山岳波の線形理論

地球および惑星大気科学研究室　　八杉 美友紀

本研究では, 線形化した方程式を用いて内部重力波の特性について調べ, その一種である山岳波の性質と構造についてまとめた.

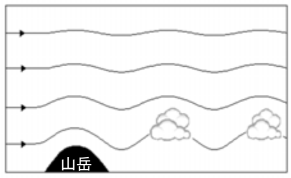
山岳波とは

◆安定成層した大気中において, 風が山に衝突するときに大気が強制的に上昇させられることによって生じる内部重力波

■内部重力波

密度成層している大気中で空気塊が強制的に少しだけ移動させられたとき,空気塊はつり合いの位置を基準に上下振動を行なう. その振動によって生じる擾乱が圧力を通じて伝わり, 重力を復元力として媒質内部を伝播する波のことを内部重力波という.

山岳波の模式図



支配方程式

・x-z平面2次元で安定成層している乾燥大気

・地球の自転の効果・大気の粘性は無視される.

・ブジネスク近似を用いた方程式系

〜x,y方向の運動方程式・連続の式・熱力学の式〜

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=0$$

u：水平方向の速度
w：鉛直方向の速度
p：圧力
ρ：密度
g：重力加速度
θ：温位

・従属変数を基本場と摂動部分に分けて表記する.
・基本場の水平速度 $\bar{u}$と密度 $\bar{\rho}$は一定
・基本場の温位 $\bar{\theta}$はz方向のみに依存
・基本場では静水圧平衡が成り立つ.

$u=\bar{u}+u'(x,z),\quad w=w'(x,z)$
$\rho=\bar{\rho}+\rho'(x,z),\quad p=\bar{p}(z)+p'(x,z)$
$\theta=\bar{\theta}(z)+\theta'(x,z),$
$\frac{d\bar{p}}{dz}=-\bar{\rho}g$

〜内部重力波の支配方程式〜

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u'+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x}=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w'+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial z}-\frac{\theta'}{\bar{\theta}}g=0,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta'+w'\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}=0.$$

内部重力波

波動方程式
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right)+N^2\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}=0$$

解
$$w'(x,z)=\mathrm{Re}[\tilde{w}\exp(i\phi)]$$

$\mathrm{Re}[\,]$: [ ]の実部　$\tilde{w}$: 振幅　$\phi=kx+mz-\nu t$: 位相　N: 浮力振動数 (ブラント・バイサラ振動数) $N^2\equiv\frac{g}{\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{dz}$

k : 波数の水平成分　m : 波数の鉛直成分　ν : 振動数

振動数

内部重力波の振動数
$$\hat{\nu}=\pm\frac{Nk}{(k^2+m^2)^{1/2}}$$

等位相線の傾き
$$\cos\alpha=\pm\frac{k}{(k^2+m^2)^{1/2}}$$

$$\hat{\nu}=\pm N\cos\alpha\rightarrow|\hat{\nu}|\le N$$

伝播方向

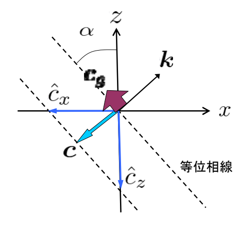
水平方向・鉛直方向の位相速度と群速度

位相速度
$$\hat{c}_x=\pm\frac{N}{(k^2+m^2)^{1/2}},\quad \hat{c}_z=\pm\frac{Nk}{m(k^2+m^2)^{1/2}}$$

群速度
$$\hat{c}_{gx}=\pm\frac{Nm^2}{(k^2+m^2)^{3/2}},\quad \hat{c}_{gz}=\mp\frac{Nkm}{(k^2+m^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{c}_g\cdot\mathbf{k}=0\ \longrightarrow\ \mathbf{c}\perp\mathbf{c}_g$$

内部重力波の構造図



◆ 浮力振動数よりも小さい振動数をもつ.

◆ 位相速度と群速度は直交する.

山岳波

定常波について考察する.

山の形を$h(x)=h_M\cos kx$ と与える. (h_Mは山頂の高さ)

境界条件

・下端境界条件：流れは境界に平行である.
$$w'(x,0)=\left(\frac{dh}{dt}\right)_{z=0}\approx\bar{u}\frac{\partial h}{\partial t}=-\bar{u}kh_M\sin kx$$

・上端境界条件：山岳波のエネルギー源は地表にあるので, エネルギー伝播(群速度)の方向は上向きである. → $\bar{u}>0$ならば, $k>0$ のとき $m>0$

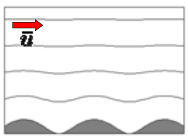
解
$$w'(x,z)=\begin{cases}-\bar{u}h_M ke^{-m_i z}\sin kx, & m^2<0\\ -\bar{u}h_M k\sin(kx+mz), & m^2>0\end{cases}$$

流線関数
$$\psi(x,z)=\begin{cases}\bar{u}\left[z-h_M\left(e^{-m_i z}\cos kx-1\right)\right], & m^2<0\\ \bar{u}\left[z-h_M\left\{\cos(kx+mz)-1\right\}\right], & m^2>0\end{cases}$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad w=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

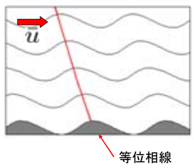
流線関数の分布

$\bar{u}k>N\ (m^2<0)$の場合



・鉛直方向に減衰
・変位は山頂位置で最大
・流線が山頂に対して風上側と風下側で対称.

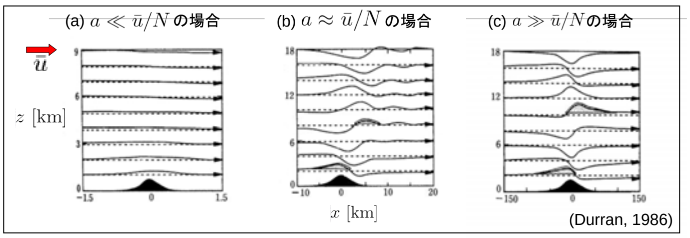
$\bar{u}k<N\ (m^2>0)$の場合



・鉛直方向に伝播
・等位相線が上流へと傾く.
・流線が山頂に対して風上側と風下側で非対称.

山の形を $h(x)=\frac{h_M a^2}{a^2+x^2}$と与える. ($a$：定数)

流線関数の分布



(Durran, 1986)

(a) ・山の幅が狭い. ・変位は山頂位置で最大.

(b) ・山の幅は中間. ・エネルギーは上方および下流へと伝播.

(c) ・山の幅が広い. ・鉛直方向に伝播.

まとめ

◆ 山岳波の構造は, 大気の安定度 N・山の水平スケールa・平均流の速度 $\bar{u}$ によって異なる.

• 平均流 $\bar{u}$の速度で移動する粒子の振動数 $\bar{u}k$が, 浮力振動数 Nよりも大きいと波は減衰し山岳波は発生せず, 浮力振動数 Nよりも小さいと伝播可能な山岳波が存在する.

→内部重力波の特性である, 振動数が浮力振動数 Nよりも小さいということと一致.

• 山の水平スケールa が･･･

・ $a\ll\bar{u}/N$ の (山幅が狭い) 場合, 波は減衰する. → 山岳波は発生しない.

・ $a\approx\bar{u}/N$ の場合, 波は鉛直方向に伝播する.

・ $a\gg\bar{u}/N$ の (山幅が広い) 場合, 波は鉛直方向および下流へと伝播する.

参考文献

・小倉 義光, 1997: メソ気象の基礎理論, 東京大学出版会, 215pp.
・Durran, D. R., 1986: Mountain waves, Mesoscale Meteorology and Forecasting, Ray, P. S. ed., American Meteorological Society, 472-492.
・Holton, J. R., 1992: An Introduction to Dynamic Meteorology,