

Korteweg-de Vries 方程式のソリトン解  
に関する考察

高橋 由実子  
神戸大学 理学部 地球惑星科学科

2011年03月29日

## 要旨

非線形方程式の解の一つとして、ソリトンという波が存在する。ソリトンは流体现象をはじめ、さまざまな物理現象の中に存在することが知られている。したがってソリトンを理解することは、広範囲の物理現象の理解に反映されるだろう。本論文では、そのソリトン解をもつ 代表的な方程式、Korteweg-de Vries 方程式を解析と数値計算の両面から考察することによって、代表的なソリトンの性質を確認する。

# 目次

第1章 序論	3
1.1 ソリトンと K-dV 方程式	3
1.2 本論文の構成	4
第2章 K-dV 方程式の各項の性質	5
2.1 非線形項の効果	5
2.2 分散項の効果	8
2.3 非線形項と分散項からの K-dV 方程式の考察	11
2.4 1 ソリトン解	13
第3章 2 ソリトン解	15
3.1 2 ソリトン解の導出	15
3.2 2 ソリトン解の解析的考察	17
3.3 K-dV 方程式の保存量	20
3.4 2 ソリトン解の数値計算	21
第4章 まとめ	25

謝辞	26
参考文献	27

# 第1章 序論

## 1.1 ソリトンと K-dV 方程式

ソリトンとは非線形方程式の解として現れる孤立波の一つである。孤立波とは、空間中に山もしくは谷がひとつだけのパルス波である。ソリトンの特徴的な性質は、複数のソリトンが衝突の前後でその個性を保つことである。この性質は粒子的性質と呼ばれ、この性質をもつことが、孤立波 (solitary wave) に粒子を意味する *-on* をつけたソリトンの名前の由来である。

ソリトンは広範囲の自然科学分野にあらわれる。それゆえに、ソリトンの物理を理解することは、広範囲の自然現象に対しての理解を深めることになるだろう。

本研究で取り上げる Korteweg-de Vries 方程式 (以下, K-dV 方程式と略す) は、1895 年に D. J. Korteweg と G. de Vries によって導かれた、浅水系の表面を伝わる波に対する方程式であり、浅水系の流体以外にもさまざまな物理現象の支配方程式として現れる。K-dV 方程式は以下のような形で書くことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1.1.1)$$

ここで  $x$  は位置,  $t$  は時間,  $u$  は水面の変位を表す。1965 年に, N. J. Zabusky と M. D. Kruskal が数値計算を用いて K-dV 方程式を解き<sup>\*1</sup>, ソリトンを発見した。そのため, K-dV 方程式はソリトン解をもつ方程式の中でも代表的なものとして知られている。

本研究ではソリトンを理解する第一歩として、この K-dV 方程式を取り上げる。

<sup>\*1</sup>Zabusky and Kruskal (1965) で実際に取り扱われた K-dV 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

であるが、この方程式と (1.1.1) は変数変換によって一致し、本質的には同じである。

## 1.2 本論文の構成

以下に続く章についての構成を簡単に述べる. 第 2 章では, まず K-dV 方程式そのものは解かずに, K-dV 方程式を構成する各項の効果を解析解と数値計算から考察し, K-dV 方程式で孤立波解があらわれる仕組みを定性的に議論する. その後, 実際に方程式を解いて 1 ソリトン解を導出し, 孤立波解の存在を確認する. 次に第 3 章では, K-dV 方程式から 2 ソリトン解を導出しその定性的な議論を行う. その後, K-dV 方程式の保存量をふまえ, より解析解に近い数値計算の方法を考察し, その方法を用いた数値計算の結果について考察する. 最後に第 4 章でまとめを行う.

## 第2章 K-dV 方程式の各項の性質

### 2.1 非線形項の効果

本研究で考える K-dV 方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1.1)$$

とする.

この節では左辺第二項目の効果について考える. 物理量の時間変化  $\partial u / \partial t$  への非線形項からの寄与を考えるために, K-dV 方程式 (2.1.1) の左辺第三項をゼロとした方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1.2)$$

を考える<sup>\*1</sup>.

まず, (2.1.2) を解析的に解く. 一般的に移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad c = \text{const.}$$

は形を変えずに伝播する波,

$$u = g(x - ct)$$

を解として持つことが知られている. ここで  $g$  は  $x - ct$  の任意の関数である. (2.1.2) は移流方程式の二項目に  $u$  が掛った形となっているので, 移流方程式の解を踏まえ, (2.1.2) の解を

$$\begin{aligned} u &= f(\eta) \\ \eta &= x + 6ut \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

<sup>\*1</sup>(2.1.2) は非粘性 Burgers 方程式と呼ばれる

と推定する. これを (2.1.2) に代入すれば,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 6t \left( \frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} \right) f' = 0 \quad (2.1.4)$$

と書ける. ここで,

$$f' = \frac{du}{d\eta}$$

である. (2.1.4) より, (2.1.3) は (2.1.2) の解である. したがって (2.1.3) がどのような振る舞いをするかを見れば, K-dV 方程式における非線形項の効果を定性的に考えることができる.

(2.1.2) の解 (2.1.3) について考える.  $\eta = x + 6ut$  より, この解の位相速度は  $-6u$  である. つまり, 線型方程式とは異なり, 振幅の大きいほど位相速度が大きくなる. 変位  $u$  によって位相速度が異なるので, 最初に与えた波の波形は時間とともに変形していくことが予想される.

次に (2.1.2) の解の振る舞いを, 数値計算によって確かめ, より直感的に理解する.

数値計算の概要は以下のとおりである. 支配方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1.2)$$

とし, 境界条件は周期境界とした. 計算領域は 3.0 とし, 格子点数は 128, 時間刻み幅は  $1.0 \times 10^{-5}$  である. 空間方向には中央差分を用いて近似し, 時間積分はリープフロッグ法を用いて, 32 ステップ行った<sup>\*2</sup>.  $u$  が正の場合と負の場合の両方の変化を見るために, 初期波形には領域で振幅 100.0, 2 周期分の正弦波を与えた.

数値計算の結果を図 2.1.1 に示す. (2.1.2) の解析解

$$u = f(x + 6ut)$$

と比較する. まず, 波が進む方向については, 図 2.1.1 では振幅が正のとき負の方向に, 負のとき正の方向に進んでおり, 解析解と一致している. 次に速度について見ると, 図 2.1.1 では, 変位の大きいところほど速く進んでいるため, 時間が経過するにつれ傾きが大きくなっている. つまり変位の傾きが正の部分ではより傾きが急になっていき, 逆に傾きが負の部分では傾きは緩やかになっていく.

以上より, 非線形項によって波は振幅の大きなところほど速く進むという特徴を数値計算結果でも確認でき, 与えた波形が時間とともに変化することを直観的に理解することができた.

<sup>\*2</sup>これ以降の積分は変位  $u$  の傾きが空間軸に対して垂直以上となり, 計算は壊れる.



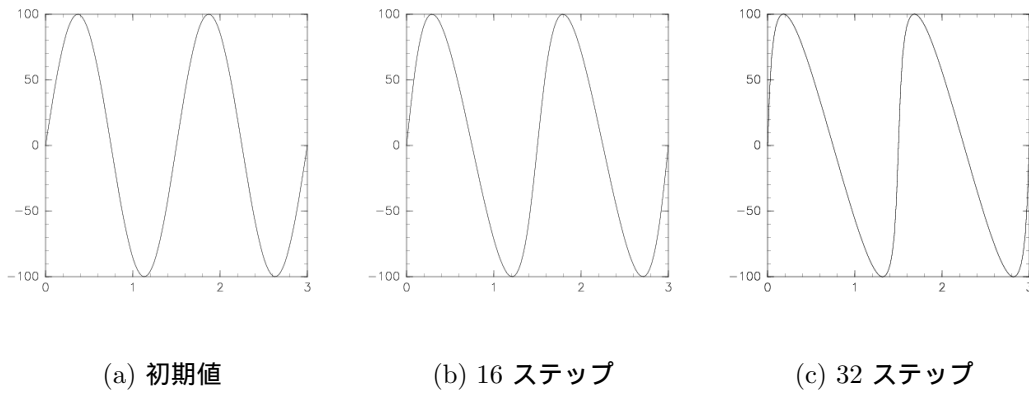


図 2.1.1: (2.1.2) の数値計算結果. 横軸が  $x$ , 縦軸が  $u$  を表す.

## 2.2 分散項の効果

次に K-dV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1.1)$$

の左辺第三項の効果を考える. そのために (2.1.1) の非線形項をゼロとした方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.2.1)$$

について, 解を導出する.

まず, (2.2.1) を解析的に解く. 初期条件として  $t = 0$  で  $u = \phi(x)$  とおく.  $\phi(x)$  は周期  $2l$  の周期関数とする.  $\phi(x)$  を周期  $2l/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) の三角関数で展開すれば,

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.2.2)$$

とかける.  $\alpha_n, \beta_n$  はフーリエ係数である. 波数  $k_n$  を  $k_n = n\pi/l$  とおくと, (2.2.2) は

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos k_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin k_n x \quad (2.2.3)$$

とかける.  $n$  番目の波の振動数を  $\omega_n$  とし, その波の変位  $u_n$  を  $u_n \propto \exp(ik_n x - \omega_n t)$  とおくと, (2.2.1) から,  $n$  番目の波の振動数は

$$\omega_n = -k_n^3 \quad (2.2.4)$$

である.  $t > 0$  では位相  $k_n x - \omega_n t$  に従って変化するので,  $t > 0$  における (2.2.1) の解は

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(k_n x - \omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(k_n x - \omega_n t), \quad n \geq 1 \quad (2.2.5)$$

で与えられる. フーリエ係数は

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi(x) dx, \\ \alpha_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos k_n x dx, \quad n \geq 1 \\ \beta_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin k_n x dx, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

である。

(2.2.5) より, (2.2.1) の解はさまざまな波数をもつ波の重ね合わせで表されることがわかる。一方, 分散式 (2.2.4) より, 両辺を  $k_n$  で微分すれば, 群速度  $v_{gn}$  は

$$v_{gn} = -3k_n^2 \quad (2.2.7)$$

であるとわかる。すなわち, 波数  $n$  の波の伝播速度はその波数の 2 乗に比例する。したがって, 初期値として複数の波数をもつ波形を与えた場合, 波数ごとに群速度が異なるので, 波は分散していく。また波数の大きい波, つまり波長が小さい波ほど速く伝播する。

また, ある波数の波の振幅  $A_n$  は Fourier 係数を用いて

$$u = A_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

とあらわせる。これより, 個々の波数に対する振幅, すなわち, 波数スペクトルは時間によって変わらない。

次に, 非線形項の考察と同様に, 数値計算によって分散項の性質を確認する。

数値計算の概要は以下のとおりである。支配方程式は (2.2.1) とし, 境界条件は周期境界とした。計算領域は 3.0, 格子点数は 128, 時間刻み幅は  $1.0 \times 10^{-6}$  である。空間方向には中央差分を用いて近似し, 時間積分はリーブフログ法を用いて 1000 ステップ行った。解析解から, 波数によって分散し, 伝播する方向は変位の正負には依存しないことがわかっているので, 初期波形としては

$$u = 10^3 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - 3.0/2.0}{\sqrt{12.0/10^3}} \right)$$

という変位が正の孤立波を与えた<sup>\*3</sup>。

計算結果を図 2.2.1 に示す。数値計算を行うと, はじめ釣鐘型の波形は時間とともに分散し, 波長の小さい波ほど速く  $x$  の負の方向に伝播する。これは前節の分散式の考察に一致する。また計算結果から, 振幅が小さい波ほど, より速く伝播しているが, フーリエ係数 (2.2.6) より波数が大きい波ほど振幅が大きく, やはり解析解と一致していることがわかる。

<sup>\*3</sup>この初期波形は K-dV 方程式の解析解を見越して与えた。2.4 節で K-dV 方程式の解析解を導出するので, そこでこの波形がどんな波を表すかを考える。

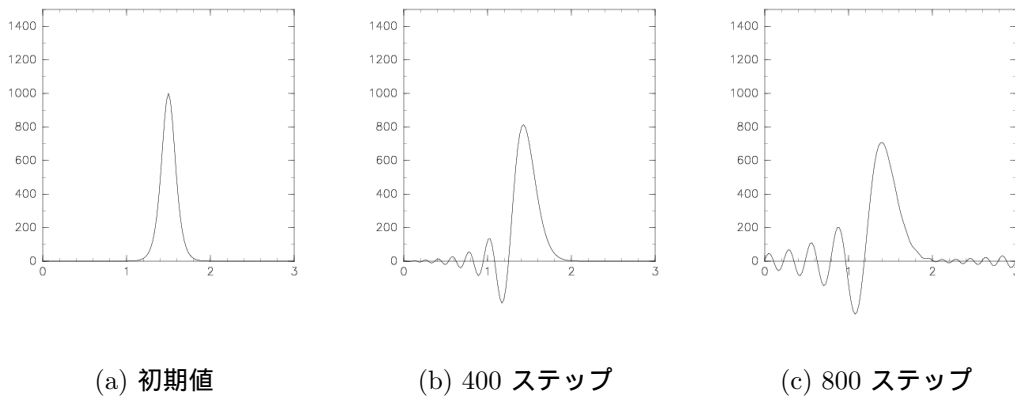


図 2.2.1: (2.2.1) の数値計算結果. 横軸が  $x$ , 縦軸が  $u$  を表す.

## 2.3 非線形項と分散項からの K-dV 方程式の考察

前節までの議論をふまえ, K-dV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1.1)$$

の考察を行う.

図 2.3.1 は非線形項と分散項の効果を表す概念図である. 図のように負の変位をもつ孤立波を考える. まず, (a) では非線形項の効果によって  $u$  の小さいところほど正の方向に速く進む. すると, 波が突っ立って (b) の状態になる. 波が突っ立った部分は空間の狭い領域で波が変化することを意味するので, 波数の大きな波が励起されたと解釈することができる. 波数が大きい波に対しては, 分散項の効果がより大きくはたらくため, 負の速度が大きくなり, 非線形項の効果による正の速度を打ち消すだろう.

このように二つの項がうまくつりあうような孤立波を与えれば, その孤立波は崩れることなく伝播していくことが予想される.

また, 図とは逆に正の変位を持つ孤立波を与えたとすると, 非線形項の効果によって, より変位の大きいところが負の向きに速く進む. しかし, 分散項は変位の正負にかかわらず, 左向き of 速度を与えるので, 孤立波を維持することはできない. し

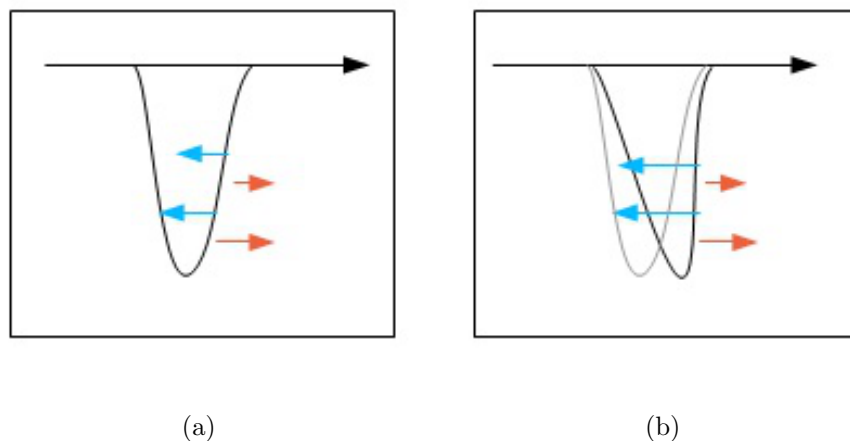


図 2.3.1: 非線形項と分散項の効果がつりあう概念図. 横軸が  $x$  軸, 縦軸は  $u$  の変位を表し,  $u$  の変位は負である. 赤い矢印は非線形項による速度, 青い矢印は分散項による速度を表す.

たがって非線形項と分散項, どちらかの項の係数が逆になれば, 変位が正の孤立波が維持できると予想される. このように, K-dV 方程式の解として存在できる孤立波の変位の正負は, 方程式の左辺第二項目, 第三項目の正負の組み合わせによって決まることがわかる.

## 2.4 1 ソリトン解

前節での定性的な議論から, K-dV 方程式が孤立波解をもちうることが推測できたので, 実際に K-dV 方程式 (2.1.1) を解いて, 孤立波が一つのソリトン解である 1 ソリトン解を導出する. 解を, 速度  $c$  ( $c > 0$ ) で形を変えずに伝播する波

$$\begin{aligned} u &= f(\eta), \\ \eta &= x - ct \end{aligned}$$

と仮定する. これを (2.1.1) に代入すると, K-dV 方程式は以下のように変形できる.

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0. \quad (2.4.1)$$

ここで  $f'$  は  $f$  の  $\eta$  に関する微分を表す. さらに  $\eta$  が無限遠ですべての物理量がゼロ, すなわち  $f = f' = f'' = \dots = 0$  という境界条件を用いて, (2.4.1) を積分すると

$$f'' = (c + 3f)f$$

となる. さらに両辺に  $f'$  を両辺にかけ積分すると,

$$(f')^2 = -(C - f)f^2.$$

ここで  $-c/2 = C$  とおいた.  $c > 0$  であるから,  $C < 0$  である. また上式より, 左辺  $> 0$  であるためには  $C - f < 0$  でなければならない. ここで  $g = \sqrt{C - f}$  とおき, 積分すると

$$\ln \left| \frac{g - i\sqrt{C}}{g + i\sqrt{C}} \right| = i\sqrt{C}(\eta - x_0)$$

を得る. ここで  $i$  は虚数単位,  $x_0$  は積分定数で, 初期位相である. これを  $g$  について解くと

$$g = i\sqrt{C} \tanh\{i\sqrt{C}/2(\eta - x_0)\}.$$

$u = f(\eta) = C + g^2$  に代入し,  $-C = A$  と置き直すと

$$u = -A \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{A}{2}}(x - 2At - x_0) \right\} \quad (2.4.2)$$

を得る. これが 1 ソリトン解である.  $C < 0$  であったので  $A > 0$  であることに注意されたい.

K-dV 方程式の 1 ソリトン解 (2.4.2) について考察する。まず,  $-A > 0$  であるから, その振幅は負であることがわかる。これは前節の最後での議論と一致する。次に孤立波の位相速度は  $2A$  であり, 振幅の大きさに比例する。したがって, 孤立波は振幅が大きいほど速く伝播することがわかる。さらに, 振幅が最大の点から  $\operatorname{sech}$  の引数が 1 となる点までの距離を孤立波の幅と定義すると, その幅は  $1/\sqrt{A/2}$  である。したがって, 振幅が大きほど孤立波は鋭くなる。

以上より, K-dV 方程式の孤立波解を解析的に導き, 孤立波解の定量的な特徴を得ることができた。ところで孤立波解 (2.4.2) を 1 ソリトン解であると述べたが, これが本当にソリトンと呼べるかどうかはわからない。なぜなら, 複数のソリトンが存在し, それらが衝突した前後の性質によってソリトンとわかるからである。



## 第3章 2 ソリトン解

### 3.1 2 ソリトン解の導出

第1章でソリトンの特徴的な性質として、複数のソリトンが衝突しても衝突の前後でそれぞれのソリトンの振幅や幅、位相速度が保持されることを述べた。これらのソリトンの性質を考察するために、2 ソリトン解を求める。考える方程式は引き続き K-dV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1.1)$$

である。これ以降、偏微分を下付き添え字として表すことにする。すなわち K-dV 方程式 (2.1.1) を

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.1.1)$$

と表す。

まず、変位  $u$  を変数  $\varphi$  を用いて

$$u = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \varphi \quad (3.1.2)$$

と置き換える。さらに全体を  $x$  について積分し、積分定数をゼロとおくと (3.1.1) は

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \ln \varphi + 6 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \varphi \right)^2 + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln \varphi = 0$$

となる。この微分演算子を実行すれば、変数変換された K-dV 方程式

$$\varphi_x \varphi_t - \varphi \varphi_{xt} = 3(\varphi_{xx})^2 - 4\varphi_x \varphi_{xxx} + \varphi \varphi_{xxxx} \quad (3.1.3)$$

を得る。ここで上式の解を

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 + e^{2\theta}, \\ \theta &= kx - \omega t \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

と仮定すると, (3.1.3) は

$$\omega = 4k^3 \quad (3.1.5)$$

となる. ここで  $k, \omega$  は (3.1.4) で与えられる波の波数と振動数である. したがって分散関係 (3.1.5) が成り立つとき, (3.1.4) は K-dV 方程式の解である. また, (3.1.4) を (3.1.2) に代入し, 変位  $u$  について解くと,

$$u = -2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - \omega t) \quad (3.1.6)$$

とかける. (3.1.6) が前章で求めた 1 ソリトン解の形になっていることから, (3.1.4) が K-dV 方程式の解であることは明らかである. また, (3.1.4) の右辺の指数関数部分に正の定数  $A$  をかけた,

$$\varphi = 1 + Ae^{2\theta} \quad (3.1.7)$$

もまた解であり, (3.1.2) に代入し  $A = e^{-2\delta}$  とおくと,

$$u = -2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - 4k^3t - \delta)$$

となり,  $A$  が初期位相を表すことがわかる.

(3.1.7) より, 一つの孤立波をあらわす二つの解を, それぞれの振幅や波数, 振動数を添え字  $i$  を用いて,

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 + A_i e^{2\theta_i}, \\ \theta_i &= k_i x - \omega_i t, \\ i &= 1, 2 \end{aligned}$$

と書くとする. この二つの解を重ね合わせた解はもちろん K-dV 方程式の解ではない. しかし, 二つの解の重ね合わせに, 係数が正の定数  $A_3$  の非線形相互作用を表す項を加えた

$$\varphi = 1 + A_1 e^{2\theta_1} + A_2 e^{2\theta_2} + A_3 e^{2(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.1.8)$$

は,

$$\omega_i = 4k_i^3, \quad i = 1, 2 \quad (3.1.9)$$

$$A_3 = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 A_1 A_2 \quad (3.1.10)$$

を満たすとき, K-dV 方程式の解である<sup>\*1</sup>. (3.1.8) を (3.1.2) に代入すれば, K-dV 方程式の 2 ソリトン解を得るが, その解は複雑で考察が難しい. そこで, 次節では  $\varphi$  に対する解の形 (3.1.8) のままで, 2 ソリトン解の振る舞いを考察する.

<sup>\*1</sup>(3.1.8) を K-dV 方程式 (3.1.3) に代入し,  $e^{2\theta_1}, e^{2(\theta_1 + \theta_2)}, e^{4\theta_1 + 2\theta_2}, e^{2\theta_2 + 4\theta_1}$  を含む項ごとに整理し, これらの指数関数に関する恒等式とみなして, それぞれの項の係数が 0 になるとおくと (3.1.9), (3.1.10) を得る.

## 3.2 2 ソリトン解の解析的考察

前節より,  $\varphi$  に対する 2 ソリトン解は

$$\varphi = 1 + A_1 e^{2\theta_1} + A_2 e^{2\theta_2} + A_3 e^{2(\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.1.8)$$

である. これについて考察を行う. ただし,

$$\begin{aligned} \theta_i &= k_i x - \omega_i t \\ \omega_i &= 4k_i^4, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$A_3 = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 A_1 A_2 \quad (3.1.10)$$

である.

まず, 定数に注目する. (3.1.9), (3.1.10) から,  $A_1, A_2, k_1, k_2$  を与えれば方程式は閉じる. また, (3.1.6) から,  $k_i$  は振幅を決め, (3.1.7) を (3.1.2) に代入することで  $A_i$  は孤立波の初期位相を決めることがわかる.

次に,  $t \rightarrow \pm\infty$  における  $u$  の漸近形に注目する<sup>\*2</sup>. まず,  $\varphi$  の漸近形を考える. 最初に添え字が 1 の孤立波の位相が 0 の近傍, つまり  $k_1 x - \omega_1 t \sim 0$  を考える. この近傍での添え字が 2 の孤立波の位相  $\theta_2$  の大きさを見積もるため,  $\theta_2$  を  $\theta_1$  であらわすと,

$$\begin{aligned} \theta_2 &= k_2 x - \omega_2 t = \frac{k_2}{k_1} (\theta_1) + \frac{k_2}{k_1} \left( 1 - \frac{\omega_2 k_1}{\omega_1 k_2} \right) \omega_1 t \\ &= \frac{k_2}{k_1} (\theta_1) + \frac{k_2}{k_1} \left( 1 - \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) \omega_1 t \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

となる. ここで  $k_1 > k_2 > 0$  とする. 考えている方程式は添え字 1, 2 の変数に関して対称なので, これによって一般性は失わない.

$t \rightarrow -\infty$  のとき,  $\theta_2 \sim 0$ ,  $k_1 > k_2$  と (3.2.1) より

$$\theta_2 \sim \frac{k_2}{k_1} \left( 1 - \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) \omega_1 t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\infty$$

となる. すなわち,  $e^{2\theta_2} \rightarrow 0$  となるので,  $\varphi$  の漸近形は

$$\varphi = 1 + A_1 e^{2\theta_1} \quad (3.2.2)$$

<sup>\*2</sup>二つの孤立波が衝突する時刻をゼロとしている.

となる. ここで  $A_1 = \exp\{-2\delta_1^{(-)}\}$  とおき, (3.1.2) で  $u$  の形に戻すと,

$$u = -2k_1^2 \operatorname{sech}^2\{k_1 x - \omega_1 t - \delta_1^{(-)}\} \quad (3.2.3)$$

を得る. これが,  $t \rightarrow -\infty$  における位相  $\theta_1 = 0$  近傍での漸近形である. (3.2.3) から, 振幅が  $-k_1^2$  の孤立波であることがわかる.

一方,  $t \rightarrow +\infty$  のとき,

$$\theta_2 \sim \frac{k_2}{k_1} \left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}\right) \omega_1 t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

であるから,  $e^{2\theta_2}$  を含む項が  $e^{2\theta_1}$  だけの項より大きくなる. したがって  $\varphi$  の漸近形は,

$$\varphi = A_2 \left(1 + \frac{A_3}{A_2} e^{2\theta_1}\right) e^{2\theta_2} \quad (3.2.4)$$

である.  $t \rightarrow -\infty$  と同様に, これを  $u$  の形に戻すと,

$$u = -2k_1^2 \operatorname{sech}^2\{k_1 x - \omega_1 t - \delta_1^{(+)}\} \quad (3.2.5)$$

を得る. ただし,

$$\delta_1^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{A_3}{A_2}\right)$$

とおいた.

同様に,  $\theta_2 \sim 0$  の近傍における  $t \rightarrow \pm\infty$  での  $u$  漸近形を求めると,  $t \rightarrow -\infty$  では,

$$u = -2k_2^2 \operatorname{sech}^2\{k_2 x - \omega_2 t - \delta_2^{(-)}\}, \quad (3.2.6)$$

$$\delta_2^{(-)} = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{A_3}{A_1}\right),$$

$t \rightarrow +\infty$  では

$$u = -2k_2^2 \operatorname{sech}^2\{k_2 x - \omega_2 t - \delta_2^{(+)}\}, \quad (3.2.7)$$

$$\delta_2^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln A_2$$

を得る.

以上の結果をまとめると,  $t \rightarrow -\infty$  のとき

$$u = \sum_{i=1}^2 \left[ -2k_i^2 \operatorname{sech}^2 \{k_i x - k_i^3 t - \delta_i^{(-)}\} \right], \quad (3.2.8)$$

$$\delta_1^{(-)} = -\frac{1}{2} \ln A_1,$$

$$\delta_2^{(-)} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{A_3}{A_1} \right),$$

$t \rightarrow +\infty$  のとき

$$u = \sum_{i=1}^2 \left[ -2k_i^2 \operatorname{sech}^2 \{k_i x - k_i^3 t - \delta_i^{(+)}\} \right], \quad (3.2.9)$$

$$\delta_1^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{A_3}{A_2} \right),$$

$$\delta_2^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln A_2$$

である. (3.2.8) と (3.2.9) の位相に注目すると, 初期位相  $\delta_i^{(\pm)}$  を無視すれば,  $t \rightarrow \pm\infty$  での  $i$  番目のソリトンの位置  $x_i$  は,

$$x_i \sim 4k_i^2 t, \quad i = 1, 2$$

と書ける. これより  $t \rightarrow -\infty$  のとき  $x_1 < x_2$  であり,  $t \rightarrow +\infty$  では,  $x_1 > x_2$  である. つまり時間が  $-\infty$  から  $+\infty$  まで経つ間に, 振幅の大きいソリトンが小さいソリトンを追い越していることがわかる. また, 追い越した前後で2つのソリトンそれぞれの振幅  $-2k_1^2$ ,  $-2k_2^2$  は変わっていない.

一方,  $t \rightarrow -\infty$  と  $t \rightarrow +\infty$  における位相の差をとると興味深いことがわかる. まず, 振幅  $-2k_1^2$  の大きいソリトンの位相差  $\Delta_1$  をとると,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{k_1} (\delta_1^{(+)} - \delta_1^{(-)}), \\ &= \frac{1}{2k_1} \ln \frac{A_1 A_2}{A_3}. \end{aligned}$$

同様に, 振幅  $-2k_2^2$  の小さいソリトンの位相差は  $\Delta_2$  は

$$\Delta_2 = \frac{1}{2k_2} \ln \frac{A_3}{A_1 A_2}$$

である. (3.1.10) と  $k_1 > k_2$  より,

$$\frac{A_1 A_2}{A_3} = \left( \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right)^2 > 1$$

なので, 位相は衝突前後で,  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$  のようにずれることがわかる. また,

$$\Delta_1 < |\Delta_2|$$

より, 小さいソリトンの方が位相差が大きいことがわかる.

### 3.3 K-dV 方程式の保存量

前節で 2 ソリトン解の定性的な考察を行ったので、これまでと同様、数値計算によって 2 ソリトン解の直観的ふるまいを確かめるが、その前に、より解析解に近い数値計算を行うために、ここでは K-dV 方程式の保存量について述べておく。K-dV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.1.1)$$

は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(3u^2 - u_{xx}) \quad (3.3.1)$$

とも書ける。\$|x| \to \infty\$ で \$u, u\_x, u\_{xx}, \dots\$ がすべて 0 になるとし、(3.3.1) を \$x\$ について \$-\infty\$ から \$+\infty\$ まで積分すると、

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0$$

となり、保存量

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx \quad (3.3.2)$$

を得る。

次に (3.1.1) の両辺に \$u\$ を掛けた

$$uu_t = 6u^2u_x - uu_{xxx}$$

は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2u^3 - uu_{xx} + \frac{(u_x)^2}{2} \right)$$

とかける。これを \$x\$ について \$-\infty\$ から \$+\infty\$ まで積分し、先ほどと同様の境界条件を用いれば、二つ目の保存量

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) dx \quad (3.3.3)$$

を得る。

以下同様に、(3.1.1) に \$u^2, u^3, u^4, \dots\$ を掛けるとさらに高次の保存量を得ることができる。K-dV 方程式にはこのような \$u, u\_x, u\_{xx}, \dots\$ の多項式で表される保存量が無限個存在することが知られている。

### 3.4 2 ソリトン解の数値計算

2 ソリトン解の数値計算とその考察を行う。ここで考える K-dV 方程式は

$$u_t - uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.4.1)$$

とする。

まず、前節で求めた 1 次と 2 次の保存量から、計算スキームについて議論を行う。第 2 章までの数値計算では、空間の差分に中央差分、時間の差分にリープフロッグ法を用いてきた。これらを (3.4.1) にも適用してみる。時間刻み幅を  $\Delta t$ 、空間の格子点間の距離を  $\Delta x$ 、時間のインデックスを  $j$ 、空間のインデックスを  $i$  とすると、離散化された K-dV 方程式

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} = u_i^j \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} - \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} \quad (3.4.2)$$

を得る。ここで前節の議論より、 $u$  は保存量なので、この両辺を  $x$  について  $-\infty$  から  $+\infty$  まで積分すると右辺は 0 となるはずである。ここで、 $u$  が保存しているかを離散化した式でも確認する。(3.4.2) の右辺をすべての格子点上で足し合わせると、周期境界なので、それぞれの格子点の一つ隣の量が打ち消し合って、結局ゼロになることがわかる。つまり (3.4.2) は  $u$  を保存する。

次に、保存量  $u^2$  について考える。保存量  $u$  と同様に、離散化した式でも  $u^2$  が保存するかを確認する。前節より、 $u^2$  が保存しているなら、(3.4.2) の両辺に  $u$  を掛けて  $x$  について積分する、つまりすべての格子点上で足し合わせると右辺はゼロとなるはずである。K-dV 方程式 (3.4.1) の両辺に  $u$  をかけて、右辺を中央差分で離散化すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) \sim (u_i^j)^2 \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} - u_i^j \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3} \quad (3.4.3)$$

となり、 $u$  のときと同様に、すべての格子点で足し合わせると右辺第二項は 0 となる。しかし、非線形項を離散化した右辺第一項は 0 になるかどうかわからない。

したがって数値解をより解析解に近づけるためには、(3.4.1) 非線形項が二次の保存量  $u^2$  を保存するように離散化を行えばよい。そのために (3.4.1) の非線形項を

$$uu_x = \alpha uu_x + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right), \quad (3.4.4)$$

$$\alpha + \beta = 1$$

と書くことにする. 中央差分によって右辺を離散化すると,

$$uu_x \sim \alpha u_i \frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{2\Delta x} + \beta \frac{\frac{1}{2}u_{i+1}^2 - \frac{1}{2}u_{i-1}^2}{2\Delta x} \quad (3.4.5)$$

となる. (3.4.5) の右辺をすべての空間成分に対し足し合わせるとゼロとなることから, 保存量  $u$  については  $\alpha, \beta$  に関係なく保存する. 次に  $u^2$  について考える. (3.4.5) 左辺に  $u$  を, 右辺に  $u$  に相当する  $u_i$  をかけ, 整理すると,

$$\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (u^3) \sim u_i u_{i+1} \left( \alpha u_i + \frac{\beta}{2} u_{i+1} \right) - u_i u_{i-1} \left( \alpha u_i + \frac{\beta}{2} u_{i-1} \right).$$

左辺を  $x$  について積分すると, 当然ゼロとなる. 一方, 右辺をすべての格子点上で足し合わせると,

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3} \quad (3.4.6)$$

のとき, 隣りの格子点同士で打ち消しあい, ゼロとなる. したがって, (3.4.6) を代入した (3.4.5) で非線形項を離散化すれば, (3.4.2) を用いるよりも解析解に近い数値解が得られるはずである.

以上で求めた, 二次の保存量までを考慮したスキーム

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} = u_i^j \frac{(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)}{6\Delta x} + \frac{(u_{i+1}^j)^2 - (u_{i-1}^j)^2}{6\Delta x} - \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3}$$

で数値計算を行った.

数値計算の設定は以下のとおりである. 計算領域は 3.0, 格子点数は 256, 時間きざみ幅は  $2.0 \times 10^{-7}$  である. 空間と時間の差分は上記の方法を用い, 時間積分は 25000 ステップ行った. 初期波形は

$$u = -U1 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - X1}{\sqrt{2\alpha/U1}} \right) - U2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x - X2}{\sqrt{2\alpha/U2}} \right)$$

を与えた. 各パラメータは以下のように与えた.

$$\begin{aligned} \alpha &= 6.0, \\ U1 &= 1440.0, \\ U2 &= 720.0, \\ X1 &= 3.0/4.0, \\ X2 &= 3.0/2.0. \end{aligned}$$

まず  $xu$  平面で描画した計算結果を図 3.4.1 に示す. (a) で与えられている 2 つ



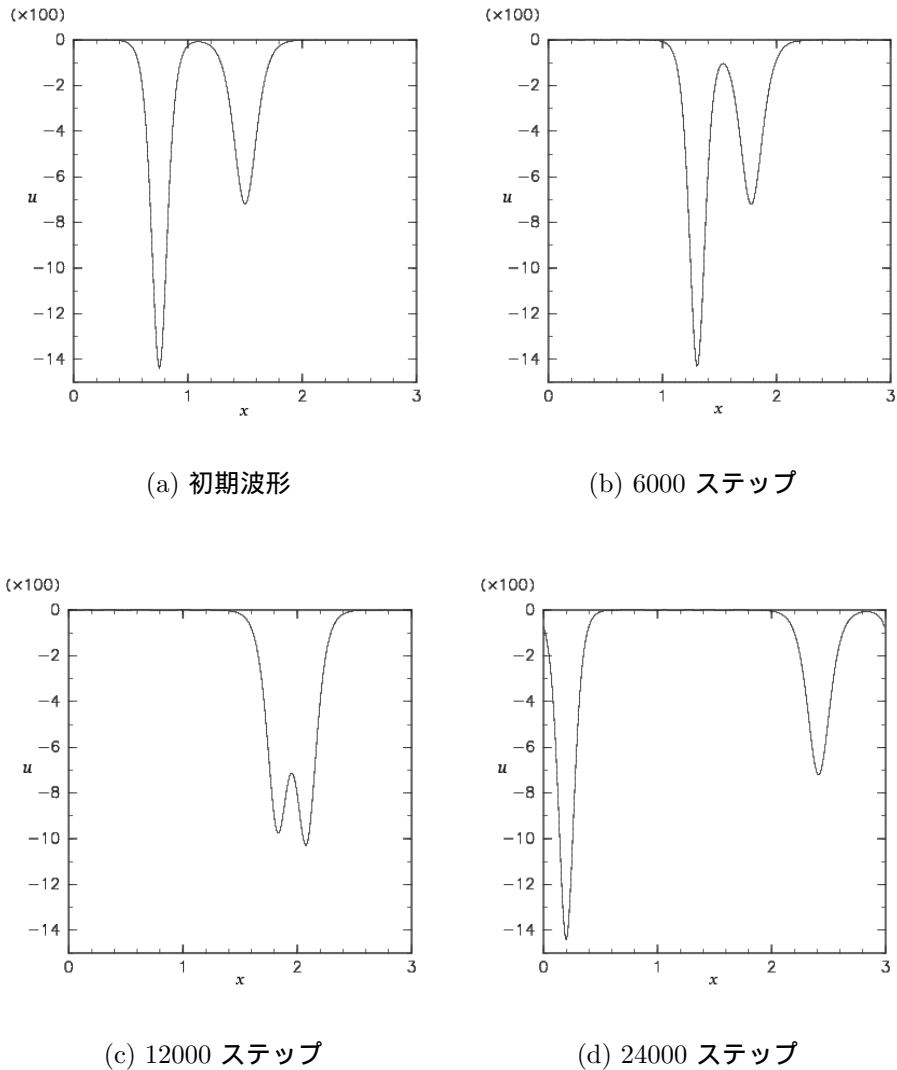


図 3.4.1: K-dV 方程式の 2 ソリトン解の数値計算結果.

のソリトンが, (b) では  $x$  の正の方向に伝播している. 3.2 節で考察したようにソリトン同士が離れているとき, 振幅  $A$  のソリトンの位相速度は  $-2A$  であった.  $u$  の変位は負なので, 伝播する方向は解析解と一致する. また, 変位の大きいソリトンの方が早く進んでいることにも一致する. (c) はソリトン同士が接近し, 非線形相互作用が生じている. 衝突の前後では大きなソリトンは振幅が小さく, 小さなソリトンは振幅が大きくなっていることがわかる. また, 線型波の場合には, 二つの波が衝突するとき, ある時間で一つのピークを持つ波が見られるが, この数値計算では衝突の間に波形のピークが一つになることはなかった. これは後の図で確かめることができる. 最後に (d) は衝突した後である. 二つのソリトンの振幅がそれぞれ初期波形で与えた振幅程度まで戻っていることがわかる. つまり, 3.2 節で漸近

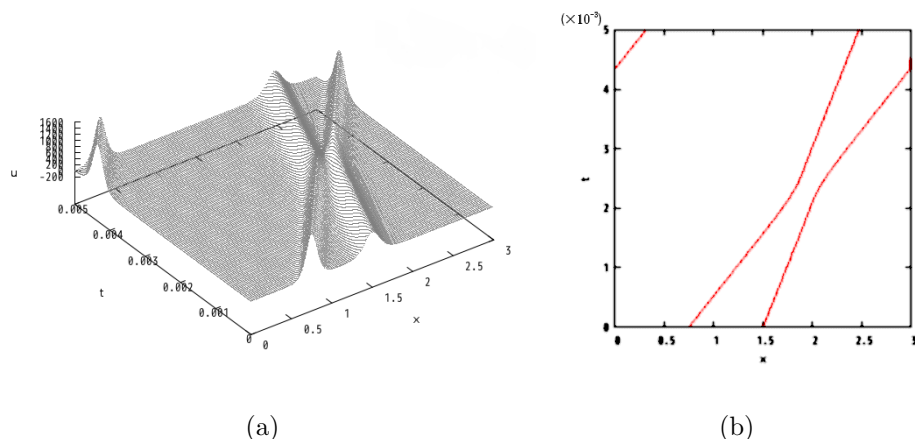


図 3.4.2: a:  $xtu$  空間の計算結果.  $z$  方向は  $u$  の絶対値の大きさを表す. 手前が初期値であり, 奥に進むほど時間が経過している. 左端の変位は周期境界によって一周したものである. b:  $xt$  平面での  $u$  の極小値を与える  $x$  の軌道.

形を求めた議論と同じように, 衝突の前後でソリトンの振幅, したがって幅や位相速度などの個性が変化していないことが確認できた.

次に, 時間変化を連続に描画した結果を図 3.4.2 に示す. (a) は時間軸を加えた三次元空間で描画した図である. 二つのソリトンが衝突する  $x \sim 2.0$ ,  $t \sim 2.5$  に注目すると, 線型波のようにピークが一つになっていないことがわかる. また同様のことは  $xt$  空間で極小値をプロットした図 3.4.2(b) からわかる. さらに (b) から, 二つのソリトンが近付いたとき, 軌道が曲がっている, すなわち位相がずれていることがわかる. また, 衝突前の直線軌道と衝突後の直線軌道もずれていることがわかる. 以上のように前節で議論した,  $t \rightarrow -\infty$  と  $t \rightarrow +\infty$  での位相のずれを数値計算においても確認することができた.

## 第4章 まとめ

本研究では K-dV 方程式のソリトン解に対する考察を解析的な手法と数値計算によって行った. K-dV 方程式は非線形項と分散項の効果を各々考察することによって, 二つの効果がつり合うとき, K-dV 方程式が孤立波解をもちうることを示唆し, 解析的にも孤立波解を持つことを確認した.

さらに 2 ソリトン解を導出し, ソリトンの特徴的性質である衝突の前後でソリトンの振幅などの個性が変化しないこと, 衝突の際には非線形相互作用によって振幅は線型波のように単純な重ね合わせにはなっていないことを確認した.

## 謝辞

本研究にあたり, 指導教官である林祥介教授には発表資料や計算結果に対して多く助言や指針をいただきました. 岩山隆寛准教授には, 理論から計算手法の広い範囲にわたってご指導いただきました. 西澤誠也助教には本研究にとりくむきっかけを与えていただきました. さらに井谷優花氏, 黒田美紀氏をはじめとした修士課程の皆様には論文の構成のご指導や細かな助言をいただきました. また, 同学年である河合佑太氏には数値計算に関して多くの貴重な意見をいただきました. 地球および惑星大気科学研究室の皆様には, ご迷惑をおかけしたことをお詫びし, そして心からお礼申し上げます.

計算結果の描画に関して, 地球流体電脳倶楽部によって開発された DCL を使用させていただきました.

## 参考文献

- [1] 戸田盛和, 1995: 物理学 30 講シリーズ 3 波動と非線形問題 30 講, 朝倉書店, 219pp.
- [2] 戸田盛和, 渡辺慎介, 1984: 共立物理学講座 6 非線形力学, 共立出版株式会社, 183pp.
- [3] 渡辺慎介, 1985: ソリトン物理入門, 培風館, 249pp.
- [4] 山下達也, 2007: ソリトンの数理 - 逆散乱法による KdV 方程式の解法 -, 北海道大学卒業論文
- [5] Zabusky, J. N. and Kruskal, M. D., 1965: Interaction of “ solitons ” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys.Rev.Lett.*, **15**, 240-243.