_*, \tag{29}$$

$$p_*(z_*) = p_0 - \rho_0 g \left(z_* + \frac{1}{2} \alpha \beta z_*^2 \right)$$
 (30)

である. ここで p_0 は下端の圧力である. 上下端で温度固定境界条件の場合は,

$$\beta = (\theta_0 - \theta_1)/d. \tag{31}$$

熱フラックス固定境界条件の場合は $\beta = F$.

熱伝導解の模式図

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- ・擾乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

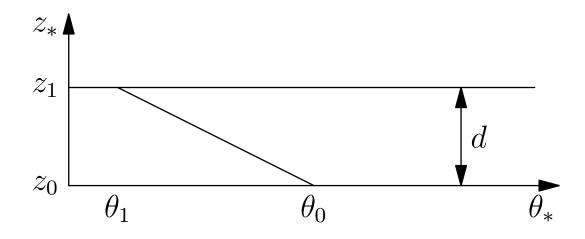
線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他



- $\bullet \quad \theta_* \theta_0 = -\beta z_*.$
- 下端 z_0 での温度 θ_0 を固定.
- 上端 z_1 での温度 θ_1 は θ_0 より小さい (冷たい).

擾乱の方程式の導出 (1/2)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

速度ベクトル, 温度, 圧力を基本場 (熱伝導解) と擾乱に分けて書くと,

$$u_* = u'_*(x_*, t_*),$$
 (32)

$$\theta_* = \Theta_*(z_*) + \theta'_*(x_*, t_*), \tag{33}$$

$$p_* = P_*(z_*) + p'_*(\boldsymbol{x}_*, t_*) \tag{34}$$

とする.

Boussinesq 近似方程式を改めて列挙すると,

$$\nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_* = 0, \tag{35}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_*}{Dt_*} = -\nabla_* \left(\frac{p_*}{\rho_0} + gz_*\right) + \alpha g(\theta_* - \theta_0)\boldsymbol{k} + \nu \Delta_* \boldsymbol{u}_*, \quad (36)$$

$$\frac{D\theta_*}{Dt_*} = \kappa \Delta_* \theta_*. \tag{37}$$

これに代入して, 擾乱に関する方程式を得る.

擾乱の方程式の導出 (2/2)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- ・擾乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

ほんの少し計算すると,

$$\nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_*' = 0, \tag{38}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}_{*}'}{Dt_{*}} = -\nabla_{*} \left(\frac{p_{*}'}{\rho_{0}}\right) + g\alpha\theta_{*}'\boldsymbol{k} + \nu\Delta_{*}\boldsymbol{u}_{*}', \tag{39}$$

$$\frac{D\theta_*'}{Dt_*} - \beta w_*' = \kappa \Delta_* \theta_*' \tag{40}$$

を得る.

方程式の線形化

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

擾乱は微小振幅であると考え, 擾乱 (プライム付きの記号) について 二次以上の項 (非線形項) を無視する (「線形化」).

非線形項は移流項 $(u'_*\cdot \nabla)u'_*$ のみなので, 移流項を無視することになる.

$$\nabla_* \cdot \boldsymbol{u}_*' = 0, \tag{41}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_{*}'}{\partial t_{*}} = -\nabla_{*} \left(\frac{p_{*}'}{\rho_{0}} \right) + g\alpha \theta_{*}' \boldsymbol{k} + \nu \Delta_{*} \boldsymbol{u}_{*}', \tag{42}$$

$$\frac{\partial \theta_*'}{\partial t_*} - \beta w_*' = \kappa \Delta_* \theta_*' \tag{43}$$

変数の無次元化

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

方程式を無次元化し、無次元パラメタを用いて表す.まず変数を無次元化する.

次元を見積もると,

- 長さ L = [d],
- 時間 $T = [d^2/\kappa]$,
- 温度 $[\theta_*] = [\beta d] = [\theta_0 \theta_1],$
- $\text{ED}[p_*] = [\rho_0]L^2T^{-2} = [\rho_0]\kappa^2/d^2$

なので,無次元化した変数をアスタリスクなしの記号で表して,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_*/d, \quad t = \kappa t_*/d^2, \quad \boldsymbol{u} = d\boldsymbol{u}_*'/\kappa,$$
 (44)

$$\theta = \theta'_*/(\beta d), \quad p = d^2 p'_*/(\rho_0 \kappa^2).$$
 (45)

方程式の無次元化

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

方程式を無次元化すると,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{46}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\nabla p + RPr\theta \boldsymbol{k} + Pr\Delta \boldsymbol{u},\tag{47}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \Delta \theta \tag{48}$$

となる. ここで, 二つの無次元数, Rayleigh 数 R, Prandtl 数 Pr を

$$R := \frac{g\alpha\beta d^4}{\kappa\nu}, \quad Pr := \frac{\nu}{\kappa} \tag{49}$$

と定義した.

無次元数の意味

はじめに

Boussinesg 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 擾乱の方程式の導出 (1/2)
- 擾乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

$$R := \frac{g\alpha\beta d^4}{\kappa\nu}, \quad Pr := \frac{\nu}{\kappa} \tag{50}$$

• $au_
u := rac{d^2}{\dfrac{\nu}{u}}$ 粘性緩和時間
• $au_\kappa := rac{d^2}{u}$ 熱伝導による緩和時間

• $au_{
m b} := \sqrt{rac{d}{glphaeta d}}$ 浮力による加速時間

加速度 glphaeta d の粒子が距離 d/2 進むのに要する時間

$$R = \frac{\tau_{\nu} \tau_{\kappa}}{\tau_{\rm b}^2}, \quad Pr = \frac{\tau_{\kappa}}{\tau_{\nu}} \tag{51}$$

対流が起こるには $\tau_{\nu} > \tau_{\rm b}$, $\tau_{\kappa} > \tau_{\rm b}$ が必要.

支配方程式の導出

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

運動方程式にローテーションを二回作用させて,

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{u}}{\partial t} = RPr\left(\Delta \theta \boldsymbol{k} - \nabla \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\right) + Pr\Delta^2 \boldsymbol{u}. \tag{52}$$

特にz方向は

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial t} = RPr\Delta_1\theta + Pr\Delta^2w \tag{53}$$

ここで, $\Delta_1 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ とした.

$$\left(\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta w = R\Delta_1\theta, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\theta = w \qquad (54)$$

であるから, θ を消去すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Delta w = R\Delta_1 w. \tag{55}$$

この節のまとめ

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

- 力学的境界条件
- 温度境界条件
- 熱伝導解
- 熱伝導解の模式図
- 優乱の方程式の導出 (1/2)
- 優乱の方程式の導出 (2/2)
- 方程式の線形化
- 変数の無次元化
- 方程式の無次元化
- 無次元数の意味
- 支配方程式の導出
- この節のまとめ

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

Navier-Stokes 方程式の Boussinesq 近似を出発点として示した.

熱伝導解を基本場として擾乱についての方程式を導出した.

- 優乱についての方程式を線形化した.
- 無次元化した.
- Bénard 対流の支配方程式を導出した.
- 無次元数 R, Pr を導入した.

$$\left(\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta w = R\Delta_1\theta, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\theta = w \qquad (56)$$

$$R := \frac{g\alpha\beta d^4}{\kappa\nu}, \quad Pr := \frac{\nu}{\kappa} \tag{57}$$

はじめに Boussinesq 近似 支配方程式の導出 線形論: 序論 ノーマルモード解 (1/2) ノーマルモード解 (2/2) a の意味 ● W, T の境界条件 この節のまとめ 線形論: free-free 線形論:序論 線形論: rigid-rigid 線形論: free-rigid 弱非線形論: free-free まとめ

その他

大気セミナー 20140724 32 / 70

ノーマルモード解 (1/2)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論:序論

- ノーマルモード解 (1/2)
- ノーマルモード解 (2/2)
- a の意味
- W, T の境界条件
- この節のまとめ

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

ノーマルモード解を支配する方程式を導出する. 支配方程式系は x, y について対称なので, $s = \sigma + i\omega$ として,

$$w = W(z)f(x,y)e^{st}, \quad \theta = T(z)f(x,y)e^{st}$$
(58)

と変数分離解を仮定した.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\theta = w \tag{59}$$

は, D := d/dz を用いて,

$$(D^2 + \Delta_1 - s)Tf = -fW \tag{60}$$

と変形できる. この両辺を Tf で割ると,

$$\frac{1}{T}D^2T + \frac{W}{T} - s = -\frac{1}{f}\Delta_1 f =: a^2$$
 (61)

に帰着できる.

ノーマルモード解 (2/2)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

- ノーマルモード解 (1/2)
- ノーマルモード解 (2/2)
- a の意味
- W, T の境界条件
- この節のまとめ

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

従って,

$$\Delta_1 f + a^2 f = 0, (62)$$

$$(D^2 - a^2 - s)T = -W (63)$$

となる.また,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta w = RPr\Delta_1\theta + Pr\Delta^2w,\tag{64}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Delta w = R\Delta_1 w \tag{65}$$

は,

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/Pr)W = a^2RT,$$

$$(D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/Pr)W = -a^2RW.$$
 (66)

a の意味

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

- ノーマルモード解 (1/2)
- ノーマルモード解 (2/2)
- a の意味
- W, T の境界条件
- この節のまとめ

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

a は水平波数である.

f(x,y) の式は

$$\Delta_1 f = -a^2 f \tag{67}$$

であった. f(x,y) は平面波解 $\exp(ikx+ily)$ を仮定すると, 水平ラプラシアン Δ_1 を $-(k^2+l^2)$ と置き換えられるので,

$$a = \sqrt{k^2 + l^2} \tag{68}$$

と書き表せる.

W, T の境界条件

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

- ノーマルモード解 (1/2)
- ノーマルモード解 (2/2)
- a の意味
- W, T の境界条件
- この節のまとめ

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

境界条件は, z = 0, 1 において,

$$W = DW = T = 0, \qquad \text{rigid}, \tag{69}$$

$$W = D^2 W = T = 0,$$
 free. (70)

または

$$W = DW = D^4W - 2a^2D^2W - s/PrD^2W = 0$$
, rigid, (71)

$$W = D^2 W = D^4 W = 0,$$
 free. (72)

この節のまとめ

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

- ノーマルモード解 (1/2)
- ノーマルモード解 (2/2)
- a の意味
- W, T の境界条件
- この節のまとめ

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

ノーマルモード解を支配する方程式を導出した.

- 。 変数分離形を仮定.
- a は水平波数.
- ノーマルモード解は

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/Pr)W = a^2RT, (73)$$

$$(D^2 - a^2 - s)T = -W, (74)$$

または

$$(D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/Pr)W = -a^2RW.$$
 (75)

の解である。

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

- 線形安定性: free-free
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率
- この節のまとめ

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

線形論: free-free

大気セミナー 20140724

線形安定性: free-free

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論:序論

線形論: free-free

- 線形安定性: free-free
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率
- この節のまとめ

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

下端が自由表面であるというのは非現実的であるが, free-free の場合は解析的に取り扱えるために, 歴史的には研究されてきた.

まず支配方程式と境界条件を改めて再掲すると

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2 - s/Pr)W = -a^2RW,$$
 (76)

$$W = D^2 W = D^4 W = 0$$
, at $z = 0, 1$ (77)

である. $W_j=\sin j\pi z$ なる固有関数で展開する (j=1,2,...). 固有値関係式は

$$(j^2\pi^2 + a^2)(j^2\pi^2 + a^2 + s)(j^2\pi^2 + a^2 + s/Pr) = a^2R$$
 (78)

となる. ここでsの2次方程式を解くと,

$$s = -\frac{1}{2}(Pr+1)(j^2\pi^2 + a^2) \pm \left\{ \frac{1}{4}(j^2\pi^2 + a^2)(Pr-1)^2 + \frac{a^2RPr}{j^2\pi^2 + a^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(j = 1, 2, \dots)$$
(79)

中立曲線

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

- 線形安定性: free-free
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率
- この節のまとめ

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

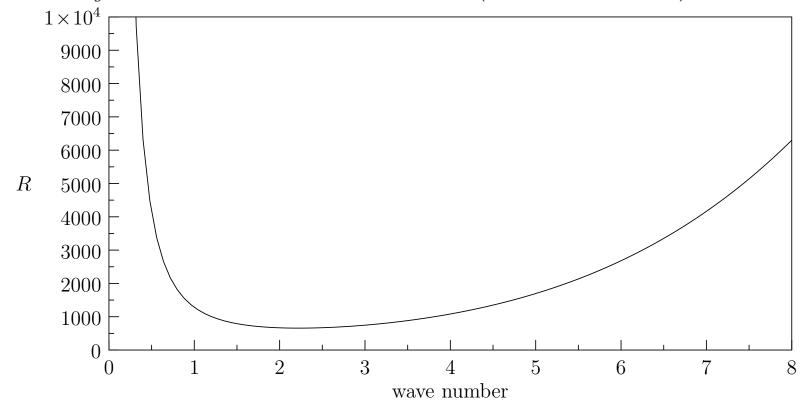
まとめ

その他

中立, つまり s=0 のとき, 固有値関係式より,

$$R_j = \frac{1}{a^2} (j^2 \pi^2 + a^2)^3 \tag{80}$$

これがj番目のモードの中立曲線である(Prに依らない!).



j=1 の中立曲線.

臨界 Rayleigh 数

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

- 線形安定性: free-free
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率
- この節のまとめ

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

ここで, $R_1 < R_2 < \ldots$ のうち $R_1(a^2)$ の最小値を求めると,

$$\frac{dR}{da^2} = \frac{1}{a^4} (2a^2 - \pi^2)(\pi^2 + a^2)^2 = 0 \tag{81}$$

となるので,

$$a_{\rm c} = 2^{-\frac{1}{2}}\pi \approx 2.22144\dots,$$
 (82)

$$R_{\rm c} = \min R_1(a^2) = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 657.511\dots$$
 (83)

成長率

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

- 線形安定性: free-free
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率
- この節のまとめ

線形論: rigid-rigid

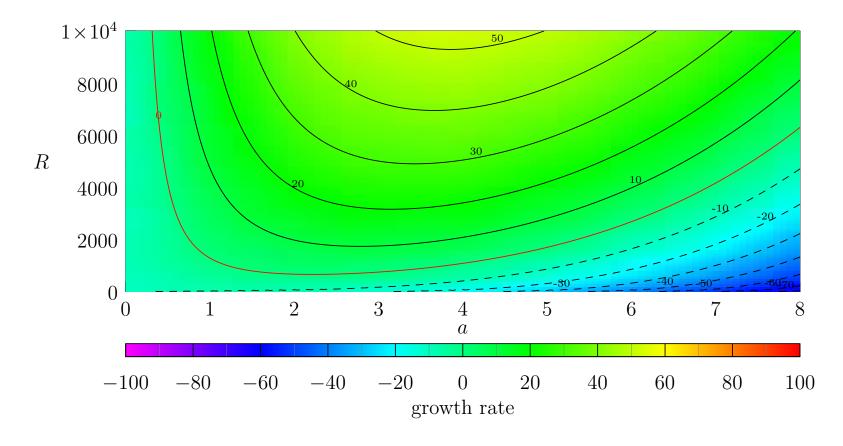
線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

成長率は, 既に (79) 式で解析的に求まっている.



Pr=1 の場合の a-R 平面における擾乱の成長率 (free-free). 黒実線が正の成長率, 赤実線が成長率ゼロ (中立), 黒点線が負の成長率を表す.

この節のまとめ

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

- 線形安定性: free-free
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率
- この節のまとめ

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- free-free(両端応力無し) の場合の臨界波数, 臨界 Rayleigh 数, 成長率などを調べた.
 - 。 下端が応力無し (自由表面であることから導出された) である というのは非現実的である.
 - しかし,解析的に取り扱えるために歴史的には研究されてきた.
- 臨界波数 $a_c = 2^{-\frac{1}{2}}\pi \approx 2.22144...$
- 臨界 Rayleigh 数 $R_{\rm c} = {
 m min} R_1(a^2) = {27\over 4} \pi^4 pprox 657.511 \ldots$
- 成長率は解析的に表示可能.
- 中立曲線は *Pr* に依らない!

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

- 線形安定性: rigid-rigid
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率: 一般化固有值 問題
- 成長率: 離散化
- 成長率: 結果
- この節のまとめ

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

線形論: rigid-rigid

大気セミナー 20140724

線形安定性: rigid-rigid

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

- 線形安定性: rigid-rigid
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率: 一般化固有値問題
- 成長率: 離散化
- 成長率: 結果
- この節のまとめ

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

両端が剛体壁すべりなし条件の場合の線形安定性を考える. 定常すなわち s=0 のとき.

$$(D^2 - a^2)^3 W = -a^2 RW (84)$$

である. 境界条件は,

$$W = DW = D^4W - 2a^2D^2W = 0$$
 at $z = 0, 1$. (85)

ここで $\zeta := z - \frac{1}{2}$ を定義して, $\zeta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ の範囲で考えることにする (対称性をよくするため).

解は even モード (偶関数モード), odd モード (奇関数モード) と呼んで次のように書き表す.

$$W_{\rm e} := \sum_{i=1}^{3} A_i \cosh q_i \zeta, \quad W_{\rm o} := \sum_{i=1}^{3} B_i \sinh q_i \zeta$$
 (86)

ここで q_i は $(q^2 - a^2)^3 = -a^2 R$ の解.

中立曲線

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

- 線形安定性: rigid-rigid
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率: 一般化固有値 問題
- 成長率: 離散化
- 成長率: 結果
- この節のまとめ

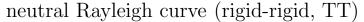
線形論: free-rigid

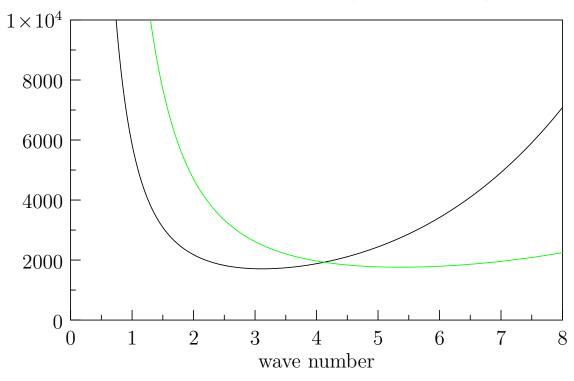
弱非線形論: free-free

まとめ

その他

水平波数 a を与えて,中立曲線を Newton-Raphson 法で求めた (詳細は割愛).





R (even) 0.1R (odd)

臨界 Rayleigh 数

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

- 線形安定性: rigid-rigid
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率: 一般化固有値 問題
- 成長率: 離散化
- 成長率: 結果
- この節のまとめ

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

ここで even モードの臨界波数 a_c , 臨界 Rayleigh 数 R_c は

$$a_{\rm c} \approx 3.1163\dots,\tag{87}$$

$$R_{\rm c} \approx 1707.762\dots$$
 (88)

である3.

odd モードの臨界波数 a_c , 臨界 Rayleigh 数 R_c は,

$$a_{\rm c} \approx 5.365\dots,$$
 (89)

$$R_{\rm c} \approx 17610.39\dots$$
 (90)

である4.

even モードの方が odd モードより臨界 Rayleigh 数が桁で小さい.

³ 文献値は $a_c \approx 3.117$, $R_c \approx 1707.762$ (Reid and Harris, 1958).

 $^{^4}$ 文献値は $a_{\rm C} \approx 5.365$, $R_{\rm C} \approx 17610.39$ (Reid and Harris, 1958).

成長率:一般化固有值問題

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

- 線形安定性: rigid-rigid
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率: 一般化固有値問題
- 成長率: 離散化
- 成長率: 結果
- この節のまとめ

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

中立曲線が求まったので、次に a-R 平面での擾乱の成長率を求める. 支配方程式を行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} Pr(D^2 - a^2)^2 & -a^2RPr \\ 1 & D^2 - a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} D^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}$$
(91)

である. これは固有値 s, 固有関数 $(W,T)^{\mathrm{T}}$ を求める一般化固有値問題である.

一般化固有値問題とは:

$$Ax = \lambda Bx \tag{92}$$

のような形をした固有値問題 (固有値 λ , 右固有ベクトル x を求める問題) のこと.

成長率:離散化

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

- 線形安定性: rigid-rigid
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率: 一般化固有値問題
- 成長率: 離散化
- 成長率: 結果
- この節のまとめ

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

一般化固有値問題を数値的に解くことを考える. $0 \le z \le 1$ を N 等分して N+1 点に分ける. このとき離散点は z_j , $0 \le j \le N$ となる. ここで $\Delta z = 1/N$ である. $W(z_j)$ を W_j などと表すことにする. $(D^2W)_i$, $(D^4W)_i$ はそれぞれ 2 次精度有限差分で

$$(D^2W)_j = \frac{W_{j+1} - 2W_j + W_{j-1}}{\Delta z^2}$$
(93)

$$(D^4W)_j = \frac{W_{j+2} - 4W_{j+1} + 6W_j - 4W_{j-1} + W_{j-2}}{\Delta z^4}$$
 (94)

とかける. 境界条件をやはり2次精度有限差分で離散化すると,

$$\frac{W_{-1} - W_1}{2\Delta z} = 0, \quad \frac{W_{N+1} - W_{N-1}}{2\Delta z} = 0, \tag{95}$$

他の境界条件とまとめると、

$$W_0 = 0, \quad W_N = 0,$$
 (96)

$$W_{-1} = W_1, \quad W_{N+1} = W_{N-1}, \tag{97}$$

$$T_0 = 0, \quad T_N = 0.$$
 (98)

成長率: 結果

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

- 線形安定性: rigid-rigid
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率: 一般化固有値問題
- 成長率: 離散化
- 成長率: 結果
- この節のまとめ

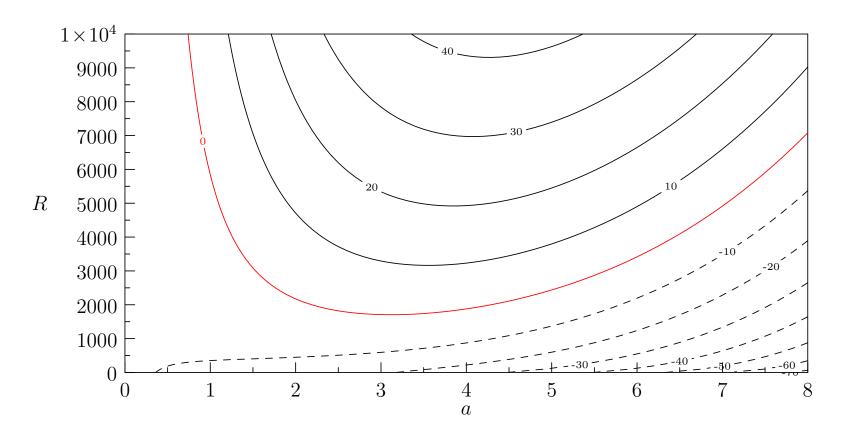
線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

一般化固有値問題を LAPACK の zgegv サブルーチンで解いた結果.



Pr=1 の場合の a-R 平面における擾乱の成長率 (rigid-rigid). 2 次精度有限差分で離散化して固有値問題を数値的に解いて求めた. 黒実線が正の成長率, 赤実線が成長率ゼロ (中立), 黒点線が負の成長率を表す.

この節のまとめ

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

- 線形安定性: rigid-rigid
- 中立曲線
- 臨界 Rayleigh 数
- 成長率: 一般化固有値 問題
- 成長率: 離散化
- 成長率: 結果
- この節のまとめ

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- rigid-rigid(両端すべりなし) 条件の臨界波数, 臨界 Rayleigh 数, 中立 曲線, 成長率などを求めた.
- even モード (偶関数モード) と odd モード (奇関数モード) の二つ が現れる.
 - o even モード
 - 臨界波数 $a_c \approx 3.1163....$
 - 臨界 Rayleigh 数 $R_{\rm c} \approx 1707.762...$
 - o odd モード
 - 臨界波数 $a_c \approx 5.365...$
 - 臨界 Rayleigh 数 $R_{\rm c} \approx 17610.39...$
- even モードの方が odd モードよりも臨界 Rayleigh 数が小さい.

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

- 線形論: free-rigid
- 成長率
- この節のまとめ

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

線形論: free-rigid

大気セミナー 20140724

線形論: free-rigid

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論:序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

- 線形論: free-rigid
- 成長率
- この節のまとめ

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

上端が free, 下端が rigid の場合を考える.

rigid-rigid の場合の odd モードの臨界 Rayleigh 数を用いて求めることができる.

対称性より, $z \in [0,2]$ の rigid-rigid の場合の反対称モードが臨界モード/臨界 Rayleigh 数を与える.

どういうことかというと、下端で rigid, 中間で奇関数を与える条件

$$W = D^2 W = D^4 W = 0,$$
 at $z = 1$ (99)

を満たすべきだからである 5 . 高さは 1/2 倍され, $a \propto d$, $R \propto d^4$ であることから, 臨界波数 $a_{\rm c}$, 臨界 Rayleigh 数 $R_{\rm c}$ は

$$a_{\rm c} \approx 5.365 \dots / 2 \approx 2.6825 \dots,$$
 (100)

$$R_{\rm c} \approx 17610.39.../2^4 \approx 1100.649...$$
 (101)

である.

⁵よくわからない.

成長率

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

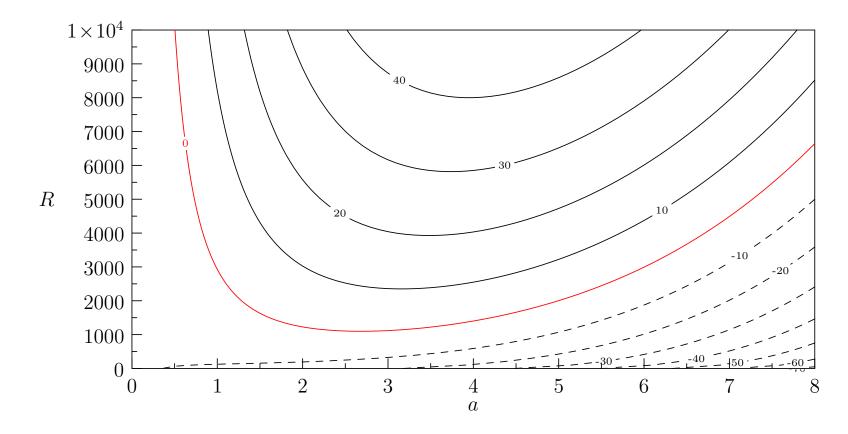
- 線形論: free-rigid
- 成長率
- この節のまとめ

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

一般化固有値問題を LAPACK の zgegv サブルーチンで解いた結果.



Pr = 1 の場合の a - R 平面における擾乱の成長率 (free-rigid). 2 次精度有限差分で離散化して固有値問題を数値的に解いて求めた. 黒実線が正の成長率, 赤実線が成長率ゼロ (中立), 黒点線が負の成長率を表す.

この節のまとめ

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

- 線形論: free-rigid
- 成長率
- この節のまとめ

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- free-rigid(上端応力無し,下端すべりなし) 条件での臨界波数, 臨界 Rayleigh 数, 成長率などを求めた.
- rigid-rigid の場合の odd モードの結果を援用して求めることができる⁶.
- 臨界波数 $a_c \approx 2.6825...$
- 臨界 Rayleigh 数 $R_{\rm c} \approx 1100.649...$

⁶よくわからなかった.

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 数値計算結果: 温度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 数値計算結果: 渦度場
 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他

弱非線形論: free-free

大気セミナー 20140724

56 / 70

弱非線形論の問題設定

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 数値計算結果: 温度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 数値計算結果: 渦度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他

- 2次元ロール状対流の線形中立解 (y に依存しない解) を考える.
- Rayleigh 数が臨界 Rayleigh 数より少し大きいときに定常解が存在するか?
- 非線形解は定常解に近いものだと想像されるが, 具体的にどんな ものか?
- 定常解が存在するとしたら振幅はどうなるか?を調べる.
 - 。 線形解の振幅は不定である.

振幅展開

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 数値計算結果: 温度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 数値計算結果: 渦度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他

弱非線形解析のうち、振幅展開を用いる.基本場を熱伝導解とする.

$$\boldsymbol{u} = \varepsilon \boldsymbol{u}' + \varepsilon^2 \boldsymbol{u}^{(2)} + \varepsilon^3 \boldsymbol{u}^{(3)} + \cdots, \tag{102}$$

$$\theta = -z + \theta_0 + \varepsilon \theta' + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \varepsilon^3 \theta^{(3)} + \cdots, \tag{103}$$

$$p = PrR\left(-\frac{1}{2}z^2 + z\theta_0\right) + p_0 + \varepsilon p' + \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)} + \cdots,$$

(104)

$$R = R^{(0)} + \varepsilon R^{(1)} + \varepsilon^2 R^{(2)} + \varepsilon^3 R^{(3)} + \cdots$$
 (105)

これを基礎方程式に代入し、それぞれ O(1), $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon^3)$, . . . の項でまとめ、各々のオーダーでの式を導く.

境界条件は線形なので,各々のオーダーで同じ形の境界条件が成り 立つとすればよい.

各オーダーの満たす方程式

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方 程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 数値計算結果: 温度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 数値計算結果: 渦度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他

 $O(\varepsilon)$ の式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p' + PrR^{(0)}\theta'\mathbf{k} + Pr\Delta\mathbf{u}',\tag{106}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \tag{107}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} - w' = \Delta \theta' \tag{108}$$

となり、線形方程式と同じ形になる. $O(\varepsilon^2)$ の式は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}^{(2)}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}' \cdot \nabla)\boldsymbol{u}' = -\nabla p^{(2)} + (PrR^{(0)}\theta^{(2)} + PrR^{(1)}\theta')\boldsymbol{k} + Pr\Delta \boldsymbol{u}^{(2)},$$
(109)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{(2)} = 0, \tag{110}$$

$$\frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}' \cdot \nabla)\theta' - w^{(2)} = \Delta \theta^{(2)}. \tag{111}$$

以下,同様なので略.

弱非線形解

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 數值計算結果: 温度場
 (R = 2000, Pr = 1)
- 数値計算結果: 渦度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他

いくらかの計算を経て, 2 次元ロール状対流について, 上下端応力なし条件 (free-free) で, ε^3 までの精度で弱非線形解は以下のようになる.

$$\psi = \varepsilon \psi' + \varepsilon^3 \psi^{(3)}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2} \sqrt{R - R_c} \sin \pi z \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x + \frac{(R - R_c)^{\frac{3}{2}}}{5124\pi^2} \sin 3\pi z \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} x$$
(112)

 ψ の主要項の振幅が $\sqrt{R-R_{\rm c}}$ に比例することに注意.

これを spmodel による非線形数値計算によって検証してみる.

非線形数値計算の設定

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 数値計算結果: 温度場 (R = 2000, Pr = 1)
- ●数値計算結果: 渦度場(R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他

物理的条件

- 上下端応力なし (free-free)
- 計算領域
 - $x \in [0, 2\pi/a_{\rm c}], z \in [0, 1] (a_{\rm c} = \pi/\sqrt{2})$

計算諸元

- spmodel esc_module 使用
 - 。 x 方向には Fourier 級数展開
 - 。 z 方向には Fourier sine 級数展開
- spmodel ギャラリーのコード bsncnv-tt-3.f90 を改変.
- x 方向格子点数: 96; x 方向切断波数: 32
- z 方向格子点数: 32; z 方向切断波数: 21
- 時間積分: 前進 Euler 法
- 時間刻み: $\Delta t = 10^{-4}$
- 初期値として大きさ 0.01 の温度擾乱を中央格子点に与え, 定常 状態になるまで時間発展数値計算した.

数值計算結果: 温度場 (R = 2000, Pr = 1)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

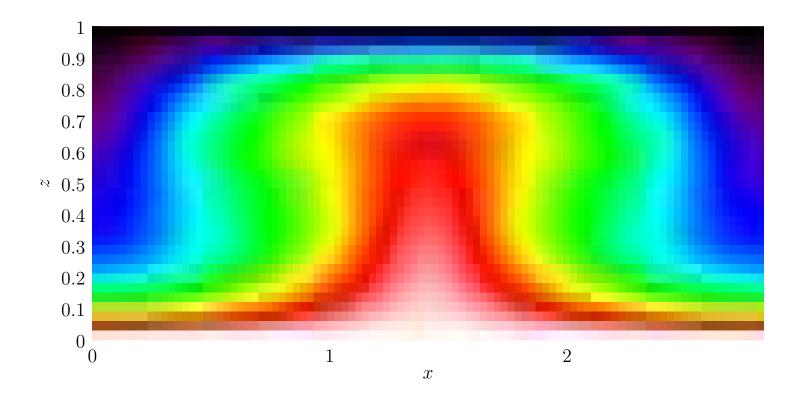
線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 數值計算結果: 温度場(R = 2000, Pr = 1)
- 数値計算結果: 渦度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他



定常状態の温度場. 白/赤色が高温, 黒/青色が低温を表す.

中心で上昇流,側面境界付近で下降流になっている.

数值計算結果: 渦度場 (R = 2000, Pr = 1)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

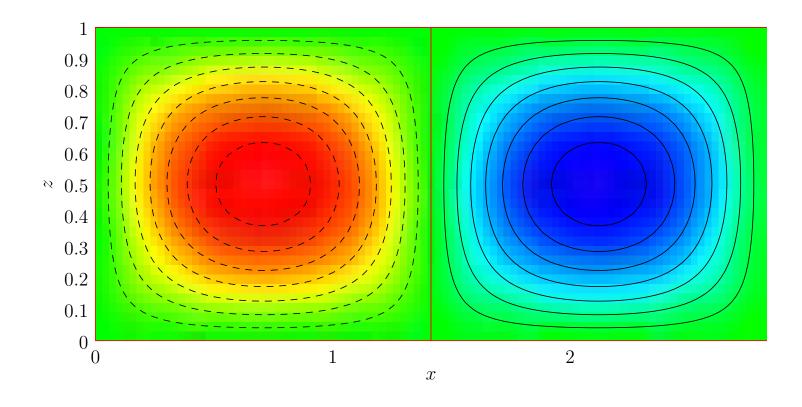
線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 数値計算結果: 温度場 (R=2000, Pr=1)
- 數值計算結果: 渦度場
 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他



トーンは渦度場, コンターは流れ関数場を表す. 赤色が正の渦度, 青色が負の渦度.

中心で上昇流,側面境界付近で下降流になっている.

弱非線形解と非線形数値計算との比較 (1/2)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

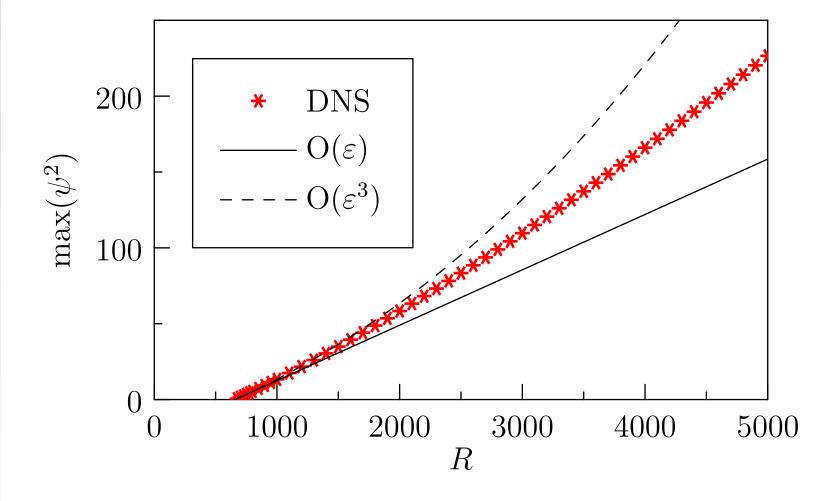
線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 數值計算結果: 温度場
 (R = 2000, Pr = 1)
- 数値計算結果: 渦度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他



Pr=1 の場合. 横軸に R, 縦軸に流れ関数 ψ の振幅の自乗をプロットした. 特に臨界 Rayleigh 数付近で弱非線形計算による見積りが数値計算で得られた定常状態をよく記述していることが分かる.

弱非線形解と非線形数値計算との比較(2/2)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

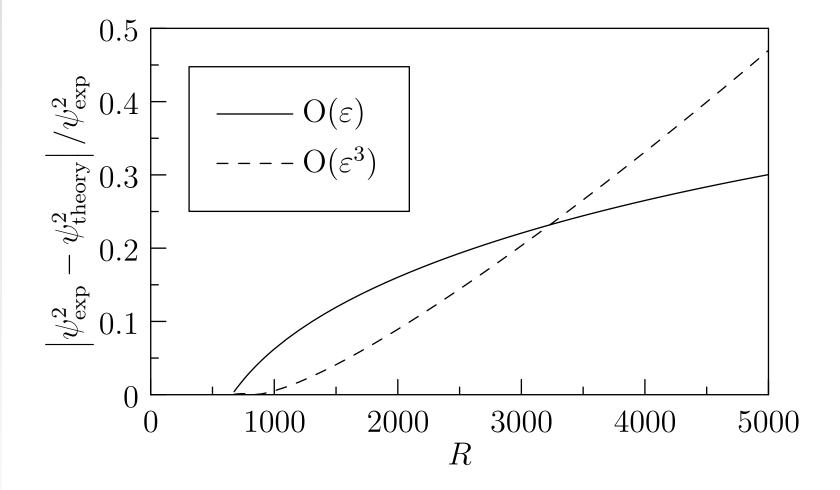
線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 數值計算結果: 温度場
 (R = 2000, Pr = 1)
- 數值計算結果: 渦度場(R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他



Pr=1 の場合. 横軸に R, 縦軸に流れ関数 ψ の振幅の自乗誤差をプロットした.

この節のまとめ

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

- 弱非線形論の問題設定
- 振幅展開
- 各オーダーの満たす方程式
- 弱非線形解
- 非線形数値計算の設定
- 數值計算結果: 温度場
 (R = 2000, Pr = 1)
- 数値計算結果: 渦度場 (R = 2000, Pr = 1)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (1/2)
- 弱非線形解と非線形数 値計算との比較 (2/2)
- この節のまとめ

まとめ

その他

- 振幅展開を解説した.
- 上下端応力なし条件での弱非線形解を紹介した.
- spmodel を用いて非線形数値計算を行った.
- 特に臨界 Rayleigh 数付近で, 弱非線形解は非線形数値計算の結果 をよく説明した.

大気セミナー 20140724

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

- ・まとめ
- さらなる展開
- 参考文献

その他

まとめ

まとめ

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

- まとめ
- さらなる展開
- 参考文献

その他

- Bénard 対流の主に線形論をレビューした.
 - 。 温度固定境界条件
 - 。 力学的境界条件: 上下端応力なし, 上下端 rigid, 上端応力なし 下端 rigid.
 - 中立曲線, 成長率, 臨界波数, 臨界 Rayleigh 数を求めた.
 - どの境界条件でも、中立曲線の形はよく似ていた.
- 弱非線形解と数値計算結果を比較した.
 - 臨界 Rayleigh 数付近で, 弱非線形解の流れ関数の振幅は数値 計算結果とよく一致した.
- 以下は「地球流体理論マニュアル」を参照のこと.
 - 。 熱フラックス固定境界条件の場合
 - *a R* 平面における成長率の物理的解釈

さらなる展開

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

- ・まとめ
- さらなる展開
- 参考文献

その他

- 弱非線形解析, セルパターン (planform) の選択.
 - 高次の弱非線形解を求め, 非線形数値計算と比較.
 - 計算してみているが、高次の振幅が決まらない...
- 有限振幅/非線形方程式の直接数値計算.
- 回転系での熱対流.
 - 回転球殼熱対流.
- Bénard 対流以外の「対流」.
 - 。 水平対流.
 - 大気中の鉛直熱対流 (open cell vs closed cell, 縦横比の違い, etc.).
 - 雲対流 (中島, 他: 1998, ながれマルチメディア).
 - http://www2.nagare.or.jp/mm/98/nakajima/index_ja.htm
 - 。 二重拡散対流.
 - youtube: Double Diffusion Experiment

参考文献

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

- ・まとめ
- さらなる展開
- 参考文献

その他

- Drazin, P. G. and Reid, W. H., 2004: Hydrodynamic Stability Second Edition, Cambridge Univ. Press.
- Chandrasekhar, S., 1961: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability,
 Dover.
- Pellew, A. and Southwell, R. V. F.R.S., 1940: On maintained convective motion in a fluid heated from below, *Proc. R. Soc. London*, **A176**, pp. 312 343.
- Reid, W. H. and Harris, D. L., 1958: Some further results on the Benard Problem, *Phys. Fluids*, 1, pp. 102 – 110.
- 地球流体電脳倶楽部理論グループ, 1993?: 地球流体理論マニュアル基礎理論参照編 平板間のブシネスク流体の対流.
- Getling, A. V., 2012: Rayleigh-Bénard convection, Scholarpedia, 7(7):7702.

http://www.scholarpedia.org/article/Rayleigh-B%C3%A9nard_convection

● 竹広 真一, 佐々木 洋平, 石岡 圭一, 小高 正嗣, 高橋 芳幸, 中島 健介, 石渡 正樹, 林 祥介, spmodel 開発グループ, 2013: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/, 地球流体電脳倶楽部.

おしまい

14	10	W	1-
は	しょ	W	hر

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

- ・まとめ
- すらなる展開
- 参考文献

その他

大気セミナー 20140724 71 / 70

線形安定性: rigid-rigid

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

解は even モード, odd モードと呼んで次のように書き表す.

$$W_{\rm e} := \sum_{i=1}^{3} A_i \cosh q_i \zeta, \quad W_{\rm o} := \sum_{i=1}^{3} B_i \sinh q_i \zeta$$
 (113)

ここで q_i は $(q^2 - a^2) = -a^2 R$ の解. また,

$$a^6 \lambda^3 := a^2 R \tag{114}$$

として特性指数 λ を定義する.従って、記号的に 7

$$D^{2} = a^{2}(1 - \lambda(\omega_{1}, \omega_{2}, \omega_{3})), \tag{115}$$

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 = 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$
 (116)

と表せる.

 $^{^{7}}$ ここで ω_{i} は渦度ではなく 1 の三乗根.

q_i の具体的な値

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

$$q_1 = ia(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}},\tag{117}$$

$$q_2 = a(A - iB), \tag{118}$$

$$q_3 = a(A + iB). (119)$$

ここで,

$$2A^2 := \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right),\tag{120}$$

$$2B^2 := \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right). \tag{121}$$

中立曲線の決定 (1/3)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

境界 $\zeta = \frac{1}{2}$ での $W_{\rm e}$ に関する条件から,

$$\begin{pmatrix} \cosh \frac{q_1}{2} & \cosh \frac{q_2}{2} & \cosh \frac{q_3}{2} \\ \frac{q_1}{2} \sinh \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \sinh \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \sinh \frac{q_3}{2} \\ \omega_1^2 \cosh \frac{q_1}{2} & \omega_2^2 \cosh \frac{q_2}{2} & \omega_3^2 \cosh \frac{q_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$
 (122)

となる. A_i がゼロでない場合,係数行列のデターミナントがゼロになるので、

$$\begin{vmatrix} \cosh \frac{q_1}{2} & \cosh \frac{q_2}{2} & \cosh \frac{q_3}{2} \\ \frac{q_1}{2} \sinh \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \sinh \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \sinh \frac{q_3}{2} \\ \omega_1^2 \cosh \frac{q_1}{2} & \omega_2^2 \cosh \frac{q_2}{2} & \omega_3^2 \cosh \frac{q_3}{2} \end{vmatrix} = 0$$
 (123)

が成り立つ.

中立曲線の決定 (2/3)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
\frac{q_1}{2} \tanh \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} \tanh \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \tanh \frac{q_3}{2} \\
0 & \sqrt{3} + i & \sqrt{3} - i
\end{vmatrix} = 0$$
(124)

ここまで簡単化すると計算は容易で,

$$iq_1 \tanh \frac{q_1}{2} + (\sqrt{3} - i)\frac{q_2}{2} \tanh \frac{q_2}{2} - (\sqrt{3} + i)\frac{q_3}{2} \tanh \frac{q_3}{2} = 0$$
 (125)

から, q_i を代入して整理すると,

$$-\sqrt{\lambda - 1} \tan \frac{a}{2} \sqrt{\lambda - 1} = \frac{(A + \sqrt{3}B) \sinh aA + (\sqrt{3}A - B) \sin aB}{\cosh aA + \cos aB}$$
(126)

となる.

中立曲線の決定 (3/3)

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

これらは数値的に解くより他ない. Newton-Raphson 法で解くために, 関数 $g_{e}(\lambda)$ を定義する:

$$g_{e}(\lambda) := -\sqrt{\lambda - 1} \tan \frac{a}{2} \sqrt{\lambda - 1} (\cosh aA + \cos aB) - \{ (A + \sqrt{3}B) \sinh aA + (\sqrt{3}A - B) \sin aB \},$$
 (127)
(128)

ここで, Newton-Raphson 法を用いるときには $g'_{e}(\lambda)$ が必要になる. 解析的に微分を求めるのが自然なように思われるが, 実は解析的に求めると収束性が悪いどころか, 収束しない場合すらある. ここでは差分によって微分値を見積もるのがよい.

微分値を求める: 2 次精度中央差分

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

一般に、関数 f'(x) を 2 次精度の中央差分によって幅 Δx で差分化すると、

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O\left((\Delta x)^2\right)$$
 (129)

となる.

Newton-Raphson 法

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

Newton-Raphson 法では,

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \tag{130}$$

によってi番目の近似値 x_i を求める. 初期値 x_0 は適当に与える(与える初期値によって収束値は変わりうる).

図を入れられると良い.

中立曲線

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

水平波数 a を与えて, Newton-Raphson 法で求めた λ を R に直したものを図 1 に示す. ここで, Newton-Raphson 法の収束判定基準は $|g_{\rm e}|<10^{-8}, |g_{\rm o}|<10^{-8}$ とした.

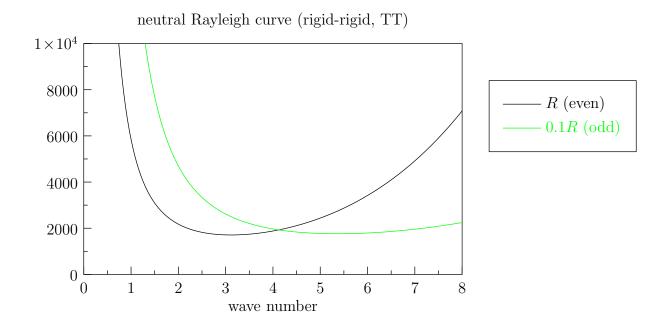


Figure 1: 中立曲線 (rigid-rigid, TT). Newton-Raphson 法で求めた.

大気セミナー 20140724

臨界モードの係数

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free

 $C_1 = A_2 + A_3, C_2 = \frac{1}{i}(A_2 - A_3),$ より,

$$C_1 = -\cos\frac{a}{2}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\cosh\frac{a}{2}A\cosh\frac{a}{2}B - \sqrt{3}\sinh\frac{a}{2}A\sin\frac{a}{2}B}{\cosh^2\frac{a}{2}A\cos^2\frac{a}{2}B + \sinh^2\frac{a}{2}A\sin^2\frac{a}{2}B},$$
(131)

$$C_2 = -\cos\frac{a}{2}(\lambda - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{-\sinh\frac{a}{2}A\sin\frac{a}{2}B - \sqrt{3}\cosh\frac{a}{2}A\cos\frac{a}{2}B}{\cosh^2\frac{a}{2}A\cos^2\frac{a}{2}B + \sinh^2\frac{a}{2}A\sin^2\frac{a}{2}B}$$
(132)

と求まる. 臨界モードのときの a, λ , A, B の値を代入すると 8 ,

$$C_1 = 0.120747484545044, (133)$$

$$C_2 = 0.001343552761111146.$$
 (134)

⁸ Reid and Harris (1958) の文献値は $C_1=-0.06151664$, $C_2=+0.10388700$ である. 一部符号を間違えると文献値に近い値が出るので, 原論文のミスではないかと疑われる (あるいは筆者のミスか).

弱非線形解と非線形数値計算との比較

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

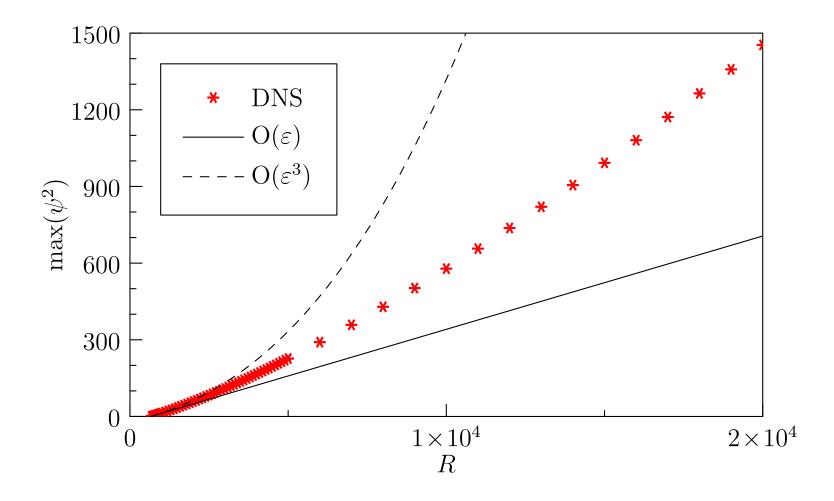
弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- 動非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free



Pr = 1 の場合. 横軸に R, 縦軸に流れ関数 ψ の振幅の自乗をプロットした. 特に臨界 Rayleigh 数付近で弱非線形計算による見積りが数値計算で得られた定常状態をよく記述していることが分かる.

大気セミナー 20140724 81 / 70

回転系の中立曲線: free-free

はじめに

Boussinesq 近似

支配方程式の導出

線形論: 序論

線形論: free-free

線形論: rigid-rigid

線形論: free-rigid

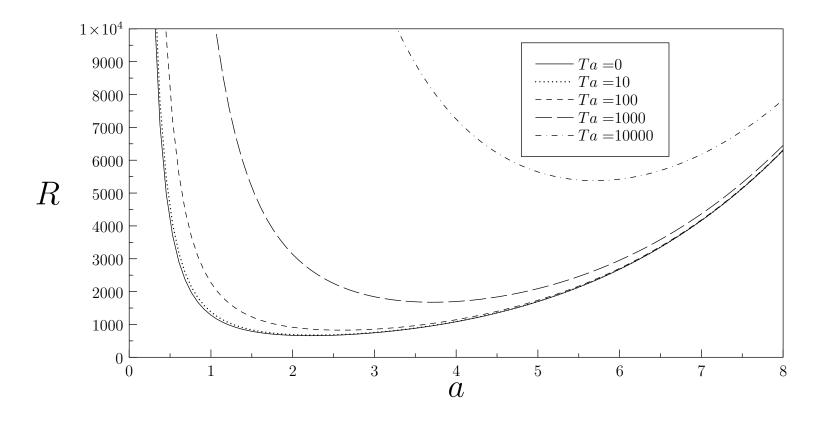
弱非線形論: free-free

まとめ

その他

- 線形安定性: rigid-rigid
- ullet q_i の具体的な値
- 中立曲線の決定 (1/3)
- 中立曲線の決定 (2/3)
- 中立曲線の決定 (3/3)
- 微分値を求める: 2 次精 度中央差分
- Newton-Raphson 法
- 中立曲線
- 臨界モードの係数
- ・弱非線形解と非線形数 値計算との比較
- 回転系の中立曲線:

free-free



非回転系の場合と同様に, Pr にはよらない. Ta(Taylor 数) が大きくなると不安定が抑制される (臨界 Rayleigh 数が大きくなる).

大気セミナー 20140724 82 / 70