

定常ロスビー波の球面伝播
Propagation of stationary Rossby
waves on a sphere

兼成 智久

KANENARI Tomohisa

北海道大学理学部地球科学科
地球流体力学研究室

2007 年 1 月 26 日

要旨

本論文では、Hoskins and Ambrizzi (1993) の波線理論をもとに、定常ロスビー波の球面上の伝播について議論した。Grose and Hoskins (1979) を参考にして、定常ロスビー波の伝播の時間発展について数値実験を行い、計算結果を波線理論を用いて考察した。

定常ロスビー波の伝播経路は臨界緯度付近を除き、波線理論により説明できる。波線とは群速度ベクトルを接線とする曲線であり、定常ロスビー波は波線に沿って伝播する。定常ロスビー波の全波数の緯度分布から、波線の伝播経路が予測できる。

Grose and Hoskins (1979) を参考にして、亜熱帯に置いた山岳に励起される定常ロスビー波の伝播を求める数値計算を行った。数値計算は、剛体回転する東西流、現実的な東西流、亜熱帯に強いジェット気流がある東西流の 3 つの条件について行った。数値計算により求めた定常ロスビー波の伝播経路は、臨界緯度付近を除き、波線理論から予測される伝播経路と良く一致した。

目次

1	はじめに	1
2	球面浅水方程式系	2
2.1	球面浅水方程式	2
2.2	順圧渦度方程式	4
2.3	分散関係	4
3	波線理論	7
3.1	波線	7
3.2	波の活動度	8
3.3	波の活動度の伝播	10
4	波線理論による定常ロスビー波の伝播	12
4.1	波線の屈折	12
4.2	定常ロスビー波の全波数の緯度分布と波線の屈折	14
4.3	臨界緯度付近での波線理論	16
5	数値計算	18
5.1	計算設定	18
5.2	剛体回転する東西流の場合	20
5.3	現実的な東西流の場合	24
5.4	亜熱帯に強いジェット気流がある東西流の場合	28
6	まとめ	32
	謝辞	33
	参考文献	34

目次

1	定常ロスビー波の全波数の緯度分布と波線の屈折	15
2	自由表面の高さ $H + h_0$	19
3	剛体回転する東西流 \bar{U}	20
4	剛体回転する東西流での定常ロスビー波の全波数 K_s	20
5	剛体回転する東西流における $t = 2.5 \times 10^5, t = 5.0 \times 10^5, t = 7.5 \times 10^5$ の渦度 ζ	22
6	剛体回転する東西流における $t = 10.0 \times 10^5, t = 12.5 \times 10^5, t = 15.0 \times 10^5$ の渦度 ζ	23
7	現実的な東西流 \bar{U}	24
8	現実的な東西流での定常ロスビー波の全波数 K_s	24
9	現実的な東西流における $t = 2.5 \times 10^5, t = 5.0 \times 10^5, t = 7.5 \times 10^5$ の渦度 ζ	26
10	現実的な東西流における $t = 10.0 \times 10^5, t = 12.5 \times 10^5, t = 15.0 \times 10^5$ の渦度 ζ	27
11	亜熱帯に強いジェット気流がある東西流 \bar{U}	28
12	亜熱帯に強いジェット気流がある東西流での定常ロスビー波の全波数 K_s	28
13	亜熱帯に強いジェット気流がある東西流における $t = 2.5 \times 10^5, t = 5.0 \times 10^5, t = 7.5 \times 10^5$ の渦度 ζ	30
14	亜熱帯に強いジェット気流がある東西流における $t = 10.0 \times 10^5, t = 12.5 \times 10^5, t = 15.0 \times 10^5$ の渦度 ζ	31

1 はじめに

ロスビー波はポテンシャル渦度の保存性から発生する波である．ロスビー波の位相速度は常に西向きであるため，偏西風が卓越する地域では，速度がつりあい，ロスビー波が停滞する．この停滞したロスビー波を定常ロスビー波という．

定常ロスビー波の伝播に関する研究の例を挙げる．Grose and Hoskins (1979) は山岳に励起される定常ロスビー波の伝播の様子を数値実験によって明らかにした．Hoskins and Karoly (1981) は波線理論によって定常ロスビー波の伝播が説明されることを示した．Hoskins and Ambrizzi (1993) は定常ロスビー波の全波数が屈折率の役割を果たし，それに従い，定常ロスビー波の波線が屈折することを示した．また，定常ロスビー波がジェットにより生成される導波管に沿って伝播することを示した．

本論文では，球面上の定常ロスビー波の伝播に注目し，SPMODEL ライブラリ (Takehiro et al, 2006) を用いて，その伝播を計算する．計算は Grose and Hoskins (1979) を参考にする．その結果を Hoskins and Ambrizzi (1993) が議論した波線理論から考察する．

本論文の構成は以下のとおりである．2 節では，球面上の浅水方程式から順圧渦度方程式を導出し，ロスビー波の分散関係を求める．3 節では，波線理論から定常ロスビー波が波線に沿って伝播することを示す．4 節では定常ロスビー波の全波数の分布と定常ロスビー波の伝播経路について議論する．5 節では数値計算の設定と結果を示し，結果について考察する．6 節はまとめである．

2 球面浅水方程式系

この節では、球面上の浅水方程式からロスビー波の分散関係を求める。速度で表した球面上の浅水方程式を、渦度、発散を用いて書き換える。そして、非発散を仮定し、渦度方程式から順圧渦度方程式を導く。順圧渦度方程式の解に WKBJ 理論を適用し、ロスビー波の分散関係を求める。

2.1 球面浅水方程式

速度で表した球面上の浅水方程式を、渦度、発散を用いて書き換える。球面座標系 (λ, ϕ) で表した球面上の浅水方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{uv \tan \phi}{R} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{g}{R \cos \phi} \frac{\partial h}{\partial \lambda} + F_\lambda, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{u^2 \tan \phi}{R} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{g}{R} \frac{\partial h}{\partial \phi} + F_\phi, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(uh) + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(vh \cos \phi) = Q \quad (2.3)$$

である。(2.1), (2.2) 式は運動方程式, (2.3) 式は連続の式である。式中の各記号は次の通りである。

λ	経度
ϕ	緯度
u	経度方向の速度
v	緯度方向の速度
h	大気表面変位
R	系の半径
Ω	系の自転角速度
g	重力加速度
Q	質量の生成, 消滅
F_λ	経度方向の粘性散逸
F_ϕ	緯度方向の粘性散逸

質量は保存されると仮定し、以下では $Q = 0$ とする。運動方程式 (2.1), (2.2) を渦度 ζ を用いて変形すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\zeta + 2\Omega \sin \phi)v - \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(gh + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + F_\lambda, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(\zeta + 2\Omega \sin \phi)u - \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(gh + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + F_\phi \quad (2.5)$$

となる。ここで、渦度 ζ 、発散 D は、

$$\zeta = \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial(u \cos \phi)}{\partial \phi} = \nabla_H^2 \psi, \quad (2.6)$$

$$D = \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} = \nabla_H^2 \chi \quad (2.7)$$

と表される。 ∇_H^2 は球面上のラプラシアンで

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{R^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2.8)$$

と表される。また、 ψ は流線関数、 χ は速度ポテンシャルであり、

$$u = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \quad (2.9)$$

$$v = \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \quad (2.10)$$

が成り立つ。渦度を用いて表現した運動方程式 (2.4), (2.5) より渦度方程式と発散方程式、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{R \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + \frac{v}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} + \frac{2\Omega \cos \phi}{R} v + (\zeta + 2\Omega \sin \phi)D = F_\zeta, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} - \frac{v}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta + 2\Omega \sin \phi) + \frac{u}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (\zeta + 2\Omega \sin \phi) \\ - (\zeta + 2\Omega \sin \phi)\zeta + \nabla_H^2 \left(gh + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = F_D \end{aligned} \quad (2.12)$$

が導かれる。ここで F_ζ , F_D は渦度、発散に働く粘性散逸の効果であり、

$$F_\zeta = \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial F_\phi}{\partial \lambda} - \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial(F_\lambda \cos \phi)}{\partial \phi}, \quad (2.13)$$

$$F_D = \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial(F_\phi \cos \phi)}{\partial \phi} \quad (2.14)$$

である。

2.2 順圧渦度方程式

系は非発散であるとして順圧渦度方程式を求める．速度ポテンシャル χ を一定とすると，(2.7) 式に定義される発散 D がゼロとなり，系は非発散となる．すなわち，

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} \\ &= \nabla_H^2 \chi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる．このとき，(2.9)，(2.10) 式より，速度 u, v は流線関数 ψ だけで表される．つまり，

$$u = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad (2.16)$$

$$v = \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (2.17)$$

となる． $D = 0$ を (2.11) 式に代入すると，順圧渦度方程式，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{R \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + \frac{v}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} + \frac{2\Omega \cos \phi}{R} v = F_\zeta \quad (2.18)$$

が得られる．

2.3 分散関係

WKBJ 理論を適用し，順圧渦度方程式からロスビー波の分散関係を求める．

擾乱の伝播を考えるため，流れを基本場と擾乱に分け，1 次の擾乱で渦度方程式を記述する．流れを，東西流 $\bar{U}(\phi)$ と擾乱成分に分けて，

$$u = \bar{U} + u' + u^{(2)} + \dots, \quad (2.19)$$

$$v = v' + v^{(2)} + \dots, \quad (2.20)$$

$$\zeta = \bar{\zeta} + \zeta' + \zeta^{(2)} + \dots, \quad (2.21)$$

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' + \psi^{(2)} + \dots \quad (2.22)$$

とする．ここで，“ $\bar{\quad}$ ” は基本場の成分，“ $'$ ” は 1 次，“ $^{(2)}$ ” は 2 次の擾乱を表

す．ここで，速度に関しては，

$$\bar{U} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \phi}, \quad (2.23)$$

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial \phi}, \quad v' = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda}, \quad (2.24)$$

$$u^{(2)} = -\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \phi}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \lambda}, \quad (2.25)$$

:

および，渦度に関しては，

$$\bar{Z} = -\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{U} \cos \phi) = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \phi} \cos \phi \right), \quad (2.26)$$

$$\zeta' = \frac{\partial}{\partial \lambda} v' - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u' \cos \phi) = \nabla_H^2 \psi', \quad (2.27)$$

$$\zeta^{(2)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} v^{(2)} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u^{(2)} \cos \phi) = \nabla_H^2 \psi^{(2)}, \quad (2.28)$$

:

である．(2.18) 式の擾乱の 1 次の項をとると，擾乱で表した順圧渦度方程式，

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \frac{\bar{U}}{R \cos \phi} \frac{\partial \zeta'}{\partial \lambda} + \hat{\beta} v' = F'_\zeta \quad (2.29)$$

が得られる．ここで， F'_ζ は散逸の 1 次の項である． $\hat{\beta}$ は絶対渦度の ϕ 方向の勾配であり，

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &\equiv \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (2\Omega \sin \phi + \bar{Z}) \\ &= \frac{2\Omega \cos \phi}{R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{U} \cos \phi) \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

と表される．

非散逸系 ($F'_\zeta = 0$) とした順圧渦度方程式 (2.34) を ψ' を用いて表す．(2.6) 式より $\zeta = \nabla_H^2 \psi$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi' + \frac{\bar{U}}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \nabla_H^2 \psi' + \frac{\hat{\beta}}{R \cos \phi} \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.31)$$

となる．

WKBJ 理論を用いて (2.31) の解を求める．WKBJ 理論とは振幅，波数，振動数の空間時間変化が，位相の空間時間変化よりゆっくりであると仮定し，微小パラ

メータを導入して時間，空間を引き伸ばし，局所的な平面波のつなぎあわせで解を求める理論である．位相関数 $\Theta(\lambda, \phi, t)$ と，微小パラメータ ε で ψ' を展開すると，

$$\psi' = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(\lambda, \phi, t) e^{i \frac{\Theta(\lambda, \phi, t)}{\varepsilon}} \quad (2.32)$$

となる． ψ_n は振幅を表す．ここで，局所的な東西波数 k ，南北波数 l ，振動数 ω を，

$$k \equiv \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}, \quad (2.33)$$

$$l \equiv \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}, \quad (2.34)$$

$$\omega \equiv -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (2.35)$$

と定義する．

順圧渦度方程式 (2.31) に (2.32) 式で表される ψ' を代入し， $O(\varepsilon^0)$ の大きさの項のみを取り出すと，局所分散関係，

$$(\omega - \bar{U}k)(k^2 + l^2) + k\hat{\beta} = 0 \quad (2.36)$$

が得られる．ただし， $\hat{\beta}$ の大きさを $O(\varepsilon^{-2})$ とみなしている．(2.36) 式を ω について解くと，

$$\omega = \bar{U}k - \frac{\hat{\beta}k}{k^2 + l^2} \quad (2.37)$$

となる．東西流 \bar{U} は ϕ のみに依存するとしているので， ω は λ, t に陽に依存しない．

3 波線理論

波線は群速度ベクトルを接線とする曲線であり，波線理論とは波線から波の伝播経路を求める理論である．この節では，東西波数と振動数が波線に沿って保存することを証明し，波のエネルギーを表す波の活動度が波線に沿って伝播することを示す．

3.1 波線

波線概念を導入し，波線に沿って東西波数，振動数が保存されることを示す．南北波数は波線に沿って保存せず，分散関係を満たしながら変化する．東西波数 k ，南北波数 l ，振動数 ω の定義である (2.33)，(2.34)，(2.35) 式より，

$$\frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \phi}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial l}{\partial \lambda} \quad (3.3)$$

が得られる．これらの式は， $\omega = \tilde{\omega}(k \cos \phi, l; \lambda, \phi, t)$ とみなすと，

$$\begin{aligned} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \\ &= -\frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \lambda} \right\} \\ &= -\frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \lambda} \right\}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \\ &= -\frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \phi} \right\} \\ &= -\frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \phi} \right\}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} - \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \quad (3.6) \end{aligned}$$

となる．ここで， λ ， ϕ 方向の群速度を $c_{g\lambda}$ ， $c_{g\phi}$ を，

$$c_{g\lambda} \equiv \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial k} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \cos \phi, \quad (3.7)$$

$$c_{g\phi} \equiv \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \quad (3.8)$$

で定義すると，(3.4)，(3.5)，(3.6) 式は，

$$\frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} + \frac{c_{g\lambda}}{R \cos \phi} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \lambda} + \frac{c_{g\phi}}{R} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \lambda}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{c_{g\lambda}}{R \cos \phi} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{c_{g\phi}}{R} \frac{\partial l}{\partial \phi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \phi}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{c_{g\lambda}}{R \cos \phi} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \frac{c_{g\phi}}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \quad (3.11)$$

となる．分散関係式 (2.36) より， $\tilde{\omega}$ は λ ， t に陽に依存しないので，これらの式は，

$$\frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} + \frac{c_{g\lambda}}{R \cos \phi} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \lambda} + \frac{c_{g\phi}}{R} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{c_{g\lambda}}{R \cos \phi} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{c_{g\phi}}{R} \frac{\partial l}{\partial \phi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \phi}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{c_{g\lambda}}{R \cos \phi} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \frac{c_{g\phi}}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} = 0 \quad (3.14)$$

と書ける．群速度ベクトル $c_g = (c_{g\lambda}, c_{g\phi})$ を接線とする曲線は波線と呼ばれる．(3.12)，(3.14) 式から， $k \cos \phi$ と ω は波線に沿って保存することがわかる．しかし，(3.13) 式より， l は波線に沿って保存しない．分散関係式 (2.36) より， l は，

$$l^2 = -\frac{\hat{\beta}k}{\omega - \bar{U}k} - k^2 \quad (3.15)$$

を満たしながら変化する． \bar{U} は ϕ に依存するので， l は ϕ とともに変化する．

3.2 波の活動度

波動の強さを表す波の活動度を求める．順圧渦度方程式 (2.31) に (2.32) 式を代入し， $O(\varepsilon)$ の項のみを取り出すと，

$$-\frac{\partial P}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial k} \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} + \frac{\partial P}{\partial l} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial \phi} + D\psi_0 = 0 \quad (3.16)$$

が得られる．ここで， P ， D は，

$$P \equiv (\omega - \bar{U}k)(k^2 + l^2) + \hat{\beta}k, \quad (3.17)$$

$$D \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{U}}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) (k^2 + l^2) \\ + (\omega - \bar{U}k) \left(\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial k}{\partial \lambda} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial (l \cos \phi)}{\partial \phi} \right) \quad (3.18)$$

と定義され，

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} = k^2 + l^2, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial P}{\partial k} = -\bar{U}(k^2 + l^2) + 2k(\omega - \bar{U}k) + \hat{\beta}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = 2l(\omega - \bar{U}k) \quad (3.21)$$

である．群速度を P を用いて表すと，

$$c_{g\lambda} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_l \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial k} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \omega} \right)^{-1}, \quad (3.22)$$

$$c_{g\phi} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} \right)_k \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial l} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (3.23)$$

となるので，(3.16) 式は，

$$-\frac{\partial P}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{c_{g\lambda}}{R \cos \phi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} + \frac{c_{g\phi}}{R} \frac{\partial \psi_0}{\partial \phi} \right) + D\psi_0 = 0 \quad (3.24)$$

となる． D を群速度を用いて変形すると，

$$D = - \frac{\hat{\beta}}{k^2 + l^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(k^2 + l^2)^2}{2\hat{\beta}} \right\} \right. \\ + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ c_{g\lambda} \frac{(k^2 + l^2)^2}{2\hat{\beta}} \right\} \\ \left. + \frac{1}{R \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \cos^2 \phi c_{g\phi} \frac{(k^2 + l^2)^2}{2\hat{\beta}} \right\} \right] \quad (3.25)$$

となる．これを用いて，(3.24) 式に $\{(k^2 + l^2)\psi_0 \cos \phi\}/\hat{\beta}$ をかけると，

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (c_{g\lambda} A) + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi c_{g\phi} A) = 0 \quad (3.26)$$

が得られる．ここで A は，

$$A = \frac{(k^2 + l^2)^2 \cos \phi \psi_0^2}{2\hat{\beta}} \quad (3.27)$$

である． A のような波の振幅の自乗の量を，波動の強さを表す量という意味で，波の活動度という．

3.3 波の活動度の伝播

定常ロスビー波の伝播に伴い，波の活動度は波線に沿って伝播することを示す．群速度ベクトル c_g の具体的な表現は，

$$\begin{aligned} c_g &= (c_{g\lambda}, c_{g\phi}) \\ &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial l} \right) \\ &= \left(\frac{\omega}{k} + \frac{2\hat{\beta}k^2}{K^4}, \frac{2\hat{\beta}kl}{K^4} \right) \\ &= (c_\lambda, 0) + \left(\frac{2\hat{\beta}}{K^2} \right) \cos \alpha \mathbf{K} \end{aligned} \quad (3.28)$$

である．ここで全波数 K は，

$$K = (k^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

と定義される． λ 方向の位相速度 c_λ は，

$$c_\lambda = \frac{\omega}{k} \quad (3.30)$$

である． \mathbf{K} は波数ベクトル，すなわち波面に垂直な単位ベクトルであり，

$$\mathbf{K} = \frac{1}{K}(k, l) \quad (3.31)$$

である． α は緯度円と波数ベクトルとがなす角であり，

$$\cos \alpha = \frac{k}{K} \quad (3.32)$$

である．

定常，すなわち $\omega = 0$, $c_\lambda = 0$ のとき，全波数 K は分散関係式 (2.36) から，

$$K = \left(\frac{\hat{\beta}}{\bar{U}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

となり，群速度ベクトル c_g は，

$$c_g = c_g \mathbf{K} \quad (3.34)$$

となる．ここで，

$$c_g = 2\bar{U} \cos \alpha \quad (3.35)$$

である．(3.34)，(3.35) 式から，定常ロスビー波に伴う波の活動度の伝播について，以下のことがわかる．まず，(3.34) 式から，群速度は波数ベクトルと同じ向き，すなわち波面に垂直で，東西方向の成分は常に正である．したがって，波源に対して定常ロスビー波の伝播はその東側にしか生じない．また，(3.35) 式から，群速度は真東向きの波束が最も大きく，波束の速度は東西流の速度の 2 倍である．波の活動度は真北，あるいは真南へは伝播しない．

4 波線理論による定常ロスビー波の伝播

この節では、波線理論から定常ロスビー波の伝播経路が求められることを示す。また、波線理論は臨界緯度付近では適用できないことを示す。

4.1 波線の屈折

定常ロスビー波の全波数と波線の屈折との関係を求める。(3.12), (3.14) 式より, $k \cos \phi$, ω は波線に沿って保存される。 l は (3.15) 式を満たすように変化するので, (3.15) 式に $\cos^2 \phi$ をかけて書き換えると,

$$(l \cos \phi)^2 = -\frac{(\hat{\beta} \cos \phi)(k \cos \phi)}{\omega - \left(\frac{\bar{U}}{\cos \phi}\right)(k \cos \phi)} - (k \cos \phi)^2 \quad (4.1)$$

となる。ここで,

$$\tilde{k} \equiv k \cos \phi, \quad (4.2)$$

$$\tilde{l} \equiv l \cos \phi, \quad (4.3)$$

$$\tilde{\beta} \equiv \hat{\beta} \cos \phi, \quad (4.4)$$

$$\tilde{U} \equiv \frac{\bar{U}}{\cos \phi}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{k}_s^2 \equiv -\frac{\tilde{\beta}\tilde{k}}{\omega - \tilde{U}\tilde{k}} \quad (4.6)$$

と定義する。定常ロスビー波について考えるため, $\omega = 0$ とすると,

$$\tilde{k}_s^2 = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{U}} \quad (4.7)$$

となり, \tilde{k}_s は定常ロスビー波の全波数を表す。これらの表現を用いると, (4.1) 式は,

$$\begin{aligned} \tilde{l}^2 &= -\frac{\tilde{\beta}\tilde{k}}{\omega - \tilde{U}\tilde{k}} - \tilde{k}^2 \\ &= \tilde{k}_s^2 - \tilde{k}^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

となり, 群速度は,

$$c_{g\lambda} = \cos \phi \frac{2\tilde{\beta}\tilde{k}^2}{\tilde{k}_s^4}, \quad (4.9)$$

$$c_{g\phi} = \cos \phi \frac{2\tilde{\beta}\tilde{k}\tilde{l}}{\tilde{k}_s^4} \quad (4.10)$$

となる．波線の傾きを表す式は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \phi} \frac{d\phi}{d\lambda} &\equiv \frac{c_{g\phi}}{c_{g\lambda}} \\ &= \frac{\tilde{l}}{\tilde{k}} \\ &= \tan \alpha \end{aligned} \tag{4.11}$$

となる．波線に沿った微分を，

$$\frac{d_g}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c_{g\lambda}}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{c_{g\phi}}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{4.12}$$

と定義すると，波線に沿った \tilde{k}, \tilde{l} の変化は，

$$\frac{d_g \tilde{k}}{dt} = 0, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{d_g \tilde{l}}{dt} &= \frac{\tilde{k}_s}{\tilde{l}} \frac{d_g \tilde{k}_s}{dt} \\ &= \frac{\tilde{k}_s}{\tilde{l}} c_{g\phi} \frac{d_g \tilde{k}_s}{d\phi} \end{aligned} \tag{4.14}$$

となる．(4.9) 式より，

$$\frac{c_{g\phi}}{\tilde{l}} = \frac{c_g}{\tilde{k}_s} \tag{4.15}$$

なので，

$$\frac{d_g \tilde{l}}{dt} = c_g \frac{d_g \tilde{k}_s}{d\phi} \tag{4.16}$$

となる．(4.11) 式から，

$$\frac{d_g}{dt} \tan \alpha = \frac{c_g}{\tilde{k}} \frac{d_g \tilde{k}_s}{d\phi} \tag{4.17}$$

が得られる． α について書き直すと，

$$\begin{aligned} \frac{d_g \alpha}{dt} &= \frac{d_g}{dt} \left(\tan^{-1} \frac{\tilde{l}}{\tilde{k}} \right) \\ &= \frac{c_g \tilde{k}}{\tilde{k}_s^2} \frac{d_g \tilde{k}_s}{d\phi} \end{aligned} \tag{4.18}$$

となる． α は波線の傾きを表す．

北半球において \tilde{k}_s が極に向かって減少する場合を例として、(4.18) 式から求められる波線の屈折について述べる．まず、波線がある緯度から極に向かう場合、 $d_g \tilde{k}_s / d\phi < 0$ となるため、 $d_g \alpha / dt < 0$ となる．つまり、 α は小さくなる．このことは、波線が緯度に平行になっていくことを意味する．波線は常に東に伝播するので、波線は時計回りに屈折する．次に、波線がある緯度から赤道に向かう場合、 $d_g \tilde{k}_s / d\phi > 0$ となるため、 $d_g \alpha / dt > 0$ となる．つまり、 α は大きくなる．このことは、波線が緯度に垂直になっていくことを意味する．波線は常に東に伝播するので、波線は時計回りに屈折する．このように \tilde{k}_s が極に向かって減少する場合は、波線は時計回りに屈折する． \tilde{k}_s が極に向かって増加する場合は、同様に考えると、波線は反時計回りに屈折する．これらの議論をまとめると、波線は全波数 \tilde{k}_s が大きくなる方に向かって屈折する、といえる．

4.2 定常ロスビー波の全波数の緯度分布と波線の屈折

定常ロスビー波の全波数の緯度分布と波線の屈折について、Hoskins and Ambrizzi (1993) をもとに議論する．

具体的に定常ロスビー波の全波数の緯度分布が与えられた場合の波線の屈折について、Hoskins and Ambrizzi (1993) をもとに議論する．図1は Hoskins and Ambrizzi (1993) の定常ロスビー波の全波数の緯度分布と波線の屈折についての概略図である．以下では 図1 の (A) から (E) に関して説明する．

- (A) : \tilde{k}_s が緯度とともに減少する場合の波線の屈折を表す． \tilde{k}_s が緯度とともに減少する場合、4.1 節で議論したように波線は大きい \tilde{k}_s に向かい、時計回りに屈折する．
- (B) : 全波数が \tilde{k} である波線が、 $\tilde{k}_s = \tilde{k}$ となる緯度 Y_{TL} で屈折する様子を表す．波線が緯度 Y_{TL} に近づくとつれて、 $\tilde{l}^2 = \tilde{k}_s^2 - \tilde{k}^2$ から、 $\tilde{l}^2 \rightarrow 0$ となる．そのため、 $\tan \alpha \rightarrow 0$ となり、波線は緯度 Y_{TL} に近づくとつれて、東に向きを変える．緯度 Y_{TL} では、 $\tan \alpha = 0$ となり、この緯度で波線は屈折する．この緯度は転向緯度と呼ばれる．
- (C) : $\tilde{k}_s = 0$ となる緯度 Y_B がある場合の波線の屈折を表す．波線が緯度 Y_B に近づくとつれて、 \tilde{k} の値にかかわらず、 $\tilde{l}^2 = \tilde{k}_s^2 - \tilde{k}^2$ より、 $\tilde{l}^2 = 0$ となる．つまり、緯度 Y_B に到達するまでに、全ての波線について $\tilde{l} = 0$ となる緯度が存在する．すなわち、緯度 Y_B は全ての波線が屈折する緯度を表す．

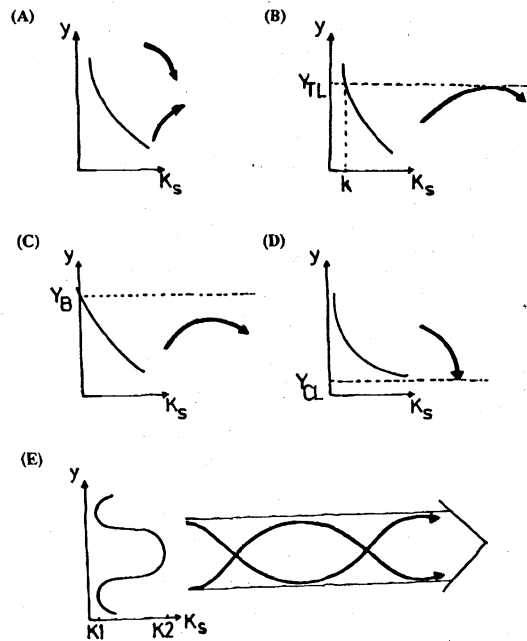


図 1: 定常ロスビー波の全波数の緯度分布と波線の屈折についての概略図．横軸は定常ロスビー波の全波数，縦軸は緯度を表し，矢印は波線が屈折する様子を表す．図中の K_s, k, K_1, K_1 はそれぞれ本文中の $\tilde{k}_s, \tilde{k}, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ を表す．(Hoskins and Ambrizzi, 1993)

- (D) : $\tilde{k}_s \rightarrow \infty$ となる緯度 Y_{CL} がある場合の波線の屈折を表す．波線が緯度 Y_{CL} に近づくにつれて， $\tilde{l}^2 = \tilde{k}_s^2 - \tilde{k}^2$ から， $\tilde{l}^2 \rightarrow \infty$ となる．そのため， $\tan \alpha \rightarrow \infty$ となり，波線は緯度 Y_{CL} に近づくにつれて，この緯度に対して垂直に向きを変える．また，(4.10) 式より $c_{g\phi} \rightarrow 0$ となるため，波線の南北方向の伝播速度はこの緯度に近づくにつれて小さくなる．この緯度は臨界緯度と呼ばれる．
- (E) : 左の図は \tilde{k}_s が極大を持つ場合の波線の屈折を表す．波数 \tilde{k} が \tilde{k}_1 と \tilde{k}_2 の間の波は，極側と赤道側にそれぞれ転向緯度が存在するため，右の図のようにこの緯度間から南北に伝播できず，屈折を繰り返しながら東に伝播する．この領域は導波管と呼ばれる．

このように定常ロスビー波の全波数の緯度分布から，波線の屈折の様子が求められる．5 節では，ここで示したいいくつかのパターンを実際に数値計算によって確かめる．

4.3 臨界緯度付近での波線理論

臨界緯度付近では波線理論が適用できないことを示す．このことを確かめるため，WKBJ 理論にもとづいて波が臨界緯度に近づく場合を考える．

(3.26) 式において，定常かつ東西一様とすると，

$$\cos \phi c_{g\phi} A = \text{const.} \quad (4.19)$$

となる． \tilde{k} が一定であることを用いると，(4.19) 式と群速度の式 (4.10) より，

$$\psi_0 \propto \tilde{l}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

となる．したがって， \tilde{l} が大きくなる臨界緯度付近では振幅 ψ_0 は小さくなり，逆に \tilde{l} が小さくなる転向緯度付近では振幅 ψ_0 は無限に大きくなる．臨界緯度を $\phi = \phi_c$ として， $\bar{U}(\phi)$ を $\phi = \phi_c$ のまわりでテーラー展開すると，

$$\bar{U}(\phi) - \bar{U}(\phi_c) = \bar{U}'(\phi_c)(\phi - \phi_c) + \frac{\bar{U}''(\phi_c)}{2!}(\phi - \phi_c)^2 + \dots \quad (4.21)$$

となる．(4.6) 式を変形すると，

$$\tilde{k}_s^2 = \frac{\hat{\beta} \cos^2 \phi}{\bar{U}(\phi) - c_\lambda} \quad (4.22)$$

となるので，(4.21) 式の 2 次以下の項を無視し，(4.8) 式を使うと，

$$\bar{U}(\phi) - c_\lambda = \phi - \phi_c \quad (4.23)$$

となる．よって， $\phi \rightarrow \phi_c$ のとき，(4.8)，(4.10) 式から，

$$l \propto (\phi - \phi_c)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} c_{g\phi} &\propto l^{-3} \\ &\propto (\phi - \phi_c)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

となる．このため，臨界緯度に達する時間は

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{c_{g\phi}} &\propto (\phi - \phi_c)^{-\frac{1}{2}} \\ &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.26)$$

となり，臨界緯度に達するには無限の時間がかかる．

しかし、この議論は誤っている。それは、臨界緯度付近では、WKBJ 理論が成り立たないためである。以下では、臨界緯度付近では、WKBJ 理論が成り立たないことを示す。振幅 ψ_0 の ϕ 方向の変化を考えると、(4.20), (4.24) 式より、

$$\psi_0 \propto (\phi - \phi_c)^{-\frac{1}{4}} \quad (4.27)$$

となる。これから、振幅の変化するスケールと波長の比は、

$$\frac{1}{l\psi_0} \frac{d\psi_0}{dy} \propto (\phi - \phi_c)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.28)$$

となる。この比は、 $\phi \rightarrow \phi_c$ で発散する。すなわち、1 波長の中に振幅が大きく変化することを意味し、このことは WKBJ 理論の仮定に反するので、臨界緯度付近では、WKBJ 理論は成り立たない。

5 数値計算

Grose and Hoskins (1979) を参考に、亜熱帯で山岳によって励起される定常ロスビー波の伝播を求める数値計算を行う。数値計算は、剛体回転する東西流、現実的な東西流、亜熱帯に強いジェット気流がある東西流を想定した 3 つの条件について行う。

5.1 計算設定

数値計算の設定について解説する。数値計算は、浅水方程式 (2.1), (2.2), (2.3) を線形化した以下の式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\bar{U}}{R \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \phi} - \frac{\bar{U} v \tan \phi}{R} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{g}{R \cos \phi} \frac{\partial h}{\partial \lambda} - \nu \nabla^4 u, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\bar{U}}{R \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\bar{U} u \tan \phi}{R} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{g}{R} \frac{\partial h}{\partial \phi} - \nu \nabla^4 v, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(H + h_0)u + \bar{U}(h - h_t)\} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{(H + h_0)v \cos \phi\} = -\nu \nabla^4 h \quad (5.3)$$

を用いる。式中の各パラメータは次のとおりである。

\bar{U}	東西流の風速	$-10 \sim 45 \text{ ms}^{-1}$
R	地球の半径	$6.371 \times 10^6 \text{ m}$
Ω	地球の自転角速度	$7.292 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$
g	重力加速度	9.8 ms^{-1}
ν	超粘性係数	2.338×10^{16}
H	自由表面の平均の高さ	$1.0 \times 10^4 \text{ m}$
h_0	自由表面の高さの緯度変化	$-3.6 \times 10^2 \sim 3.6 \times 10^2 \text{ m}$
h_t	山岳の高度	$0 \sim 2.5 \times 10^6 \text{ m}$

h_0 は、

$$h_0 = \left(\frac{R\Omega U_0}{2g} + \frac{U_0^2}{4g} \right) \cos 2\phi \quad (5.4)$$

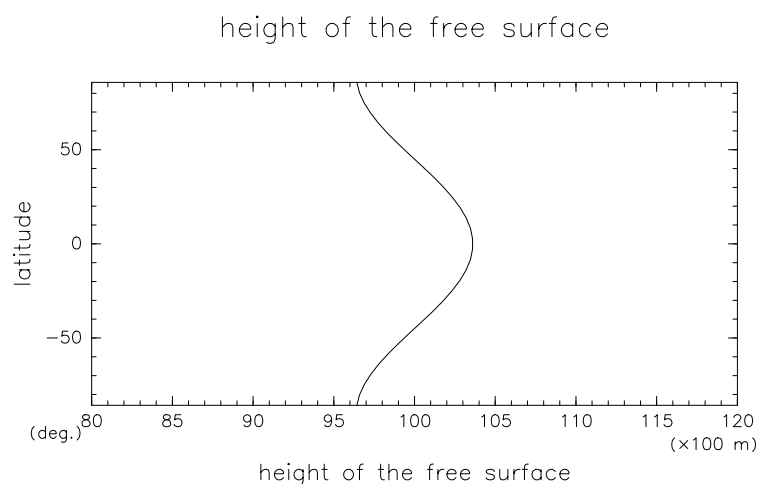


図 2: 自由表面の高さ $H + h_0$. 縦軸は緯度, 横軸は $H + h_0$ を表す .

と表される . U_0 は 15 ms^{-1} とする . 図 2 は自由表面の高さ $H + h_0$ を表している .

山岳の高度 h_t は ,

$$h_t = h_{\text{topo}} \left\{ \frac{1 + \cos(W\delta)}{2} \right\} \quad (5.5)$$

と表される . h_{topo} は山頂の高さで $2.5 \times 10^3 \text{ m}$ とする . W は山岳の広がりを表す係数で 8 とする . δ は , 球面三角形の式から ,

$$\cos \delta = \cos \phi \cos \phi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) + \sin \phi \sin \phi_0 \quad (5.6)$$

と表される . ϕ_0, λ_0 は山岳の中心の緯度, 経度であり, 北緯 30 度, 東経 180 度とする . 山岳の底面は円形であり, 直径は約 5000 km である .

空間方向の離散化はスペクトル法を用いる . 格子点数は, 東西方向は 64, 南北方向は 32 である . 切断波数は 21 である . 時間積分は leap-frog 法を用いる . 時間ステップは 100 s で, t が 0 s から 1500000 s まで計算する .

5.2 剛体回転する東西流の場合

剛体回転する東西流 \bar{U} と、定常ロスビー波の全波数 K_s は、

$$\bar{U} = U_0 \cos \phi, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} K_s &= R\tilde{k}_s \\ &= R \cos \phi \left(\frac{\hat{\beta}}{\bar{U}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

と表される．図 3 は剛体回転する東西流 \bar{U} ，図 4 は定常ロスビー波の全波数 K_s の緯度分布である．

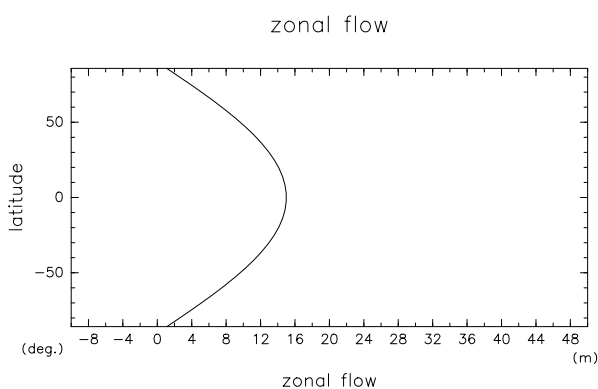


図 3: 剛体回転する東西流 \bar{U} ．縦軸は緯度，横軸は \bar{U} を表す．

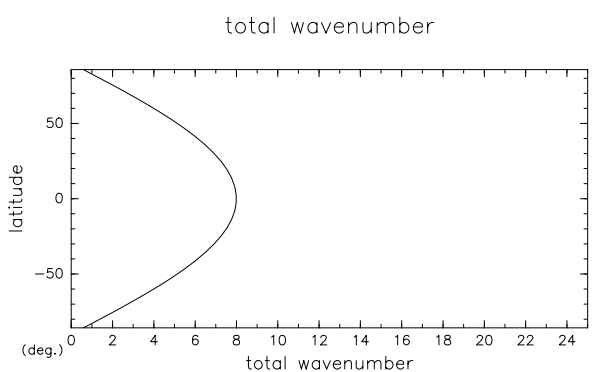


図 4: 剛体回転する東西流での定常ロスビー波の全波数 K_s ．縦軸は緯度，横軸は K_s を表す．

図4をもとに、定常ロスビー波の伝播経路を波線理論から予測する。赤道に K_s の極大が存在するため、赤道を軸に導波管が形成される。そのため、定常ロスビー波は赤道を軸に、屈折を繰り返しながら東に伝播することが予測される。また、波線の傾きを表す式、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \phi} \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{c_{g\lambda}}{c_{g\phi}} \\ &= \frac{l}{k}, \\ &= \frac{\sqrt{K^2 - k^2}}{k} \end{aligned} \quad (5.9)$$

から伝播経路について予測する。(3.32)式で定義される α を、赤道となす角 γ に置き換え、 K を

$$K = \frac{k \cos \phi}{\cos \gamma} \quad (5.10)$$

と書き直す。これを (5.9) 式に代入すると、

$$\frac{1}{\cos \phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = \sqrt{\tan^2 \gamma - \tan^2 \phi} \cos \phi \quad (5.11)$$

となる。この式を積分すると、波線の式は、

$$\tan \gamma \sin(\lambda - \lambda_0) = \tan \phi \quad (5.12)$$

となる。この式は赤道で λ_0 を通り、緯度 γ に届く大円を表す。すなわち、波線理論から、緯度 γ は転向緯度を表し、定常ロスビー波の伝播経路は大円となることが予測される。

計算結果は図5および図6である。定常ロスビー波が、赤道を軸に屈折を繰り返しながら東に伝播する様子がわかる。伝播経路から、北緯70度、南緯70度付近で屈折し、渦度源の対蹠点、すなわち南緯30度、東経0度を通り、その後、渦度源に戻ってくる様子がわかる。この様子から、定常ロスビー波の伝播経路は大円を描いていることがわかる。計算結果は、波線理論での予測と非常に近い。よって剛体回転する東西流の場合、波線理論は定常ロスビー波の伝播経路をよく表すことが示された。

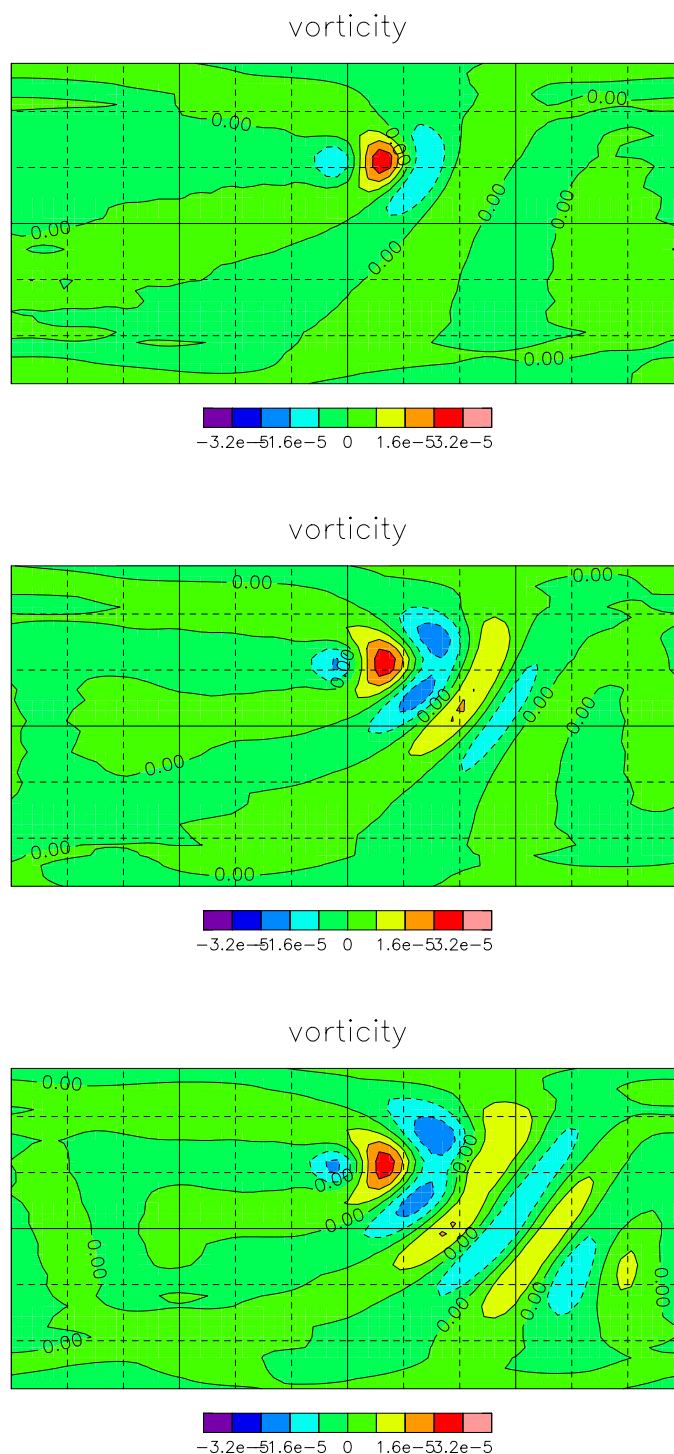


図 5: 剛体回転する東西流における $t = 2.5 \times 10^5$, $t = 5.0 \times 10^5$, $t = 7.5 \times 10^5$ の渦度 ζ . 縦軸は緯度, 横軸は経度を表す. 図の中心を北緯 0 度, 東経 180 度とし, 中心から上が北緯, 右が西経を表す. 破線は 30 度間隔である.

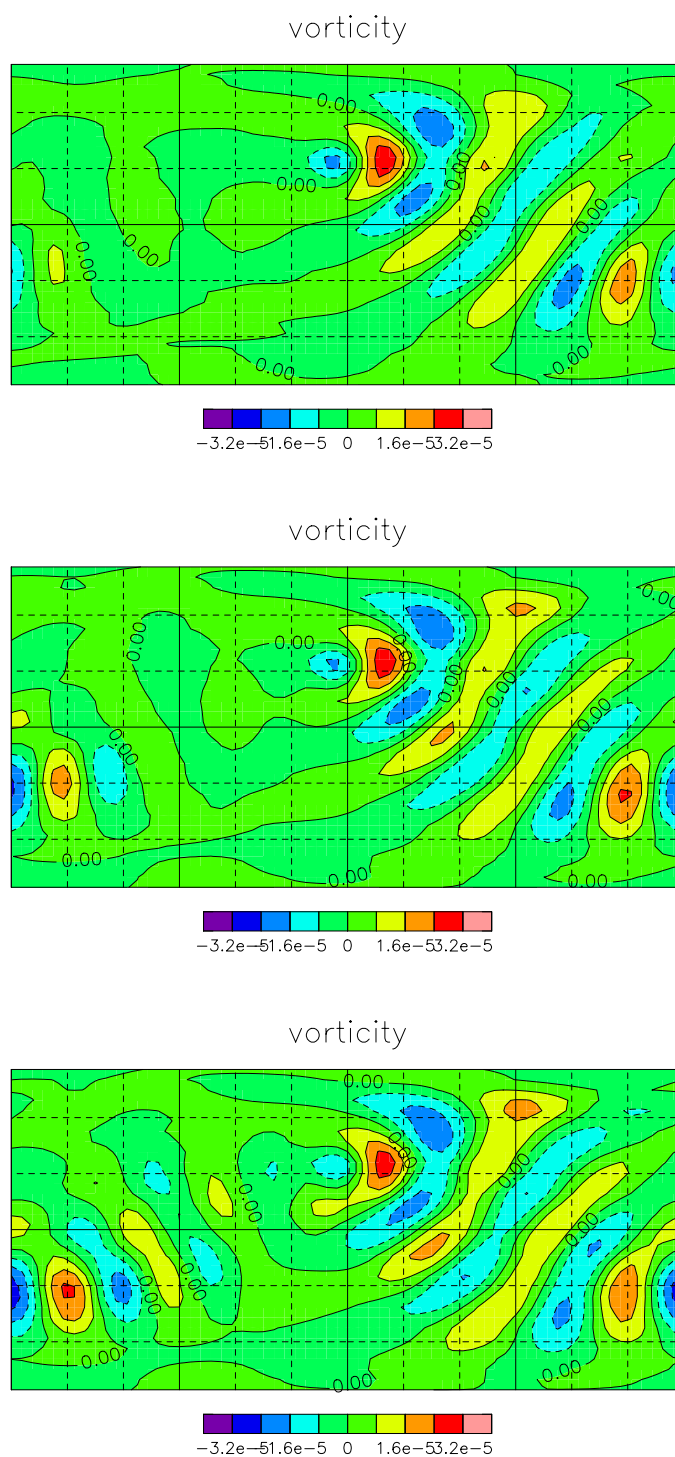


図 6: 剛体回転する東西流における $t = 10.0 \times 10^5$, $t = 12.5 \times 10^5$, $t = 15.0 \times 10^5$ の渦度 ζ . 縦軸, 横軸は図 5 と同じである.

5.3 現実的な東西流の場合

現実的な東西流として Grose and Hoskins (1979) の冬の 300mb の東西流を用いる．定常ロスビー波の全波数 K_s は (5.8) 式から求める．図 7 は現実的な東西流 \bar{U} ，図 8 は定常ロスビー波の全波数 K_s の緯度分布である．図 8 で，また，北緯 8 度で K_s が図の範囲を超えているが，実際の値は 185 である．また，北緯 8 度から南緯 14 度までは $K_s^2 < 0$ であるため，図示していない．

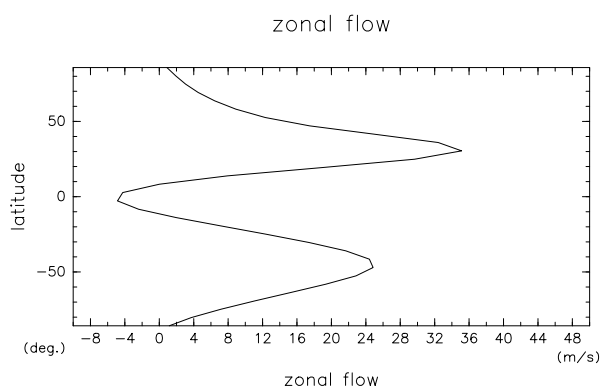


図 7: 現実的な東西流 \bar{U} ．縦軸は緯度，横軸は \bar{U} を表す．

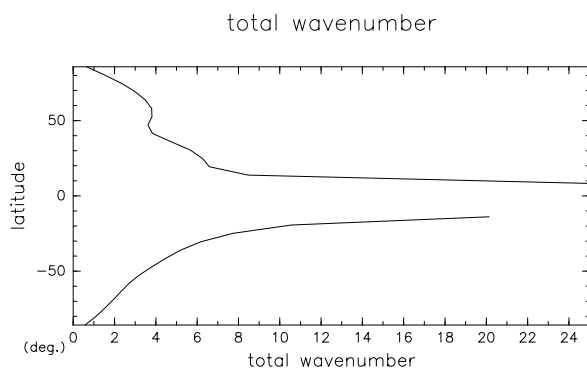


図 8: 現実的な東西流での定常ロスビー波の全波数 K_s ．縦軸は緯度，横軸は K_s を表す．

図 8 をもとに、定常ロスビー波の伝播経路を波線理論から予測する。まず、山岳から北東に射出された波線の伝播を考える。北緯 60 度付近に K_s の極大が存在するため、この付近に導波管が形成される。そのため、波線は、この導波管に沿って伝播すると考えられる。次に、山岳から東および南東に射出された波線の伝播を考える。北緯 10 度付近では K_s が非常に大きい。そのため、北緯 10 度は臨界緯度であるといえる。極に向かって K_s が減少するため、臨界緯度より極側に転向緯度が存在することがわかる。転向緯度と臨界緯度に挟まれた領域では、転向緯度に向かう波線もいずれ向きを変えて臨界緯度に向けて伝播する。臨界緯度に近づくとつれて、波線は緯度に対し垂直になり、南北方向の伝播速度、すなわち $c_{g\phi}$ はゼロとなる。そのため、臨界緯度に向かう波線は臨界緯度で止まると考えられる。しかし、臨界緯度では 4.3 節で見たように WKBJ 理論が成り立たないため、臨界緯度付近の予測はできない。

計算結果は 図 9 および 図 10 である。山岳から北東に向かう定常ロスビー波が、北緯 70 度付近を真東に伝播している様子が見られる。山岳から東および南東に向かう定常ロスビー波は、赤道方向に向きを変えながら伝播して、経度方向に 90 度より東には伝播しない。また、赤道に向かうにつれ伝播の速度は遅くなるが、赤道を越えても伝播する様子が見られる。計算結果は、波線理論での予測と非常に近い。しかし、波線理論による予測では臨界緯度を北緯 10 度としたが、計算結果では赤道を越える伝播が見られる。臨界緯度を越えても止まることなく伝播しているのは、臨界緯度付近で WKBJ 理論が成り立たないためだと考えられる。よって現実的な東西流の場合、臨界緯度付近を除き、波線理論は定常ロスビー波の伝播経路をよく表すことが示された。

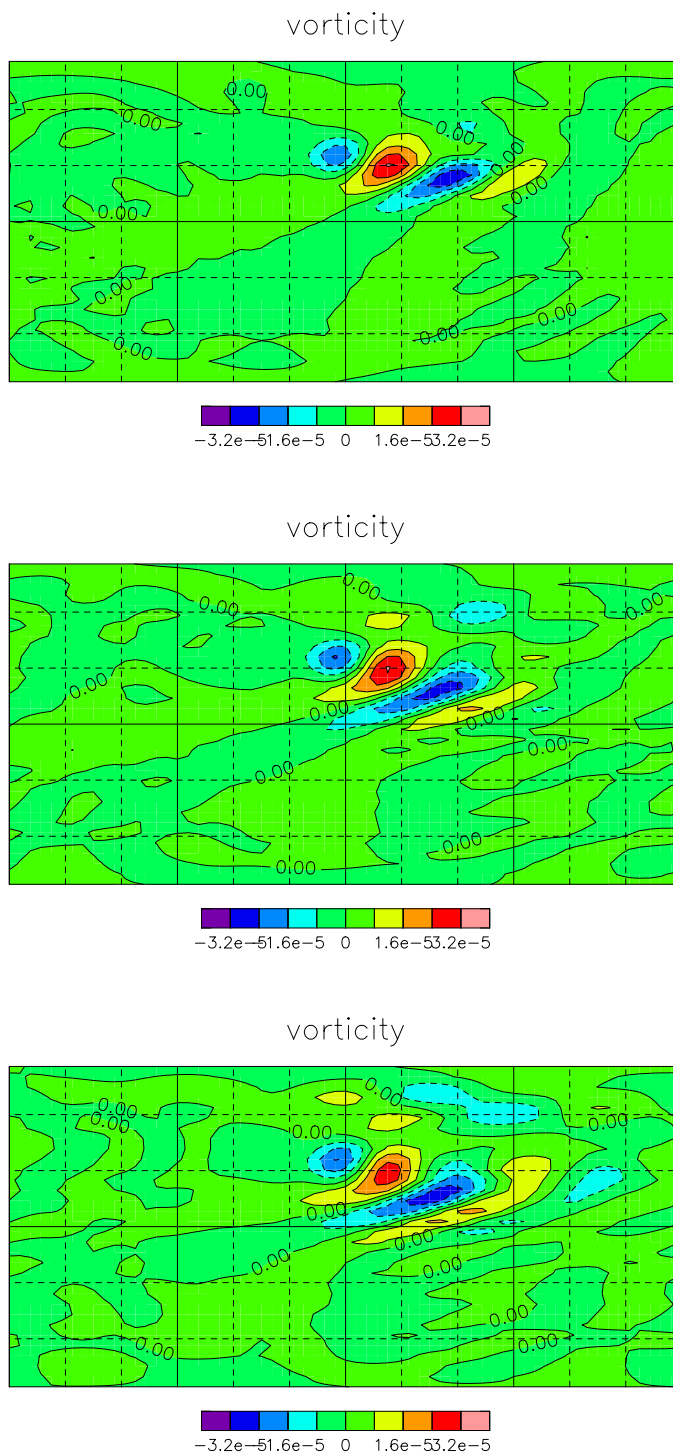


図 9: 現実的な東西流における $t = 2.5 \times 10^5$, $t = 5.0 \times 10^5$, $t = 7.5 \times 10^5$ の渦度 ζ . 縦軸, 横軸は図5と同じである.

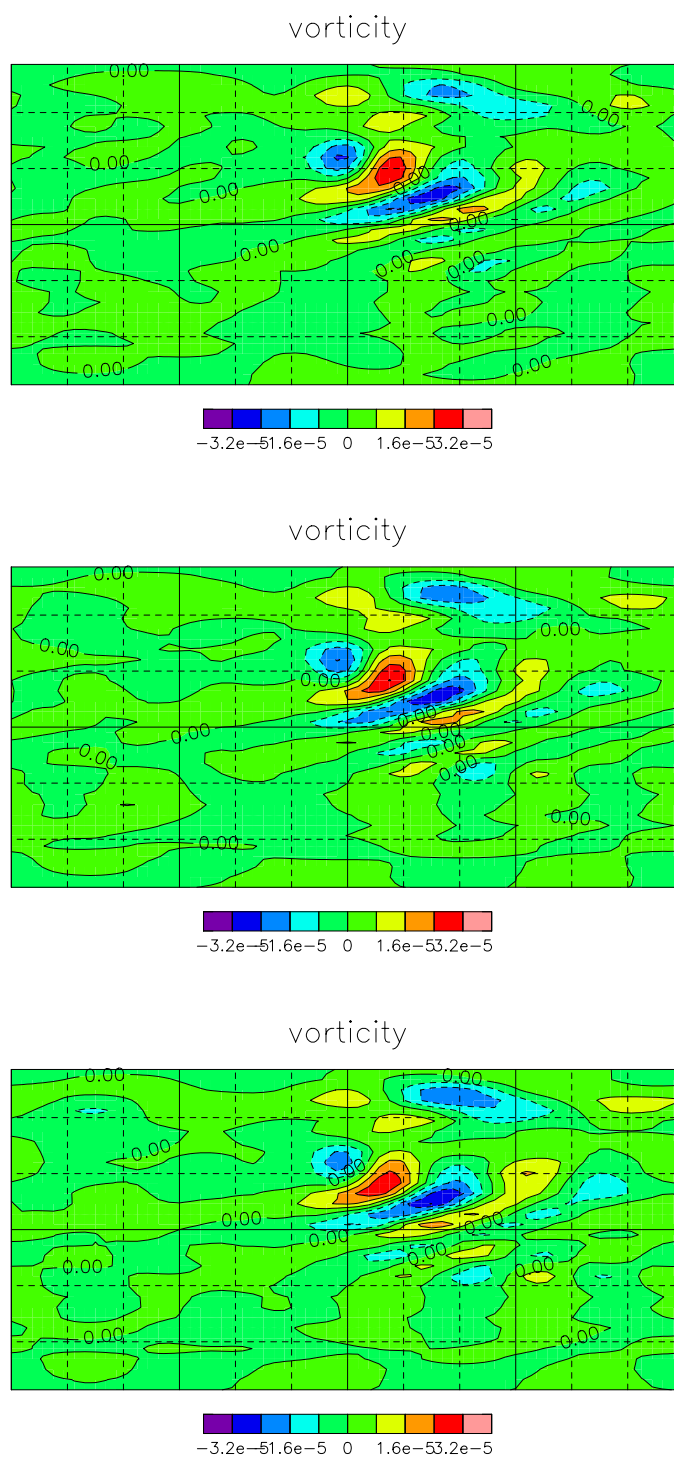


図 10: 現実的な東西流における $t = 10.0 \times 10^5$, $t = 12.5 \times 10^5$, $t = 15.0 \times 10^5$ の渦度 ζ . 縦軸, 横軸は図 5 と同じである.

5.4 亜熱帯に強いジェット気流がある東西流の場合

亜熱帯に強いジェット気流がある東西流は，5.3 節の現実的な東西流の北緯 30 度の風速を大きくしたものである．定常ロスビー波の全波数 K_s は (5.8) 式から求める．図 11 は亜熱帯に強いジェット気流がある東西流 \bar{U} ，図 12 は定常ロスビー波の全波数 K_s の緯度分布である．図 12 で，北緯 14 度から南緯 14 度までは $K_s^2 < 0$ であるため，図示していない．

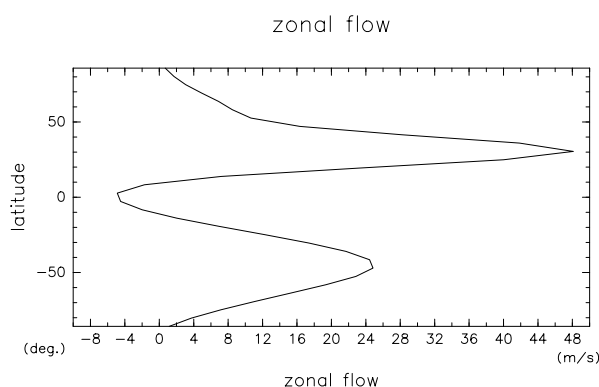


図 11: 亜熱帯に強いジェット気流がある東西流 \bar{U} ．縦軸は緯度，横軸は \bar{U} を表す．

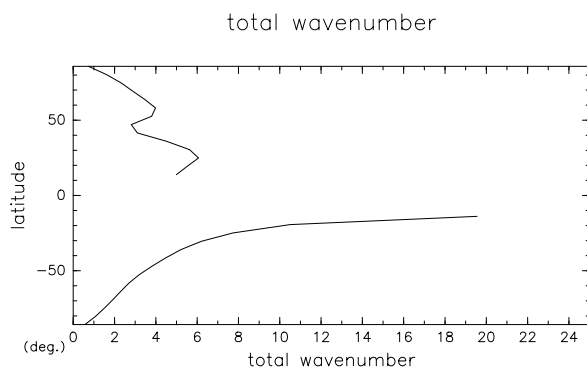


図 12: 亜熱帯に強いジェット気流がある東西流での定常ロスビー波の全波数 K_s ．縦軸は緯度，横軸は K_s を表す．

図 12 をもとに，定常ロスビー波の伝播経路を波線理論から予測する．北緯 30 度，北緯 60 度付近に K_s の極大が存在するため，北緯 30 度，北緯 60 度を軸とした 2 つの導波管が形成される．今回の計算では渦度源である山岳が北緯 30 度にあるため，射出された波線の大部分は北緯 30 度の導波管に沿って伝播すると考えられる．

計算結果は 図 13 および 図 14 である．北緯 30 度付近を定常ロスビー波が真東に伝播する様子が見られる．山岳から南北方向への伝播はほとんど見られず，北緯 30 度以外の緯度での伝播もほとんど見られない．計算結果は，波線理論での予測と非常に近い．よって亜熱帯に強いジェット気流がある東西流の場合，波線理論は定常ロスビー波の伝播経路をよく表すことが示された．

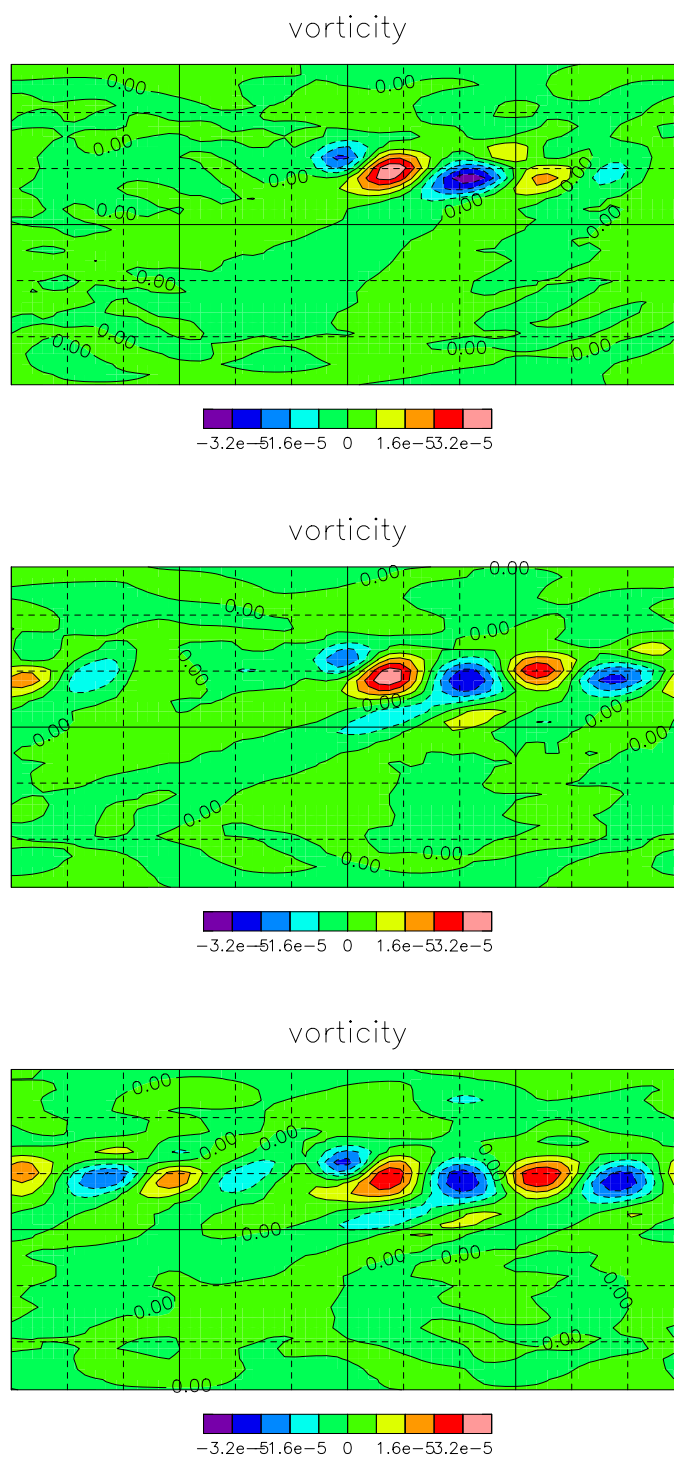


図 13: 亜熱帯に強いジェット気流がある東西流における $t = 2.5 \times 10^5$, $t = 5.0 \times 10^5$, $t = 7.5 \times 10^5$ の渦度 ζ . 縦軸, 横軸は図 5 と同じである.

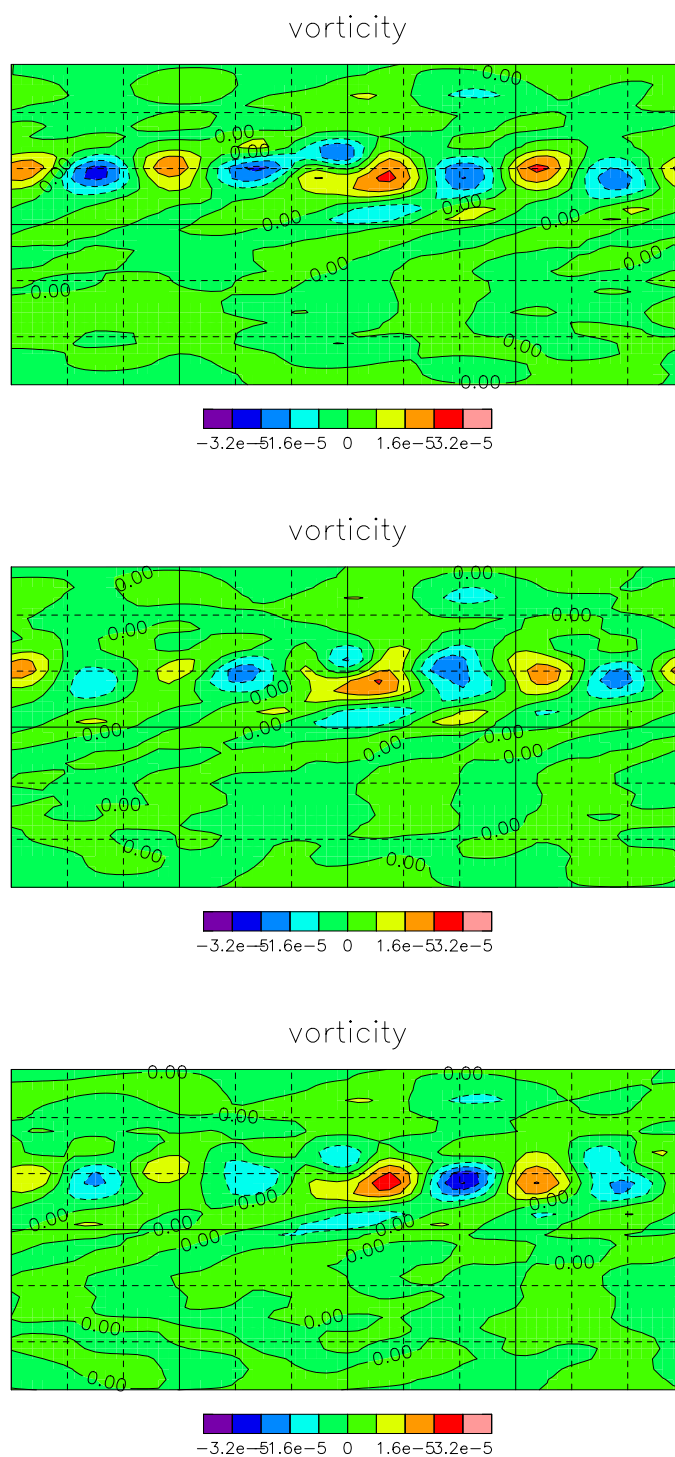


図 14: 亜熱帯に強いジェット気流がある東西流における $t = 10.0 \times 10^5$, $t = 12.5 \times 10^5$, $t = 15.0 \times 10^5$ の渦度 ζ . 縦軸, 横軸は図 5 と同じである.

6 まとめ

本論文では、Hoskins and Ambrizzi (1993) の波線理論をもとに、定常ロスビー波の球面上の伝播について議論した。Grose and Hoskins (1979) を参考にして、定常ロスビー波の伝播の時間発展について数値実験を行い、計算結果を波線理論を用いて考察した。

定常ロスビー波の伝播経路は臨界緯度付近を除き、波線理論により説明できる。波線とは群速度ベクトルを接線とする曲線であり、定常ロスビー波は波線に沿って伝播する。定常ロスビー波の全波数の緯度分布から、波線の伝播経路が予測できる。波線の東西波数が全波数と等しくなる転向緯度で、波線は屈折する。全波数が無限大となる臨界緯度に近づくと、波線は緯度に対し、垂直になる。全波数に極大があるとき、波線が屈折を繰り返しながら東に伝播する導波管が形成される。

剛体回転する東西流の場合、赤道を軸とした導波管が形成され、波線は導波管に沿って伝播することが予測された。また、波線の傾きを表す式から、波線経路は大円を描くことが予測された。計算結果から、定常ロスビー波は、北緯 75 度、南緯 75 度で屈折しながら東に伝播し、伝播経路は大円を描くことが確認された。

現実的な東西流の場合、北緯 60 度を軸とした導波管が形成され、北緯 10 度付近が臨界緯度となるため、山岳から北東に射出された波線は導波管に沿って伝播し、山岳から東および南東に射出された波線は臨界緯度で止まることが予測された。計算結果から、北東に向かう定常ロスビー波は、北緯 70 度付近を真東に伝播し、東および南東に向かう定常ロスビー波は、赤道方向に向きを変えながら伝播し、赤道に向かうにつれ伝播の速度は遅くなるが、赤道を越えても伝播することが確認された。

亜熱帯に強いジェット気流を持つ東西流の場合、北緯 30 度、北緯 60 度を軸とした 2 つの導波管が形成されるが、渦度源である山岳が北緯 30 度にあるため、射出された波線の大部分は北緯 30 度の導波管に捕捉されると予測された。計算結果から、定常ロスビー波は、北緯 30 度付近を真東に伝播し、それ以外の緯度ではほとんど伝播しないことが確認された。

以上の数値計算から、定常ロスビー波の伝播経路が、臨界緯度付近を除き、波線理論から予測される伝播経路と良く一致したことが確認された。

謝辞

本論文の作成にあたり，多くの方々の御指導ならびに御協力を頂きました．

指導教官である林祥介教授には研究のテーマと方針を頂きました．小高正嗣助手には論文の構成について御指導を頂きました．森川靖大さんにはプログラムの作成から論文の修正まで多くの助言を頂きました．土屋貴志さんには論文のチェックをして頂きました．

地球流体力学研究室の方々をはじめ，ご協力頂いた皆様に深く感謝いたします．

参考文献

Grose, W. L., and B. J. Hoskins, 1979: On the influence of orography on large scale atmospheric flow. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 223-234.

Held, I. M., 1983: Stationary and quasi-stationary eddies in the extratropical troposphere: Theory. *Large-Scale Dynamical Processes in the Atmosphere*, B. J. Hoskins and R. P. Pearce, Eds., Academic Press, 127-168.

Hoskins, B. J., and D. J. Karoly, 1981: The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing. *J. Atmos. Sci.*, **38**, 1179-1196.

Hoskins, B. J., and T. Ambrizzi, 1993: Rossby wave propagation on a realistic longitudinally barying flow. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1661-1671.

Karoly, D. J., 1983: Rossby wave propagation in a barotropic atmosphere. *Dyn. Atmos. Oceans*, **7**, 111-125.

Satoh, M., 2003: Atmospheric Circulation Dynamics and General Circulation Models. *Springer-PRAXIS, New-York*, 643pp.

Takehiro, S., Odaka, M., Ishioka, K., Ishiwatari, M., Hayashi, Y.-Y., SPMODEL Development Group, 2006: SPMODEL: A series of Hierarchical Spectral Models for Geophysical Fluid Dynamics, *Nagare*, **25**, Nagare Multimedia 2006, <http://www.nagare.or.jp/mm/2006/spmodel/> .

榎本剛, 2005: 最夏期における小笠原高気圧の形成メカニズム -2003 年度山本・正野論文賞受賞記念講演-, *天気*, **52**, 523-531 .

岸保勘三郎, 佐藤信夫, 1986: 新しい気象力学, 第 II 期 気象学のプロムナード 1, 東京堂出版, 204pp.

高橋こう子, 2002: 二次元定常ロスビー波の伝播 . 卒業論文, 北海道大学理学部地球科学科地球物理学専攻 .

新田尚, 野瀬純一, 伊藤朋之, 住明正, 2005: 気象ハンドブック 第 3 版, 朝倉書店, 1010pp .

林祥介, 1992: 線形波動, GFD ノート.

松井孝典，松浦充宏，林祥介，寺沢敏夫，谷本俊郎，唐戸俊一郎，1996: 地球連続体力学，岩波講座地球惑星科学 6，岩波書店，319pp．