

山岳波の線形理論

八杉美友紀

神戸大学理学部地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

2008/2/29

要旨

地球流体中には、音波、重力波、ロスビー波といった波動が存在し、それらはそれぞれの特性によって周囲の場に異なる作用を与える。これらの波動の基本的な性質や振る舞いを理解することは、地球流体の運動を考える上で有用である。本論文では、線形波動論の基礎と基本的な特性について述べるとともに、内部重力波の一種である山岳波に注目してその性質と構造についてまとめた。

波動の伝播においては、位相の伝播速度である位相速度と波束の伝播速度である群速度は一般に異なる。そして、位相速度が波数に依存する波を分散性波動と呼び、波数に依存しない波を非分散性波動と呼ぶ。今回注目する山岳波は、分散性波動に分類される。パーセル法とブジネスク近似を行った方程式系を用いて、安定度と平均流の速度が一様な系での内部重力波の性質について考察し、2つの重要な性質を持つことを示した。1つは内部重力波の振動数には制限があり、浮力振動数より大きな振動数をもつ内部重力波は存在できないことであり、そしてもう1つは内部重力波の位相の伝播方向と群速度の方向が直交することである。このような特徴をもつ内部重力波の表れの1つが、大気中で風が山に衝突するときが発生する山岳波である。正弦波形の地形によって発生する山岳波の構造を考察したところ、大気安定度や山の水平スケール、平均流の速度によってその構造が異なり、波が地面に捕捉される場合と鉛直方向に伝播する場合があることを示した。

目次

第1章	はじめに	3
第2章	線形波動の基礎	4
2.1	摂動法と線形化	4
2.2	位相速度	5
2.3	波数ベクトルと位相速度	5
2.4	フーリエ級数展開	7
2.5	分散性	8
2.6	群速度	8
2.7	音波	9
2.8	浅水重力波	12
第3章	浮力振動	16
3.1	基本方程式	16
3.2	内部重力波への適用	18
第4章	内部重力波	19
4.1	基本方程式	19

4.2	基本方程式の線形化	20
4.3	内部重力波への適用	21
4.4	伝播方向	22
第5章	山岳波	24
5.1	基本方程式	24
5.2	波の構造	25
5.3	孤立した山による山岳波	28
第6章	まとめ	30

第1章 はじめに

地球流体中には音波, 重力波, ロスビー波といった様々な波動が存在する。それらは大きさ, 成因, 振る舞いなど特性が異なり, 周囲の場に及ぼす作用も様々である。波動の基本的な性質を理解し, それらが場の中でどのように振る舞うかを考えることは, 地球流体の運動を理解する上で有用である。

本論文ではそれら地球流体中に存在する波動のうち, 内部重力波の1つの表れである山岳波に注目する。密度成層している流体中には重力が復元力となって重力波が生じる。現実の大気には重力波が満ちているが (小倉, 1997), 一般に低気圧や高気圧のスケールに比べそのスケールは小さいので, あまり気にとめられないことが多い。しかし, 安定成層した大気中において風が山に衝突するときに大気が強制的に上昇させられることで発生する山岳波は, 雲の成因となったり, 強いおろし風, フェーン現象の原因となるなど, 風や温度の大きな変動を起こすことがある。また局地的な強風災害を発生させたり, 航空機被害をもたらす晴天乱気流と関係付けられることもある。

そこで本論文では, 大気中の内部重力波, 特に山岳波の性質を理解するために, Holton (1992) に沿って波長, 位相速度, 群速度といった波動の基本的なパラメータについて述べるとともに, 内部重力波の一種である山岳波の構造についてまとめる。本論文の構成は以下のようになっている。第二章で線形波動の基礎についてまとめ, 基本的な波動の例として音波と浅水重力波の特性について述べる。第三章では浮力振動についてパーセル法を用いて述べ, 第四章ではブジネスク近似を用いて内部重力波の構造についてまとめる。第七章では山岳波の構造について述べる。第八章で本論文の内容についてまとめる。

第2章 線形波動の基礎

波動とは、復元力の作用による速度や圧力といった場の変数の振動のことである。復元力は、圧力や重力、自転、電磁気力の影響によるものが考えられる。この章では、波動の表現方法と基本的な性質について述べ、簡単な波動である音波と浅水重力波を例に、それらの波動の構造について考察する。

2.1 摂動法と線形化

この節では、波の性質の分析に役立つ簡単な方法である「摂動法 (perturbation method)」について述べる。簡単化のため一次元の場合を考える。

摂動法では全ての変数場を2つの部分に分けて考える。1つは「基本場」であり、多くの場合時間には無関係で位置だけの関数である。もう1つは「摂動部分」であり、基本場からのずれを表す。以降では任意の変数 X に対して、 \bar{X} で基本場を表し、 X' で摂動部分を表すこととする。例えば基本場が時間と位置に依らないとき、速度 u は

$$u(x, t) = \bar{u} + u'(x, t) \quad (2.1)$$

と表される。この場合、慣性加速度 $u \partial u / \partial x$ は

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') \\ &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \\ &= \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる。

(2.2) のように摂動法を用いて非線形項を展開したとき、摂動部分の積の項を無視すると支配方程式は基本場の変数が係数となる摂動変数の一次元微分方程式に

線形化される。係数が定数である方程式において、その解は三角関数や指数関数となる。摂動方程式を解くことで、波の伝播速度や鉛直構造といった、特徴を決定づけることができる。

2.2 位相速度

波の伝播はその振幅や位相によって特徴付けられる。伝播波において位相は時間のみに依るものではなく、空間にも依存する。

いま、静止状態を基本場として、基本場からの変位 ζ が

$$\zeta = A \cos(kx - \nu t) \quad (2.3)$$

で与えられる場合を考える。ここで、 A は振幅、 k は波数、 ν は振動数、 t は時間であり、波の波長は $\lambda = 2\pi/k$ である。また、

$$\phi \equiv kx - \nu t \quad (2.4)$$

は波の位相である。伝播波は、速度 $c \equiv \nu/k$ で運動している観測者から見ると位相が一定であり、 c を位相速度と呼ぶ。これは、(2.4) を

$$\phi = k \left(x - \frac{\nu}{k} t \right) = k(x - ct)$$

と変形すると、 $x = (\nu/k)t + \alpha = ct + \alpha$ (α は定数) であるとき ϕ が一定となり、変位 ζ が速度 c で x 方向に伝播することからもわかる。また、位相が一定であるとすると、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(kx - \nu t) = k \frac{dx}{dt} - \nu = 0$$

となり、ここからも位相速度 $dx/dt = c = \nu/k$ が求められる。

2.3 波数ベクトルと位相速度

これまでは、波が x 方向に伝播するものとして考えてきたが、ここでは図 2.1 のように x - y 平面内を c の方向に伝播する平面波について考える。

まず、波長ベクトル $\lambda = (\lambda_x, \lambda_y)$ を定義する。これは波の位相の進行方向を向き、波長に等しい大きさをもつベクトルである。ここで、図 2.1 より波の形状の幾何学

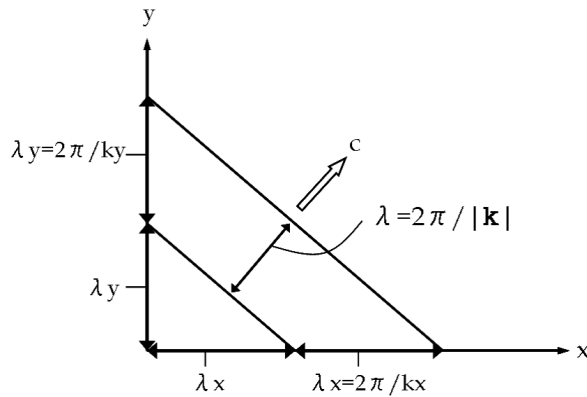


図 2.1: 物理空間における波長

的考察から,

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} \quad (2.5)$$

であるから, この両辺に $(2\pi)^2$ をかけると,

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_y}\right)^2 \quad (2.6)$$

となる. このとき, 波数ベクトル

$$\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_x}, \frac{2\pi}{\lambda_y}\right)$$

と定義すると,

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.7)$$

となる. また, k の向きは λ と等しいと定める.

波の周期を $\tau = 2\pi/\nu$ とすると,

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\nu}{k} \quad (2.8)$$

となる. また, x, y 方向それぞれの位相速度は,

$$c_x = \frac{\lambda_x}{\tau} = \frac{\nu}{k_x}, \quad c_y = \frac{\lambda_y}{\tau} = \frac{\nu}{k_y} \quad (2.9)$$

となる。ただし位相速度はベクトルの構成則を満たさず、(2.9) は

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_x^2} + \frac{1}{c_y^2} \quad (2.10)$$

を満たす。

2.4 フーリエ級数展開

大気の流れや温度の変動は完全な正弦曲線ではないので、単純な正弦波を用いて摂動を表現することは簡略化しすぎているように思われる。しかしながら、フーリエ級数

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (A_s \sin k_s x + B_s \cos k_s x) \quad (2.11)$$

を導入することで変動をより適当に表現することができる。ここで $k_s = 2\pi s/L$ は波数であり、 $f(x)$ は周期 L をもつ関数である。 A_s は(2.11)の両辺に $\sin(2\pi n x/L)$ (n は整数) をかけて、 x について 0 から L までを積分することで得られ、

$$A_s = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi s x}{L} dx$$

となる。ここで直交関係

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi s x}{L} \sin \frac{2\pi n x}{L} dx = \begin{cases} 0, & s \neq n \\ L/2, & s = n \end{cases}$$

を用いた。同様に、(2.11)の両辺に $\cos(2\pi n x/L)$ を掛けて積分すると、

$$B_s = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi s x}{L} dx$$

が与えられる。 A_s と B_s はフーリエ係数と呼ばれ、

$$f_s(x) = A_s \sin k_s x + B_s \cos k_s x \quad (2.12)$$

は s 次フーリエ成分と呼ばれる。

フーリエ成分の表記は指数関数によってより簡潔に書くことができる。オイラーの公式

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

を用いると,

$$\begin{aligned} f_s(x) &= \operatorname{Re}[\tilde{C}_s e^{ik_s x}] \\ &= \operatorname{Re}[\tilde{C}_s \cos k_s x + i\tilde{C}_s \sin k_s x] \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる. ここで, $i \equiv (-1)^{1/2}$ であり, $\operatorname{Re}[\]$ は「実部」を表し, \tilde{C}_s は複素係数である. (2.12) と (2.13) を比べると,

$$B_s = \operatorname{Re}[\tilde{C}_s], \quad A_s = -\operatorname{Im}[\tilde{C}_s]$$

ならば, $f_s(x)$ の 2 つの表現は等しくなる. ここで, $\operatorname{Im}[\]$ は「虚部」を表す.

2.5 分散性

基本的な一次元振動の特性は, 振動数 ν が振動の物理的特徴にのみ依存し, それ自身の運動には依らないということである. しかし一般的に伝播波では, 振動数 ν は媒体の物理的特性だけでなく振動の波数にも依存している. したがって, 位相速度 $c = \nu/k$ もまた波数によって変化するのである. 一般に位相速度が波数によって変化する波動を「分散性波動」といい, ν と k を関係付ける式は「分散関係式」と呼ばれる. 後に述べるように, 音波などのいくつかのタイプの波には波数に依らない位相速度をもつものがあり, それらは「非分散性波動」という.

2.6 群速度

波数の少し異なる二つの平面波を重ね合わせると振幅が場所によって異なるため, 振幅が最大のところは周期的にできる. それは一つの波のかたまりのようなもので, これを「波束」という. また, この波束が移動する速度を「群速度」という.

これから, 2 つの平面波の重ね合わせを考える. この 2 つの波は, 同じ大きさの振幅 ψ_0 をもち, それぞれわずかに異なる波数, $k + \delta k, k - \delta k$, と振動数, $\nu + \delta \nu, \nu - \delta \nu$, をもつこととする. 2 つの波の波数と振動数の差はそれぞれ $2\delta k$ と $2\delta \nu$ となる. 重ね合わせた波の振動は,

$$\psi(x, t) = \psi_0 \exp \{i[(k + \delta k)x - (\nu + \delta \nu)t]\} + \psi_0 \exp \{i[(k - \delta k)x - (\nu - \delta \nu)t]\} \quad (2.14)$$

となる. 簡単のため, (2.13) では Re と表記していたのをここでは省略した. これ

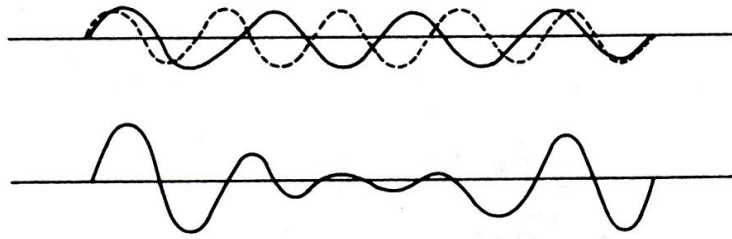


図 2.2: 波数の少し異なる 2 つの平面波を重ね合わせた波 (下図) とそれら 2 つの成分波 (上図). (Holton, 1992)

は, 右辺の実部のみが物理的意味を持つことで理解される. (2.14) を整理すると,

$$\begin{aligned}\psi &= [e^{i(\delta kx - \delta \nu t)} + e^{-i(\delta kx - \delta \nu t)}] e^{i(kx - \nu t)} \\ &= 2 \cos(\delta kx - \delta \nu t) e^{i(kx - \nu t)}\end{aligned}\quad (2.15)$$

が得られる. 摂動 (2.15) は, 波長 $2\pi/k$ をもち, 位相速度が 2 つのフーリエ成分の平均である ν/k の高振動数搬送波と, 速度 $\delta\nu/\delta k$ で移動する波長 $2\pi/\delta k$ の低振動数包路波の積となっていることがわかる. これより, $\delta k \rightarrow 0$ の極限において包路波の水平速度, すなわち群速度は

$$c_{gx} = \frac{\partial \nu}{\partial k}$$

となる. このように, エネルギーは群速度で伝播する.

2.7 音波

ここで, 波動の例として音波の性質について考える. 音波は媒質の振動が波の伝播方向に平行な縦波である. 音は媒体が断熱圧縮と断熱膨張を交互に行うことで伝わる. 図 2.3 のような左端に隔膜のある管を考える. 隔膜が振動を始めると, それに接している空気塊が圧縮と膨張を繰り返す. さらに, それは隣接する空気塊に作用しその空気塊の圧縮膨張を引き起こす. このようにして管の内部へと次々に伝播し, それぞれの空気塊は圧縮と膨張を繰り返す. このように, 振動は管の右方へと伝播される. しかし, 平均として個々の空気塊は右方向に移動しているわけではなく, 圧力パターンは右へ移動する一方で, 個々の空気塊が左右へ振動しただけである.

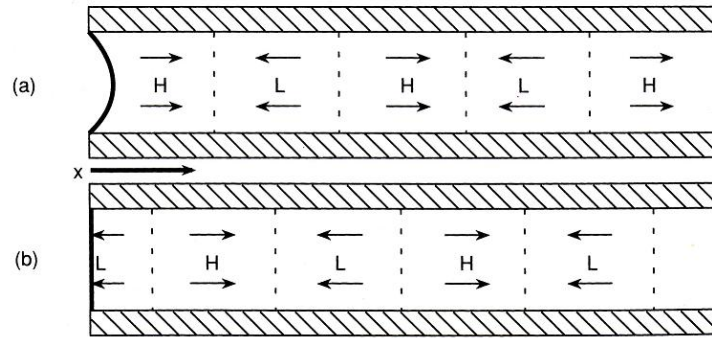


図 2.3: 管中の音波の伝播を模式化した図. (Holton, 1992)

ここで、これから考える波は、一次元で x 軸に平行な管をまっすぐに伝わる音波とする。縦波のみを扱うために、初期条件として y, z 方向の速度をゼロ、 $v = w = 0$ とする。このとき、運動方程式、連続の式、熱力学第 1 法則の式はそれぞれ、

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = 0 \quad (2.18)$$

である。ここで、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

であり、 θ は理想気体の温位を表し、

$$\begin{aligned} \theta &= T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} \\ &= \frac{p}{\rho R} \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} \end{aligned} \quad (2.19)$$

である。ここで R は気体定数、 c_p は定圧比熱、 $p_s = 1000 \text{ mb}$ である。(2.18) から θ を消去すると

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} - \frac{d \ln \rho}{dt} = 0 \quad (2.20)$$

が得られる。ここで $\gamma = c_p/c_v$ であり、 c_v は定積比熱である。(2.17) と (2.20) を用いて ρ を消去すると、

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

が得られる。

ここで摂動法を用いて従属変数を定常で一様な基本場と摂動部分に分けて考えると、 u, p, ρ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u} + u'(x, t), \\ p(x, t) &= \bar{p} + p'(x, t), \\ \rho(x, t) &= \bar{\rho} + \rho'(x, t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2.22) を (2.16) と (2.21) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p} + p') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + \gamma (\bar{p} + p') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。次に、 $|\rho'/\bar{\rho}| \ll 1$ として密度の項を

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^{-1} \approx \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)$$

のように近似し、摂動部分の積を無視して線形化すると、次元摂動方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.24)$$

が得られる。(2.24) に (2.23) を代入し、 $(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x)$ を作用させることで u' が消去でき、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p' - \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (2.25)$$

となる。ここで第一項の微分演算子は次のように展開される：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \bar{u}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

(2.25) は標準的な波動方程式である。 x 方向に伝播する単純な解は平面正弦波であり、

$$p' = A \exp [i(kx - \nu t)] \quad (2.26)$$

と表せる。ここで、簡単のために $\text{Re} []$ という記述を省略した。これは前章での議論と同様で、実部のみが物理的重要性を持つためである。(2.26) で想定される解を (2.25) に代入すると、意味のある解をもつためには、

$$(\nu - k\bar{u})^2 - \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} k^2 = 0 \quad (2.27)$$

が成り立たなければならない。(2.27) を ν について解くと

$$\nu = k \left\{ \bar{u} \pm \left(\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} \right\} \quad (2.28)$$

となり、位相速度は

$$\begin{aligned} c &= \frac{\nu}{k} = \bar{u} \pm \left(\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} \\ &= \bar{u} \pm (\gamma R \bar{T})^{1/2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。したがって、位相速度が (2.29) を満たすとき (2.26) は (2.25) の解である。ここで (2.29) より平均流に乗った系での位相速度は

$$c_s \equiv \pm (\gamma R \bar{T})^{1/2} \quad (2.30)$$

であり、これは断熱音速と呼ばれる。これより音波の位相速度は波数 k に依らないので、音波は非分散性波動であるといえる。また (2.28) より、群速度は

$$c_g = \frac{\partial \nu}{\partial k} = \bar{u} \pm \left(\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} \quad (2.31)$$

となり、位相速度と一致する。

2.8 浅水重力波

波動の2つめの例として、流体が自由表面を持つ場合、または内部の密度が不連続な場合に存在する浅水重力波を考える。前節で考えた音波の復元力は波の伝播方向に平行であったのに対し、浅水重力波の復元力は波の伝播方向に垂直である。

例えば、図 2.4 に見られるような異なる密度をもつ非圧縮流体が構成する系を考える。波は二つの層の間の境界面に沿って伝播する。非圧縮の仮定によって音波は除外される。下層の密度 ρ_1 が上層の密度 ρ_2 よりも大きいとき、系は安定して成層する。非圧縮の仮定より ρ_1 と ρ_2 が両方とも定数であるため、静水圧平衡ではそれぞれの層の水平圧力勾配は高さに依らない。このことは静水圧近似式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.32)$$

を x について微分することで示される:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} g = 0.$$

簡単のために上層には水平圧力勾配がないと仮定する. 下層の圧力勾配は, 静水圧の式を鉛直に積分することで得られる. 図 2.4 の点 A と点 B において, それぞれ圧力を求めると

$$p + \delta p_1 = p + \rho_1 g \delta z = p + \rho_1 g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \delta x,$$

$$p + \delta p_2 = p + \rho_2 g \delta z = p + \rho_2 g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \delta x$$

となる. ここで, $\partial h / \partial x$ は境界面の傾きである. $\delta x \rightarrow 0$ の極限をとることで, 下層の圧力勾配

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \left[\frac{(p + \delta p_1) - (p + \delta p_2)}{\delta x} \right] = g \delta \rho \frac{\partial h}{\partial x}$$

を得ることができる. ここで, $\delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ である.

これより, 下層における x 方向の運動方程式と連続の式は, それぞれ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{g \delta \rho}{\rho_1} \frac{\partial h}{\partial x} \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.34}$$

となる. ここで, (2.33) おける圧力勾配力が z に依らないため, 初期条件として u が z に依らないならば任意の時刻において u は z には依らないであろう. このとき, (2.34) は下側境界 $z = 0$ から境界面 $z = h$ まで簡単に積分でき,

$$w(h) - w(0) = -h \frac{\partial u}{\partial x}$$

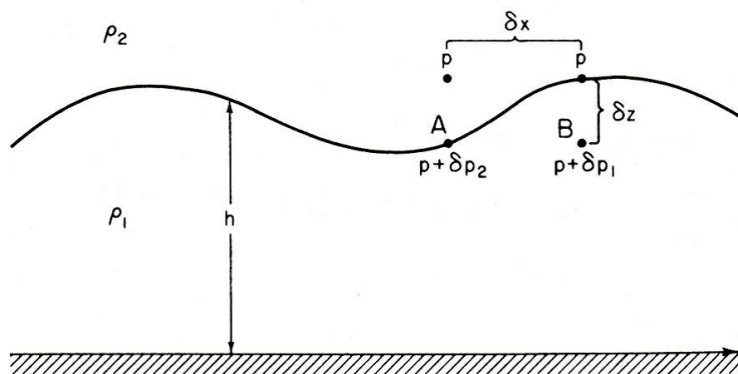


図 2.4: 異なる密度をもつ 2 層の流体系. (Holton, 1992)

となる. ここで, $w(h)$ は

$$w(h) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$$

であり, 境界面の高さの時間変化を表す. 平らな下側の境界については $w(0) = 0$ である. したがって, 連続の式を鉛直方向に積分すると,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0 \quad (2.35)$$

と書くことができる. ここで摂動法を適用して, u と h を

$$u(x, z) = \bar{u} + u'(x, z), \quad h(x, z) = \bar{h} + h'(x, z) = H + h'(x, z) \quad (2.36)$$

とする. ここで \bar{u} は基本場の速度で, 一定とする. また, H は下層の平均深さであり, $H \gg |h'|$ とする. (2.36) を (2.33) と (2.35) に代入して線形化すると, それぞれ

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{g\delta\rho}{\rho_1} \frac{\partial h'}{\partial x} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (2.38)$$

となる. (2.37) と (2.38) から u' を消去することで,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 h' - \frac{gH\delta\rho}{\rho_1} \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = 0 \quad (2.39)$$

が得られる. これは, (2.25) とよく似た形の波動方程式である. (2.39) の解は

$$h' = A \exp [i(kx - \nu t)]$$

と表せる. これを (2.39) に代入すると,

$$(\nu - k\bar{u})^2 - \frac{gH\delta\rho}{\rho_1} k^2 = 0 \quad (2.40)$$

となる. 振動数 ν について解くと

$$\nu = k \left\{ \bar{u} \pm \left(\frac{gH\delta\rho}{\rho_1} \right)^{1/2} \right\} \quad (2.41)$$

となり, 位相速度

$$c = \frac{\nu}{k} = \bar{u} \pm \left(\frac{gH\delta\rho}{\rho_1} \right)^{1/2} \quad (2.42)$$

が得られる. これより, 浅水重力波も非分散性波動であるといえる. また (2.39) より, 群速度は

$$c_g = \frac{\partial \nu}{\partial k} = \bar{u} \pm \left(\frac{gH\delta\rho}{\rho_1} \right)^{1/2} \quad (2.43)$$

となり, 位相速度と一致する.

上層が大気で下層が水の場合, $\delta\rho \approx \rho_1$ であり, 位相速度の式 (2.42) は

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}$$

と簡略化される.

第3章 浮力振動

前章では、比較的単純な音波や浅水重力波を考えることによって、波動の基礎について書いてきた。浅水重力波は流体が自由表面をもつときか、内部の密度が不連続なときにその境界に生じる波動であったが、ここからは安定な密度成層をした流体内部に存在する内部重力波を扱う。

まずはじめに、安定な密度成層をしている流体中における、つり合いの位置周辺での空気塊の断熱振動について議論する。これは浮力振動と呼ばれる。このような振動の特徴を考えるために、ここではパーセル法を用いる。パーセル法では、大気の一部を切り取った空気塊 (パーセル) が周囲の気圧を乱すことなく、断熱的に鉛直方向に小さな変位 δz だけ移動した場合の運動を解析し、浮力振動の性質や力学的安定性を議論する。

3.1 基本方程式

ここでは、安定な密度成層をしている乾燥大気を考える。注目する空気塊の周囲にある静水圧平衡の成り立つ背景場 (基本場) は圧力 \bar{p} 、密度 $\bar{\rho}$ 、温位 $\bar{\theta}$ 、温度 \bar{T} で表し、これらはいずれも鉛直方向 z だけの関数であるとする。以下では、簡単化のために地球の自転の影響と大気の粘性を無視して考える。

このように仮定した大気中の空気塊が、鉛直方向に δz だけ移動したときの鉛直方向の運動方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = -g - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{dz} \quad (3.1)$$

となる。一方、空気塊の周囲の大気は静水圧平衡の状態にあるから、

$$0 = -g - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{dz} \quad (3.2)$$

である。

パーセル法では、仮定により空気塊の圧力が即座に周囲の圧力に適合するため、常に $p = \bar{p}$ である。よって、(3.1) と (3.2) より dp/dz を消去すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dz} \\ &= -g - \frac{\bar{\rho}}{\rho} g \\ &= g \frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho}\end{aligned}\quad (3.3)$$

となる。温位の定義式 (2.19) と、 $p = \bar{p}$ より $\theta \propto \rho^{-1}$ であることから、

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}} = g \frac{\delta\theta}{\bar{\theta}}\quad (3.4)$$

となる。ここで、 $\delta\theta$ は鉛直方向に δz 移動したときの温位の変位である。周囲の温位 $\bar{\theta}$ を $z = 0$ のまわりでテイラー展開すると、

$$\bar{\theta}(\delta z) \approx \bar{\theta}(0) + \frac{d\bar{\theta}}{dz} \delta z + \dots\quad (3.5)$$

となる。断熱変化のとき、空気塊の温位は保存されるので、 δz の2次以上の項を無視すると、(3.5) は

$$\delta\theta = \bar{\theta}(0) - \bar{\theta}(\delta z) = -\frac{d\bar{\theta}}{dz} \delta z\quad (3.6)$$

となり、(3.4) に (3.6) を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) &= \frac{g}{\bar{\theta}} \left(-\frac{d\bar{\theta}}{dz} \right) \delta z \\ &= -N^2 \delta z\end{aligned}\quad (3.7)$$

となる。ここで、

$$N^2 \equiv \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} = g \frac{d \ln \bar{\theta}}{dz}$$

である。(3.7) は、一般解

$$\delta z = A \exp(\pm i N t)\quad (3.8)$$

をもつ。ここで、 A は定数である。

浮力振動数 N は大気の静的安定度を示す指標にもなる。 $N^2 > 0$ ならば、空気塊は振動数 N 、周期 $2\pi/N$ で振動する。このような場合を静力学的に安定であるといい、この N は浮力振動数 (プラント・バイサラ振動数) と呼ばれる。 $N = 0$ ならば、(3.7) からわかるように加速度が0となるため空気塊は振動しない。このような場合を静力学的に中立であるという。 $N^2 < 0$ ならば、振動の変位 δz は時間とともに指数関数的に増加する。このような場合を静力学的に不安定であるという。

3.2 内部重力波への適用

内部重力波は、前節で考えたような空気塊の振動が、等位相線に平行であるような横波である。図 3.1 のように鉛直方向から α 傾いた線に沿った変位の距離を δs とすると、鉛直方向の変位の距離は $\delta z = \delta s \cos \alpha$ となる。このような空気塊の鉛直方向の単位質量当りの浮力は $-N^2 \delta z$ となる。したがって、鉛直方向から α 傾いた方向の浮力成分は、

$$-N^2 (\delta s \cos \alpha) \cos \alpha = -(N \cos \alpha)^2 \delta s$$

である。このとき空気塊の運動方程式は、

$$\frac{d^2(\delta s)}{dt^2} = -(N \cos \alpha)^2 \delta s \quad (3.9)$$

となる。ここで前節の結果を考慮すると、この空気塊は振動数 $\nu = N \cos \alpha$ で振動することがわかる。したがって、振動数 ν は浮力振動数 N と位相線の傾きに依存する。

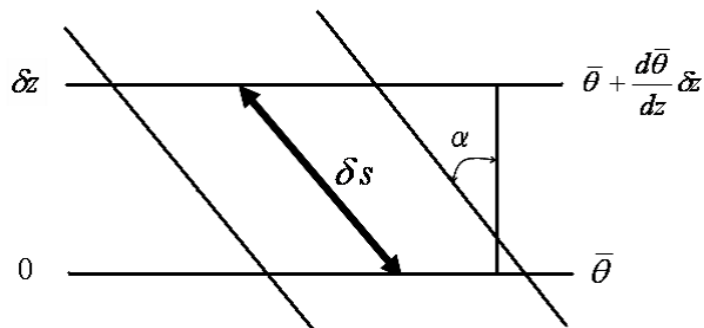


図 3.1: 空気塊の振動

第4章 内部重力波

パーセル法では周囲の大気を乱さないようにして空気塊が振動することを考えた。しかし、このようなことは現実の連続流体中で起ることはない。大気の一部である空気塊が振動すれば、その影響は圧力を通じて隣の空気塊へと伝播する。これが内部重力波であり、ここからは流体の運動を記述する方程式系を用いて内部重力波について議論する。

簡単のためブジネスク近似を用いる。この近似において大気は浮力の項を除き非圧縮である。また、コリオリ力や粘性を無視し、 x - z 平面の2次元に限って議論することにする。

4.1 基本方程式

x, z 方向の運動方程式, 連続の式, 熱力学第1法則の式は, それぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

と書ける。いま、摂動法を用いて従属変数を

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho'(x, z), & u &= \bar{u} + u'(x, z), \\ p &= \bar{p}(z) + p'(x, z), & w &= w'(x, z), \\ \theta &= \bar{\theta}(z) + \theta'(x, z) \end{aligned} \quad (4.5)$$

とする。基本場の x 方向の速度である平均流 \bar{u} と、密度 $\bar{\rho}$ は一定とし、基本場での圧力 \bar{p} 、温位 $\bar{\theta}$ は z 方向のみに依存し、静水圧平衡が成り立つとすると、

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -\bar{\rho}g \quad (4.6)$$

となる。

4.2 基本方程式の線形化

ここで、(4.1) - (4.4) に (4.5) を代入し、摂動変数の 2 次以上の項を無視することで、(4.1) - (4.4) を線形化した方程式を導出する。

(4.1) に (4.5) を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} + u') + (\bar{u} + u')\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u') + w'\frac{\partial}{\partial z}(\bar{u} + u') + \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') = 0$$

となる。摂動変数の 2 次の項を無視すると、 \bar{u} が一定であるため左辺第 1 - 3 項は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u' \quad (4.7)$$

となる。また左辺第 4 項は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') &= \frac{1}{\bar{\rho}}\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x}\right) \\ &\approx \frac{1}{\bar{\rho}}\left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\frac{\partial p'}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。ここで、 $(\partial\bar{p}/\partial x) = 0$ 、 $(\partial\bar{\rho}/\partial x) = 0$ を用いた。よって、(4.1) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)u' + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

と線形化される。

同様に (4.2) - (4.4) を線形化すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)w' + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}}g = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta' + w'\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} = 0 \quad (4.12)$$

となる. ここで, (4.2) を線形化するとき以下のことを用いた. 基本場の温位は (2.19) を満たさなければならないため,

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}R} \left(\frac{p_s}{\bar{p}} \right)^{R/c_p}, \\ \ln \bar{\theta} &= \ln \left\{ \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}R} \left(\frac{p_s}{\bar{p}} \right)^{R/c_p} \right\} \\ &= \left(1 - \frac{R}{c_p} \right) \ln \bar{p} - \ln \bar{\rho}R - \ln R + \ln p_s \\ &= \gamma^{-1} \ln \bar{p} - \ln \bar{\rho} + \text{const}\end{aligned}\tag{4.13}$$

となる. ここで,

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$$

である.

(4.9) - (4.12) を用いて, w' のみの式を導出する. (4.9) を z で微分し, (4.10) を x で微分して, それら 2 式を用いて p' を消去すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} \right) - \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \theta'}{\partial x} = 0\tag{4.14}$$

となる. また, (4.11) と (4.12) を使って (4.14) から u' と θ' を消去すると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0\tag{4.15}$$

となり, w' 単独の式が得られる.

4.3 内部重力波への適用

(4.15) は, 解

$$\begin{aligned}w' &= \text{Re} [\tilde{w} \exp(i\phi)] \\ &= w_r \cos \phi - w_i \sin \phi\end{aligned}\tag{4.16}$$

をもつと推測される. ここで, $\tilde{w} = w_r + iw_i$ は複素振幅, $\phi = kx + mz - \nu t$ は位相, $k = 2\pi\lambda_x^{-1}$, $m = 2\pi\lambda_z^{-1}$ はそれぞれ波数の水平成分と鉛直成分, λ_x, λ_z はそれぞれ水平方向と鉛直方向の波長である. (4.16) を (4.15) に代入することで,

$$(\nu - \bar{u}k)^2 (k^2 + m^2) - N^2 k^2 = 0\tag{4.17}$$

となり, 分散関係式

$$\begin{aligned}\hat{\nu} &\equiv \nu - \bar{u}k \\ &= \pm \frac{Nk}{(k^2 + m^2)^{1/2}} = \pm \frac{Nk}{|\mathbf{k}|}\end{aligned}\quad (4.18)$$

が得られる. ここで, $\mathbf{k} \equiv (k, m)$ は波数ベクトルであり, $\hat{\nu}$ は固有振動数である. 固有振動数は平均流 \bar{u} に乗った系から見た内部重力波の振動数である.

ここで, 鉛直方向からの等位相線の傾きは,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\lambda_z}{(\lambda_x^2 + \lambda_z^2)^{1/2}} \\ &= \pm \frac{k}{(k^2 + m^2)^{1/2}} = \pm \frac{k}{|\mathbf{k}|}\end{aligned}\quad (4.19)$$

となる. これを (4.18) に代入すると,

$$\hat{\nu} = \pm N \cos \alpha \quad (4.20)$$

となる.

以上のことから, 内部重力波は分散性のある波動であることがわかる. また, ブジネスク近似においてもパーセル法を用いて考えたときと同様に, 内部重力波の振動数は浮力振動数と位相線の傾きに依存することが確認された. また, (4.20) より

$$|\hat{\nu}| = N \cos \alpha \leq N$$

なので, 浮力振動数よりも大きな振動数をもつ内部重力波は存在しないことがわかる.

4.4 伝播方向

ここで内部重力波の伝播方向について考える. (4.18) より, 平均流に対する水平方向の位相速度と鉛直方向の位相速度はそれぞれ,

$$\begin{aligned}c_x &= \frac{\hat{\nu}}{k} = \pm \frac{N}{(k^2 + m^2)^{1/2}}, \\ c_z &= \frac{\hat{\nu}}{m} = \pm \frac{Nk}{m(k^2 + m^2)^{1/2}}\end{aligned}\quad (4.21)$$

となる.

これに対して水平方向の群速度と鉛直方向の群速度はそれぞれ

$$c_{gx} = \frac{\partial \nu}{\partial k} = \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}}, \quad (4.22)$$

$$c_{gz} = \frac{\partial \nu}{\partial m} = \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \quad (4.23)$$

である. このとき符号は (4.18) と同様に選ばれている. したがって, 鉛直方向の位相速度と群速度は反対の符号をもつ. これは位相の伝播が下向きであるとき, エネルギーの伝播が上向きであることを意味している. また, 平均流 \bar{u} に乗った系から見た群速度の水平成分は,

$$\begin{aligned} \hat{c}_{gx} &= c_{gx} - \bar{u} \\ &= \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

となるので, この系において

$$\hat{c}_g \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (4.25)$$

となる. したがって, 群速度の向きと波数ベクトルの向きは直交し, 群速度の向きと位相速度の向きも直交する.

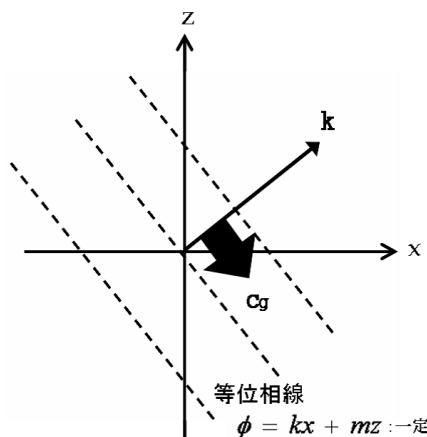


図 4.1: $k > 0, m > 0$ の場合の波数ベクトルと群速度.

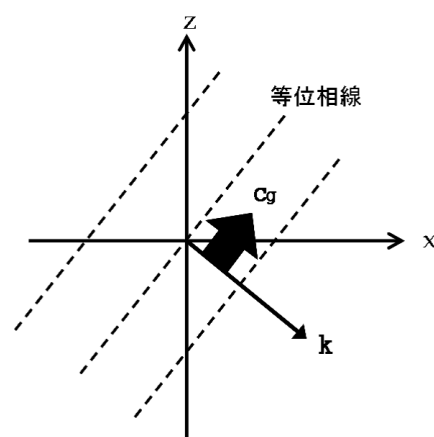


図 4.2: $k > 0, m < 0$ の場合の波数ベクトルと群速度.

等位相線の傾きと位相速度の伝播方向, 群速度の方向の関係は, k, m の符号に依存する. 図 4.1, 4.2 は, $k > 0$ の場合のそれらの関係を示している. 図 4.1, 4.2 において, 細い矢印は波数ベクトルであり, 位相の伝播方向を示している. 太い矢印は群速度の向きであり, 破線は等位相線を表している. $k > 0, m > 0$ のとき, 図 4.1 のように等位相線は高さとともに x が減少する向きに傾いており, このとき群速度は等位相線に沿って下向きである. 一方, $k > 0, m < 0$ のとき, 図 4.2 のように等位相線は高さとともに x が増加する向きに傾いており, このとき群速度は等位相線に沿って上向きである.

第5章 山岳波

内部重力波の発生には、波を励起させる要因が必要である。大気中では風が山に当たったとき、海洋中では大陸棚の縁などで水深が沖に向けて急に深くなっている部分に潮流が当たったときなどに内部重力波が発生することが多い(木村, 1983)。つまり、内部重力波の発生には地形が大きな役割を担っているのである。この章では、大気中における内部重力波である「山岳波 (mountain wave)」について述べる。山岳波の性状は山の形や大きさ、大気の静的安定度などの気象条件に大きく影響される。

5.1 基本方程式

一様な平均流 \bar{u} が山に当って、定常な山岳波が発生する場合を考える。系の条件は第4章で用いたものと同じとし、コリオリ力や粘性を無視した x - z 平面内でのブジネスク近似をした方程式系を用いる。いま、波は定常なので (4.15) は

$$\left(\bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) + N^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0$$

となり、

$$\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) + \frac{N^2}{\bar{u}^2} w' = 0 \quad (5.1)$$

と簡単化される。また、この場合 (4.16) において $\nu = 0$ なので、(4.16) は、

$$\begin{aligned} w'(x, z) &= \tilde{w} \exp[i(kx + mz)] \\ &= w_r \cos(kx + mz) - w_i \sin(kx + mz) \end{aligned} \quad (5.2)$$

となる。これを (5.1) に代入して整理すると、分散関係式として

$$m^2 = \frac{N^2}{\bar{u}^2} - k^2 \quad (5.3)$$

が得られる。

5.2 波の構造

(5.1) の解は, 与えられた N, k, \bar{u} の値によって決まる m^2 が正であるか負であるかによって異なった形をもつ. ここでは, 正弦波形の地形

$$h(x) = h_M \cos kx \quad (5.4)$$

を考え, 波の構造を議論する. ここで h_M は地形の振幅で定数である. 地形は動かないので, 地形に垂直な速度成分は 0, すなわち大気の下側境界で流れは境界に平行でなければならない. したがって, 下側境界での鉛直速度は

$$w'(x, 0) = \left(\frac{dh}{dt} \right)_{z=0} \approx \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} = -\bar{u} k h_M \sin kx \quad (5.5)$$

のように, 境界の高さの変化率で与えられる. これは大気の下端における境界条件となる.

大気の上端 ($z \rightarrow \infty$) における境界条件は, 大気の上端で波の振幅が有限であることである. 山岳波のエネルギー源は地表にあるので, そのエネルギーは上方へと伝播される. したがって 4.4 節の結果からもわかるように, 鉛直方向の群速度が上向きの場合, 鉛直方向の位相速度は下向きでなければならない. $k > 0$ のときは $m < 0$ となり, 等位相線は高さとともに上流へと傾く.

上端, 下端の境界条件をもとに, (5.2) の \tilde{w} を決定して解を求める. (5.2) と (5.5) より

$$\tilde{w} = i\bar{u}h_Mk \quad (5.6)$$

となる. (5.2) に代入すると,

$$w'(x, z) = \begin{cases} -\bar{u}h_Mke^{-m_i z} \sin kx, & m^2 < 0 \\ -\bar{u}h_Mk \sin(kx + mz), & m^2 > 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

が得られる. ここで, $m^2 < 0$ のとき $m = im_i$ である.

次に, 流線関数 ψ を求める. 連続の式 (4.3) より

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ w &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.8)$$

を満たす流線関数 ψ が存在する. また, 摂動部分でも連続の式 (4.11) が成り立つので,

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi'}{\partial z}, \\ w' &= -\frac{\partial \psi'}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.9)$$

が満たされる。したがって、

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad (5.10)$$

と書くことができる。

(5.2) の解 w' に対して、 u' を

$$u'(x, z) = \tilde{u} \exp[i(kx + mz)] \quad (5.11)$$

とする。連続の式 (4.11) より

$$\tilde{u} = -\frac{m}{k} \tilde{w}$$

となるので、(5.11) に代入すると

$$u'(x, z) = -i\bar{u}h_M m \exp[i(kx + mz)] \quad (5.12)$$

となる。 $m^2 < 0$ と $m^2 > 0$ の場合をそれぞれ考えると、

$$u'(x, z) = \begin{cases} \bar{u}h_M m_i e^{-m_i z} \cos kx, & m^2 < 0 \\ \bar{u}h_M m \sin(kx + mz), & m^2 > 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

となる。流線関数の摂動部分 ψ' は、

$$d\psi' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi'}{\partial z} dz \quad (5.14)$$

を原点から任意の点 (x, z) まで積分することで得られ、

$$\begin{aligned} \psi' &= \int_{(0,0)}^{(x,z)} d\psi' \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,z)} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi'}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_0^x -w'(x', 0) dx' + \int_0^z u'(x, z') dz' \end{aligned} \quad (5.15)$$

より、(5.7), (5.13) を代入して整理すると、

$$\psi'(x, z) = \begin{cases} -\bar{u}h_M (e^{-m_i z} \cos kx - 1), & m^2 < 0 \\ -\bar{u}h_M \{\cos(kx + mz) - 1\}, & m^2 > 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

が得られる。また、基本場の流線関数 $\bar{\psi}$ は、

$$\bar{\psi}(x, z) = \int_0^z \bar{u} dz' = \bar{u}z \quad (5.17)$$

となる。(5.16), (5.17) より、

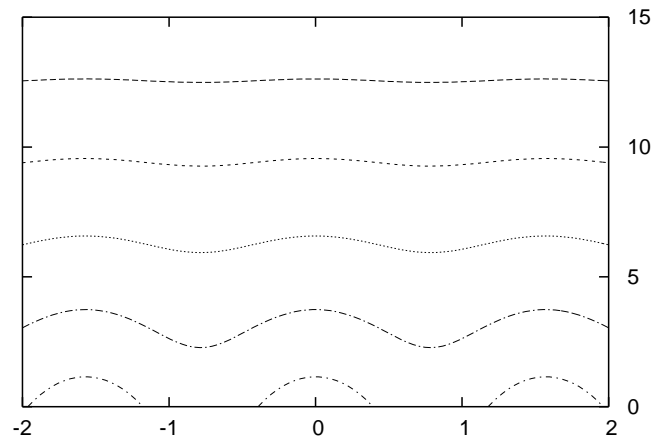


図 5.1: $\bar{u}k > N$ の条件で減衰する波

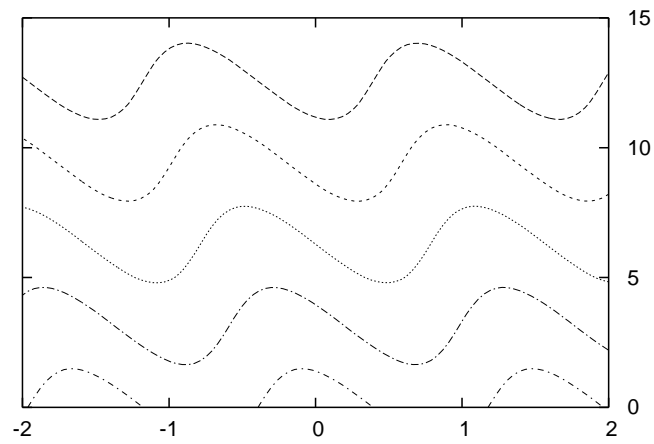


図 5.2: $\bar{u}k < N$ の条件で伝播する波

$$\psi(x, z) = \begin{cases} \bar{u} [z - h_M (e^{-m_i z} \cos kx - 1)], & m^2 < 0 \\ \bar{u} [z - h_M \{\cos(kx + mz) - 1\}], & m^2 > 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

が得られる。

図 5.1, 5.2 において, 曲線が (5.18) の流線関数の分布を, 直線が等位相線を示している。分散関係式 (5.3) より, $m^2 < 0$ のとき $\bar{u}k > N$ となり, このような条件における波は, 鉛直方向に減衰し, 地面に捕捉される (図 5.1)。このとき上方への変位は山頂の位置で最大となり, 流線は山頂に対して風上側と風下側で対称であることがわかる。また $m^2 > 0$ のとき $\bar{u}k < N$ となり, このような条件における波は鉛直方向に伝播する (図 5.2)。このとき, 流線は山頂に対して非対称であり, 上方への変位が最大となる位置は高さとともに上流へと傾く。また, 波は伝播可能であるので大気の上層まで摂動が存在する。

$\bar{u}k$ は, 速度 \bar{u} で移動する粒子の振動数である。これが浮力振動数 N よりも大きいとき山岳波は発生せず, この振動数が浮力振動数 N よりも小さいとき山岳波となって内部重力波が発生する。これは, 前章で議論した内部重力波の特性である「浮力振動数 N よりも大きな振動数をもつ内部重力波は存在しない。」ことと一致する。

5.3 孤立した山による山岳波

前節では, 正弦波形の地形によって生じる山岳波を考えた。次に

$$h(x) = \frac{h_M a^2}{a^2 + x^2} \quad (5.19)$$

で表されるベル型の山によって生じる山岳波を考える。ここで h_M は山頂の高さである。 $x = \pm a$ で地表の高さは山頂の半分になるため, a が山の水平方向の幅の目安となり, a が小さければ山の幅が狭く, a が大きければ山の幅は広がる。このような地形を考えることで山の大きさによって現れる山岳波の違いについて考えることができる。

(5.19) を下端境界条件として (5.1) を計算し, その流線分布を示したのが図 5.3 である。図 5.3a ($a \ll \bar{u}/N$) では山の幅が狭く, 流線の形は図 5.1 と似ていて変位の最大が山頂付近で生じている。また, 図 5.3c ($a \gg \bar{u}/N$) では山の幅が広く, 流線の形は図 5.2 と似ていて伝播可能である。図 5.3b ($a \approx \bar{u}/N$) は図 5.3a と c の中間領域である。図 5.3c に似ているようにも見えるが, 山頂より下流側の上層において波動が生じている。

これは4.4節で求めたようなエネルギー伝播の方向によって理解できる。(4.22)と(4.23)より, 群速度は,

$$\mathbf{c}_g = \left\{ \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \right\} \mathbf{e}_x \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \quad (5.20)$$

と表すことができる. ここで $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ x, z 方向の単位ベクトルである. 定常的な山岳波を考えると, 平均流に対する位相速度が平均流 \bar{u} と逆向きで大きさが等しい内部重力波を考える.(4.21)より

$$c_x = \frac{\hat{v}}{k} = \pm \frac{N}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \quad (5.21)$$

となり, $c_x = -\bar{u}$ なので, (5.20)より,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_g &= \left\{ \bar{u} \pm c_x \frac{m^2}{k^2 + m^2} \right\} \mathbf{e}_x \mp c_x \frac{km}{k^2 + m^2} \mathbf{e}_z \\ &= \bar{u} \frac{k^2}{k^2 + m^2} \mathbf{e}_x + \bar{u} \frac{km}{k^2 + m^2} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (5.22)$$

となる. ここで, $\bar{u} > 0$ としたときにエネルギーが山から上方へと伝播されるような符号を選んだ. このような場合山腹でできたエネルギーは下流および上方へと伝播する. このようにして図5.3bでは山頂より下流側の上方において波動が生じているのである. それに対して図5.3cでは k が小さいのでほとんどのエネルギーが水平方向へは伝播せずに上方へと向かい, 鉛直方向にほぼ同じパターンで流線の形が現れる.

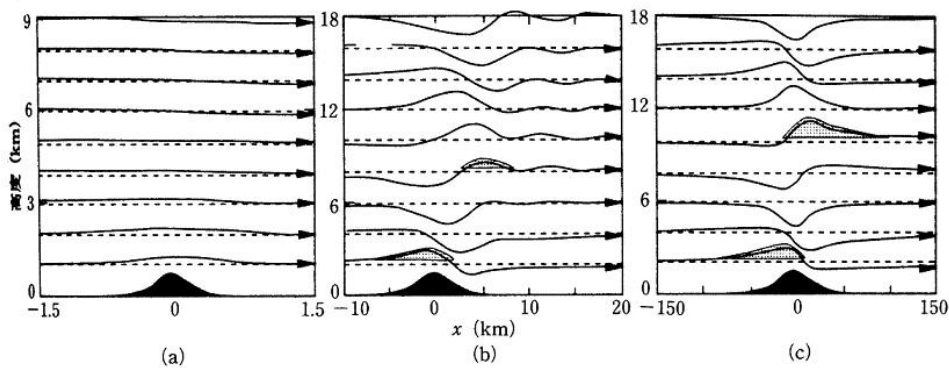


図 5.3: ベル型の山を越す定常的な流れ. (a) $a \ll \bar{u}/N$ の場合. (b) $a \approx \bar{u}/N$ の場合. (c) $a \gg \bar{u}/N$ の場合. (Durrant, 1986)

第6章 まとめ

線形波動論の基礎と基本的な特性について述べるとともに、内部重力波の一種である山岳波に注目してその性質と構造についてまとめた。

波動は空間を伝播する場の変数の振動であり、その構造は振幅や位相によって特徴付けられる。波は位相の伝播する速度である位相速度 c と、波束の伝播する速度である群速度 c_g をもち、 x - z の 2 次元においては、それぞれ

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{\nu}{k}, & c_z &= \frac{\nu}{m}, \\ c_{gx} &= \frac{\partial \nu}{\partial k}, & c_{gz} &= \frac{\partial \nu}{\partial m}, \end{aligned}$$

と表される。ここで ν は波の振動数、 k , m はそれぞれ x , z 方向の波数、 c_x , c_z はそれぞれ x 方向, z 方向の位相速度、 c_{gx} , c_{gz} はそれぞれ x 方向, z 方向の群速度である。位相速度が波数に依存する波動を分散性波動といい、依存しない波動を非分散性波動と呼ぶ。分散性波動と非分散性波動の例としては、それぞれ内部重力波と音波が挙げられる。

パーセル法とブジネスク近似をした密度成層流体の支配方程式を用いて、安定度 N と平均流 \bar{u} が一様な x - z の 2 次元の系での内部重力波の性質を考察した。平均流 \bar{u} に乗った系での内部重力波の振動数 $\hat{\nu}$ は

$$\hat{\nu} = \nu - \bar{u}k = \pm \frac{Nk}{(k^2 + m^2)^{1/2}}$$

の分散関係を満たす。したがって $|\hat{\nu}| < N$ であり、浮力振動数 N よりも大きな振動数をもつ内部重力波は存在しない。また、内部重力波の位相速度と群速度は、それぞれ

$$\begin{aligned} c_x &= \pm \frac{N}{(k^2 + m^2)^{1/2}}, & c_z &= \pm \frac{Nk}{m(k^2 + m^2)^{1/2}}, \\ c_{gx} &= \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}}, & c_{gz} &= \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

と表され、内部重力波の群速度は波数ベクトル k と直交する。したがって、内部重力波は群速度の方向と位相が伝播する方向は直交するという特徴をもつ。

内部重力波の表れの1つが、大気中で風が山に衝突するときが発生する山岳波である。内部重力波について得られた結果をもとに、下部境界条件として正弦波形の地形の存在に伴う流れの効果を与えることで、山岳波の構造について考察した。山岳波は、 $\bar{u}k > N$ ならば地面に捕捉され、 $\bar{u}k < N$ ならば鉛直方向に伝播する。つまり、山岳波は大気安定度 N や山の水平スケール k^{-1} 、そして平均流の速度 \bar{u} によって全く異なる構造を持つ。

謝辞

本論文を作成するにあたり、たくさんの方々から御指導、ご協力を頂きました。

指導教官である林祥介教授には、本論文を書くための指針を与えて頂き、有益なご指摘、ご指導を頂きました。岩山隆寛准教授、はしもとじょーじ助教には貴重な助言、ご指導を頂きました。高橋芳幸博士には多くの時間を割いていただき、本論文の内容や構成など、たくさんのご指導、ご意見を頂きました。森川靖大さんには論文作成における技術的指導を頂きました。地球および惑星大気科学研究室の先輩の方々には、非常に有用な助言を多々頂きました。本論文作成にご協力頂いた方々に心より感謝いたします。

参考文献

Durrán, D. R., 1986: Mountain waves, *Mesoscale Meteorology and Forecasting*, Ray, P. S. ed., American Meteorological Society, 472-492.

Holton, J. R., 1992: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press (Third Edition), 511pp.

木村 竜治, 1983: *地球流体力学入門*, 東京堂出版, 247pp.

小倉 義光, 1997: *メソ気象の基礎理論*, 東京大学出版会, 215pp.